CHAPITRE 3

La méthode de Gel'fond

§3.1 Le théorème de Hermite Lindemann

Pour illustrer cette deuxième méthode, nous commencerons par démontrer le théorème de Hermite Lindemann sur la transcendance de e^α. Nous verrons ensuite un résultat général sur les fonctions méromorphes satisfaisant des équations différentielles. Voici le théorème de Hermite Lindemann.

<u>Théorème</u> 3.1.1. <u>Soit</u> α <u>un nombre algébrique non nul. Alors le nombre</u> e^α <u>est transcendant.</u>

Il revient au même de dire qu'un logarithme non nul d'un nombre algébrique est transcendant. On en déduit la transcendance du nombre π.

On effectue, ici encore, la démonstration par l'absurde. Supposons les deux nombres

$$\alpha\ ,\ e^\alpha$$

algébriques, avec $\alpha \neq 0$. Les deux fonctions

$$z\ ,\ e^z\ ,$$

qui sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$, prennent alors des valeurs dans le corps de nombres

$$K = \mathbb{Q}(\alpha, e^\alpha)$$

pour $z = j\alpha$, $j \in \mathbb{Z}$.

Soit $\delta = [K : \mathbb{Q}]$, et soit $\partial \in \mathbb{Z}$, $\partial > 0$ un dénominateur commun de α et e^{α}.

Soit N un nombre entier suffisamment grand.

Montrons déjà qu'<u>il existe un polynôme non nul</u>

$$P_N \in \mathbb{Z}[X,Y] ,$$

<u>de degré inférieur ou égal à</u>

$$R_1 = R_1(N) = [N.(\mathrm{Log}\ N)^{-1}]$$

<u>par rapport à</u> X , <u>de degré inférieur ou égal à</u>

$$R_2 = R_2(N) = [(\mathrm{Log}\ N)^2]$$

<u>par rapport à</u> Y , <u>et de taille inférieure ou égale à</u> N , <u>tel que la fonction</u>

$$F_N(z) = P_N(z,e^z)$$

<u>vérifie</u>

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^s}{dz^s} F_N(0) &= 0 \\ \frac{d^s}{dz^s} F_N(\alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ pour } s = 0,\dots,N-1 .$$

Pour construire un tel polynôme P_N , on résout le système

$$\partial^{R_1+R_2} . \frac{d^s}{dz^s} F_N(j\alpha) = 0 , \quad (0 \leqslant s \leqslant N-1 , j = 0,1) ,$$

où les inconnues sont les coefficients $p_{\lambda,\mu}(N)$ de P_N . On écrit ce système sous la forme

$$\sum_{\lambda=0}^{R_1(N)} \sum_{\mu=0}^{R_2(N)} p_{\lambda,\mu}(N) \sum_{\sigma=0}^{\min(s,\lambda)} \frac{s!}{\sigma!(s-\sigma)!} \frac{\lambda!}{(\lambda-\sigma)!} \mu^{s-\sigma} . j^{\lambda-\sigma} . (\partial\alpha)^{\lambda-\sigma} . (\partial e^{\alpha})^{j\mu} . \partial^{R_1(N)-(\lambda-\sigma)+R_2(N)-j\mu} = 0 .$$

On doit résoudre $2N$ équations à au moins $[N \mathrm{Log}\ N]$ inconnues, à coefficients dans K entiers sur $\mathbb{Z}$. La taille de ces coefficients peut être majorée par

$$\operatorname{Log}(N+1) + N \operatorname{Log} 2 + R_1 \operatorname{Log} R_1 + N \operatorname{Log} R_2 + R_1 \operatorname{Log}|\overline{\partial^2 \alpha}| + R_2 \operatorname{Log}|\overline{\partial^2 e^{\alpha}}| \leqslant 3 N \operatorname{Log}(\operatorname{Log} N).$$

Le lemme (1.3.1) de Siegel montre qu'il existe des entiers rationnels

$$p_{\lambda,\mu}(N) \ , \ 0 \leqslant \lambda \leqslant R_1 \ , \ 0 \leqslant \mu \leqslant R_2 \ ,$$

vérifiant

$$0 < \max_{(\lambda,\mu)} |p_{\lambda,\mu}(N)| \leqslant 1 + [\sqrt{2}\, N(\operatorname{Log} N)^{3N+1}]^{\overline{\frac{2N}{N(\operatorname{Log} N - \delta)}}} ,$$

et tels que la fonction

$$F_N(z) = \sum_{\lambda=0}^{R_1} \sum_{\mu=0}^{R_2} p_{\lambda,\mu}(N)\, z^{\lambda} e^{\mu z}$$

vérifie

$$\frac{d^s}{dz^s} F_N(j\alpha) = 0 \ , \ (0 \leqslant s \leqslant N-1 \ , \ j = 0,1) \ .$$

Pour N suffisamment grand, on a

$$\operatorname{Log} \max_{(\lambda,\mu)} |p_{\lambda,\mu}(N)| \leqslant 7N \frac{\operatorname{Log}\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} N} < N \ .$$

La fonction F_N ainsi construite n'est pas identiquement nulle, donc l'un des nombres

$$\frac{d^s}{dz^s} F_N(0) \ , \ s \geqslant 0$$

est non nul. <u>Notons</u> M <u>le plus grand entier tel que</u>

$$\frac{d^s}{dz^s} F_N(j\alpha) = 0 \quad \text{pour} \quad s = 0,\ldots,M-1 \ , \ j = 0,1 \ .$$

On aura donc $M \geqslant N$, et il existe $j_0 \in \{0,1\}$ tel que

$$\gamma_N = \frac{d^M}{dz^M} F_N(j_0\alpha) \neq 0 \ .$$

On note j_1 l'élément de $\{0,1\}$ distinct de j_0.

La fonction

$$G_N(z) = \frac{F_N(z)}{z^M(z-\alpha)^M}$$

est entière, et on a

$$\gamma_N = M!(j_o\alpha - j_1\alpha)^M . G_N(j_o\alpha) .$$

Le principe du maximum, pour la fonction G_N , sur le disque $|z| \leqslant M^{2/3}$, donne

$$|G_N(j_o\alpha)| \leqslant |F_N|_R . \frac{1}{R^M} . \sup_{|z|=R} \frac{1}{|z-\alpha|^M} .$$

Or on a

$$|F_N|_R \leqslant (R_1+1)(R_2+1)e^N R^{R_1} e^{RR_2} \leqslant e^{2M} ,$$

d'où

$$|\gamma_N| \leqslant M!(1+|\alpha|)^M . e^{2M} . (\frac{2}{R^2})^M .$$

(On a majoré, pour $|z| = R$, $\frac{1}{|z-\alpha|}$ par $\frac{2}{R}$).

D'où finalement

$$\operatorname{Log}|\gamma_N| \leqslant \frac{7}{6} M \operatorname{Log} M - \frac{4}{3} M \operatorname{Log} M \leqslant - \frac{1}{6} M \operatorname{Log} M .$$

La taille de γ_N se calcule facilement : $\partial^{R_1+R_2}$ est un dénominateur de γ_N , et

$$|\overline{\gamma_N}| \leqslant (R_1+1)(R_2+1).e^N.(M+1).2^M.R_1^{R_1}.R_2^M.(1+|\overline{\alpha}|)^{R_1}(1+|\overline{e^\alpha}|)^{R_2} \leqslant R_2^M.e^{4M} \leqslant (\operatorname{Log} M)^{3M} ;$$

d'où

$$t(\gamma_N) \leqslant 3 M \operatorname{Log}(\operatorname{Log} M) ,$$

ce qui contredit la relation

$$-2 \delta t(\gamma_N) \leqslant \operatorname{Log}|\gamma_N| .$$

Le théorème de Hermite Lindemann est ainsi démontré.

§3.2 Deuxième démonstration du théorème de Gel'fond Schneider

La méthode que nous venons d'utiliser pour démontrer le théorème de Hermite Lindemann est inspirée par celle qu'a utilisée Gel'fond pour résoudre le septième problème de Hilbert.

On remarque que, si

$$a = e^{\ell} \ , \ b \ , \ a^{b} = e^{b\ell}$$

sont trois nombres algébriques, alors les deux fonctions

$$e^{z} \ , \ e^{bz}$$

sont algébriquement indépendantes (si $b \notin \mathbb{Q}$), prennent des valeurs dans le corps de nombres

$$K = \mathbb{Q}(a \ , b \ , a^{b})$$

pour $z = j\ell$, $j \in \mathbb{Z}$, et vérifient des équations différentielles à coefficients dans K .

On construit alors un polynôme non nul

$$P_N \in \mathbb{Z}[X_1, X_2] \ ,$$

de degré inférieur ou égal à $N^{\frac{1}{2}}(\operatorname{Log} N)^{\frac{1}{2}}$ par rapport à X_1 et à X_2 , de taille inférieure ou égale à $3.[K:Q]^2.N$, tel que la fonction

$$F_N(z) = P_N(e^{z}, e^{bz})$$

vérifie

$$\frac{d^s}{dz^s} F_N(j\ell) = 0 \quad \text{pour} \quad j = 0,\ldots,[K:\mathbb{Q}]+1 \ , \ \text{et} \quad s = 0,\ldots,N-1 \ .$$

On note ensuite M le plus petit entier pour lequel il existe $j_0 \in \mathbb{Z}$,

$0 \leqslant j_o \leqslant [K:\mathbb{Q}]+1$, avec

$$\gamma_N = \frac{d^M}{dz^M} F_N(j_o \ell) \neq 0 \ .$$

Le principe du maximum (sur le disque $|z| \leqslant M^{\frac{1}{2}}$) permet de majorer $|\gamma_N|$ par

$$\text{Log}|\gamma_N| \leqslant -\tfrac{1}{2}[K:\mathbb{Q}]\, M \,\text{Log}\, M + M(\text{Log}\, M)^{3/4} \ ;$$

la taille de γ_N vérifie

$$t(\gamma_N) \leqslant \tfrac{1}{2}\, M \,\text{Log}\, M + M(\text{Log}\, M)^{3/4} \ ;$$

de plus, le dénominateur de γ_N est majoré par

$$\text{Log}\ d(\gamma_N) \leqslant M(\text{Log}\ M)^{3/4} \ .$$

La relation (1.2.4)

$$-[K:\mathbb{Q}]\text{Log}\ d(\gamma_N) - ([K:\mathbb{Q}]-1)\text{Log}|\overline{\gamma_N}| \leqslant \text{Log}|\gamma_N|$$

n'est pas vérifiée, ce qui apporte la contradiction attendue.

Le théorème 2.1.1 est donc de nouveau démontré.

§3.3 Valeurs algébriques de fonctions méromorphes satisfaisant des équations différentielles

Nous avons vu (2.2.1) que la méthode de Schneider permettait d'obtenir des propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions entières algébriquement indépendantes.

Il en est de même de la méthode de Gel'fond, mais, de plus, on doit supposer que les fonctions considérées satisfont des équations différentielles ; en contrepartie, cette hypothèse supplémentaire permet d'obtenir un résultat plus fin.

Théorème 3.3.1. *Soit* K *un corps de nombres. Soient* $f_1,\ldots,f_h$ *des fonctions méromorphes. On suppose que les deux fonctions* f_1, f_2 *sont algébriquement indépendantes sur* $\mathbb{Q}$ *, et sont d'ordre inférieur ou égal à* ρ_1, ρ_2 *respectivement. On suppose également que la dérivation* $\frac{d}{dz}$ *opère sur l'anneau* $K[f_1,\ldots,f_h]$.

Alors l'ensemble des nombres complexes w *, qui ne sont pas pôles de* $f_1,\ldots,f_h$ *, et tels que*

$$f_j(w) \in K \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant h ,$$

est fini, et a au plus

$$(\rho_1+\rho_2)[K:\mathbb{Q}]$$

éléments.

On déduit évidemment de cet énoncé le théorème 3.1.1 de Hermite Lindemann et le théorème 2.1.1 de Gel'fond Schneider.

Il y a une petite difficulté technique dans la démonstration du théorème 3.3.1. Jusqu'à présent, tous les calculs de la taille de nombres algébriques reposaient sur (1.2.5). Maintenant, l'intervention des équations différentielles complique un peu la situation. On résout ce problème dans le lemme suivant.

Lemme 3.3.2. Soient K un corps de nombres, et $f_1,\dots,f_h$ des fonctions complexes. Il existe un entier $C > 0$ ayant les propriétés suivantes.

Soit $w \in \mathbb{C}$; on suppose que les fonctions $f_1,\dots,f_h$ sont holomorphes au voisinage de w, que la dérivation $\frac{d}{dz}$ opère sur l'anneau $K[f_1,\dots,f_h]$, et que

$$f_j(w) \in K \ \text{pour} \ 1 \leqslant j \leqslant h .$$

Soit $P \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_h]$ un polynôme non nul de degré total r et de degré r_i par rapport à X_i. Soit $F = P(f_1,\dots,f_h)$.

Alors on a, pour tout entier $k \geqslant 0$,

$$\frac{d^k}{dz^k} F(w) \in K ;$$

de plus,

$$C^k.d(f_1(w))^{Ck+r_1}\dots d(f_h(w))^{Ck+r_h}$$

est un dénominateur de $\frac{d^k}{dz^k} F(w)$, et

$$s(\frac{d^k}{dz^k} F(w)) \leqslant t(P) + k \operatorname{Log} C(k+r) + \sum_{j=1}^{h} (r_j+C.k)s(f_j(w)) + \sum_{j=1}^{h} \operatorname{Log}(1+r_j).$$

On remarque que le cas $k = 0$ correspond à (1.2.5). On va effectuer la démonstration par récurrence sur k. Par hypothèse, les dérivées $\frac{d}{dz} f_1,\dots,\frac{d}{dz} f_h$ peuvent s'exprimer comme des polynômes en $f_1,\dots,f_h$; soit C_1 le maximum des degrés totaux de ces h polynômes, que l'on écrit sous la forme

$$\frac{d}{dz} f_j = \sum_{v_{j,1}+\dots+v_{j,h}\leqslant C_1} u(v_{j,1},\dots,v_{j,h}) f_1^{v_{j,1}}\dots f_h^{v_{j,h}} ,$$

avec

$$u(v_{j,\ell}) \in K , \ 1 \leqslant j \leqslant h , \ 1 \leqslant \ell \leqslant h .$$

Soit $P \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_h]$ un polynôme non nul de degré total r et de degré r_j par rapport à X_j :

$$P = \sum_{\lambda_1=0}^{r_1} \cdots \sum_{\lambda_h=0}^{r_h} p(\lambda_1,\ldots,\lambda_h)\, X_1^{\lambda_1}\cdots X_h^{\lambda_h} = \sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_h\leqslant r} p(\lambda_1,\ldots,\lambda_h)\, X_1^{\lambda_1}\cdots X_h^{\lambda_h} .$$

On calcule facilement la dérivée, en w , de la fonction

$F = P(f_1,\ldots,f_h) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda)\, f_1^{\lambda_1}\cdots f_h^{\lambda_h}$:

$$\frac{d}{dz} F = \sum_{(\lambda)} p(\lambda) \sum_{i=1}^{h} \lambda_i . \Big(\prod_{j\neq i} f_j^{\lambda_j}\Big) . f_i^{\lambda_i-1} . \frac{d}{dz} f_i$$

$$= \sum_{(\lambda)} \sum_{i=1}^{h} \sum_{v_{i,1}+\cdots+v_{i,h}\leqslant C_1} p(\lambda).\lambda_i.u(v_{i,j}) \Big(\prod_{j\neq i} f_j^{\lambda_j+v_{i,j}}\Big) \times$$
$$\times f_i^{\lambda_i+v_{i,i}-1} .$$

Ecrivons cette expression sous la forme

$$\frac{d}{dz} F(z) = \sum_{(\mu)} q(\mu)\, f_1^{\mu_1}\cdots f_h^{\mu_h} ,$$

avec

$$\mu_1+\cdots+\mu_h \leqslant r + C_1 - 1$$

et

$$\mu_i \leqslant r_i + C_1 ;$$

donc

$$q(\mu) = q(\mu_1,\ldots,\mu_h) = \sum p(\lambda).\lambda_i.u(v_{i,j}) \in K ,$$

où la somme est étendue à l'ensemble

$$\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_h , i , v_{i,1},\ldots,v_{i,h}) \in \mathbb{Z}^{2h+1} ;\ \lambda_j + v_{i,j} = \mu_j \ \text{ pour } \ j \neq i ;$$
$$\lambda_i + v_{i,i} = \mu_i + 1 \ ,\ 1 \leqslant i \leqslant h \ ,\ v_{i,1}+\cdots+v_{i,h} \leqslant C_1 \ ,\ \lambda_1+\cdots+\lambda_h \leqslant r\} .$$

On a alors

$$\max_{(\mu)} |\overline{q(\mu)}| \leqslant \sum |p(\lambda)|.\lambda_i.|\overline{u(v_{i,j})}|$$

$$\leqslant \max_{(\lambda)} |p(\lambda)|.r. \max_{i,j,v_{i,j}} |\overline{u(v_{i,j})}|.(C_1+1)^h$$

$$\leqslant C_2 \, r \, e^{t(P)} ,$$

avec

$$C_2 = (C_1+1)^h. \max_{i,j,v_{i,j}} |\overline{u(v_{i,j})}| .$$

D'autre part, si C_3 est un dénominateur commun aux nombres

$$u(v_{i,1},\ldots,v_{i,h}) , \ 1 \leqslant i \leqslant h ,$$

alors C_3 est un dénominateur de $q(\mu)$, et

$$C_3.d(f_1(w))^{C_1+r_1} \ldots d(f_h(w))^{C_1+r_h}$$

est un dénominateur de

$$\frac{d}{dz} F(w) .$$

Par récurrence, on constate que l'on peut écrire

$$\frac{d^k}{dz^k} F(w) = \sum_{(\mu_k)} q_k(\mu_k) \, f_1^{\mu_{k,1}} \ldots f_h^{\mu_{k,h}} ,$$

avec

$$\sum_{j=1}^{h} \mu_{k,j} \leqslant r + k(C_1-1) ,$$

$$\mu_{k,j} \leqslant r_j + k\,C_1 , \ 1 \leqslant j \leqslant h ,$$

et

$$q_k(\mu_k) \in K ,$$

$$d(q_k(\mu_k)) \ \text{divise} \ C_3^k ,$$

$$s(q_k(\mu_k)) \leqslant k \operatorname{Log} C_2 + t(P) + k \operatorname{Log}(r+kC_1-k) .$$

(On majore

$$\prod_{\ell=0}^{k-1} (r+\ell(C_1-1))$$

par

$$(r+kC_1-k)^k).$$

On déduit alors de (1.2.5) :

$$s(\frac{d^k}{dz^k} F(w)) \leqslant t(P) + \sum_{i=1}^{k} (r_i+kC_1)s(f_i(w))$$
$$+ \sum_{i=1}^{h} \mathrm{Log}(r_i+kC_1+1) + k \,\mathrm{Log}\, C_2(r+kC_1-k)$$
$$\leqslant t(P) + k\,\mathrm{Log}\, C_4(k+r) + \sum_{i=1}^{h} (r_i+kC_1)s(f_i(w))$$
$$+ \sum_{i=1}^{h} \mathrm{Log}(r_i+1)$$

dès que $\qquad C_4 \geqslant C_1 \; C_2 \; e^{hC_1}$.

On obtient le résultat annoncé en choisissant C multiple de C_3 , et $C \geqslant C_4$.

Remarquons que la constante C est indépendante de w . (Elle ne dépend d'ailleurs pas non plus du corps de nombres K , mais seulement des polynômes exprimant que la dérivation opère sur $K[f_1,\ldots,f_h]$).

Nous sommes prêts, maintenant, à effectuer la <u>démonstration du théorème</u> 3.3.1.

Soient $w_1,\ldots,w_m$ $(m \geqslant 2)$ des nombres complexes, non pôles de $f_1,\ldots,f_h$, tels que

$$f_k(w_j) \in K \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant h \quad , \quad 1 \leqslant j \leqslant m \,.$$

Nous allons établir la majoration $m \leqslant (\rho_1+\rho_2)\delta$, avec $\delta = [K:\mathbb{Q}]$. Soit N

un entier suffisamment grand ; $C_1,\dots,C_6$ désigneront des entiers indépendants de N (ces constantes sont facilement calculables en fonction des données de l'énoncé).

Montrons qu'*il existe un polynôme non nul*

$$P_N \in \mathbb{Z}[X_1,X_2] \ ,$$

de degré inférieur ou égal à

$$R_1(N) = [N^{\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}}.(\mathrm{Log}\ N)^{\frac{1}{2}}]$$

et

$$R_2(N) = [N^{\frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2}}(\mathrm{Log}\ N)^{\frac{1}{2}}]$$

par rapport à X_1 *et* X_2 *respectivement, et de taille inférieure ou égale à* $3\delta m\ N$, *tels que la fonction*

$$F_N = P_N(f_1,f_2)$$

vérifie

$$\frac{d^s}{dz^s} F_N(w_j) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad s = 0,\dots,N-1 \quad \underline{\text{et}} \quad j = 1,\dots,m \ ,$$

Notons ∂_k $(1 \leqslant k \leqslant h)$ un dénominateur commun des nombres

$$f_k(w_j) \ , \ (1 \leqslant j \leqslant m) \ .$$

On résout le système

$$C_1^N \partial_1^{R_1+C_1N}.\partial_2^{R_2+C_1N}.\frac{d^s}{dz^s} F_N(w_j) = 0 \ ,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\lambda=0}^{R_1}\sum_{\mu=0}^{R_2} p_N(\lambda,\mu).C_1^N.\partial_1^{R_1+C_1N}.\partial_2^{R_2+C_1N}\frac{d^s}{dz^s}(f_1(w)^\lambda f_2(w)^\mu\ {}_{w=w_j}=0.$$

D'après le lemme 3.3.2, on peut choisir $C_1 > 0$ tel que les coefficients de ce système soient entiers sur $\mathbb{Z}$, de taille majorée par

$$N \operatorname{Log} N + C_2 N \leqslant 2N \operatorname{Log} N .$$

On obtient $m.N$ équations à $(R_1+1)(R_2+1) \geqslant N \operatorname{Log} N$ inconnues ; le lemme 1.3.1 permet de trouver des entiers rationnels

$$p_{\lambda,\mu}(N) , \; 0 \leqslant \lambda \leqslant R_1 , \; 0 \leqslant \mu \leqslant R_2 ,$$

vérifiant

$$0 < \max_{\lambda,\mu} |p_{\lambda,\mu}(N)| \leqslant (2\sqrt{2}\, N^{2N+1} \operatorname{Log} N)^{\frac{\delta m N}{N(\operatorname{Log} N - \delta m)}} < e^{3\delta m N} ,$$

tels que la fonction

$$F_N = \sum_{\lambda=0}^{R_1} \sum_{\mu=0}^{R_2} p_{\lambda,\mu}(N)\, f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2}$$

vérifie

$$\frac{d^s}{dz^s} F_N(w_j) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant s \leqslant N-1 , \; 1 \leqslant j \leqslant m .$$

Les deux fonctions f_1, f_2 sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, et le polynôme P_N est non nul. Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$ l'un des nombres

$$\frac{d^s}{dz^s} F_N(z) , \; (s \geqslant 0 , s \in \mathbb{Z})$$

est non nul. Notons M le plus petit entier tel qu'il existe $j_0 \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant j_0 \leqslant m$, avec

$$\gamma_N = \frac{d^M}{dz^M} F_N(w_{j_0}) \neq 0 .$$

On a donc

$$\frac{d^s}{dz^s} F_N(w_j) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant m , \; 0 \leqslant s \leqslant M-1 .$$

Soient h_1, h_2 deux fonctions entières, d'ordre inférieur ou égal à ρ_1, ρ_2 respectivement, ne s'annulant pas en $w_1,\dots,w_m$, et telles que les fonctions $h_1 f_1$ et $h_2 f_2$ soient entières. Alors la fonction

$$h_1^{R_1} h_2^{R_2} F_N$$

est entière, et admet les zéros $w_1,\dots,w_m$, d'ordre au moins égal à M. Par conséquent la fonction

$$G_N(z) = h_1(z)^{R_1} . h_2(z)^{R_2} . F_N(z) . \prod_{j=1}^{m} (z-w_j)^{-M}$$

est entière dans $\mathbb{C}$; on lui applique le principe du maximum sur le disque de rayon

$$M^{\frac{1}{\rho_1+\rho_2}} ,$$

et on utilise la relation

$$\gamma_N = M! \; G_N(w_{j_o}) \; h_1(w_{j_o})^{-R_1} . h_2(w_{j_o})^{-R_2} . \prod_{j \neq j_o} (w_{j_o} - w_j)^M .$$

Donc

$$|\gamma_N| \leqslant M! \prod_{j\neq j_o} |w_{j_o} - w_j|^M . \sup_{|z|=R} \prod_{j=1}^{m} |z-w_j|^{-M} . |h_1(w_{j_o})|^{-R_1} . |h_2(w_{j_o})|^{-R_2} . |h_1^{R_1} h_2^{R_2} F_N|_R .$$

On majore $|h_1^{R_1} h_2^{R_2} F_N|_R$ par

$$(R_1+1)(R_2+1) \; e^{3\delta mN} . (|h_1 f_1|_R + 1)^{R_1} . (|h_2 f_2|_R + 1)^{R_2}$$

d'où

$$\operatorname{Log} |h_1^{R_1} h_2^{R_2} F_N|_R \leqslant c_3 (R_1 R^{\rho_1} + R_2 R^{\rho_2}) \leqslant 2c_3 \; M (\operatorname{Log} M)^{\frac{1}{2}} ,$$

grâce au choix de R, R_1 et R_2.

On majore ensuite

$$M! \quad \text{par} \quad M^M ,$$

$$\prod_{j\neq j_o} |w_{j_o} - w_j|^M \quad \text{par} \quad c_4^M ,$$

et

$$\sup_{|z|=R} \prod_{j=1}^{m} |z-w_j|^{-M} \quad \text{par} \quad (\tfrac{R}{2})^{-m.M} = \frac{2^{mM}}{M^{\frac{mM}{\rho_1+\rho_2}}} .$$

D'où

$$\text{Log}|\gamma_N| \leqslant M \text{ Log } M(1 - \frac{m}{\rho_1+\rho_2}) + M(\text{Log } M)^{3/4} .$$

La taille de γ_N se calcule facilement, grâce au lemme 3.3.2 :

$$s(\gamma_N) \leqslant t(P_N) + M \text{ Log}(M + N(\text{Log } N)^{\frac{1}{2}}) + c_5 M \leqslant M \log M + M(\text{Log } M)^{\frac{1}{2}} .$$

De plus, le dénominateur de γ_N est majoré par

$$\text{Log } d(\gamma_N) \leqslant c_6 N \leqslant M(\text{Log } M)^{\frac{1}{2}} .$$

L'inégalité (1.2.4) :

$$(\delta-1)\, s(\gamma_N) + \delta \text{ Log } d(\gamma_N) + \text{Log}|\gamma_N| \geqslant 0$$

donne

$$(\frac{m}{\rho_1+\rho_2} - \delta) M \text{ Log } M \leqslant 2\, M(\text{Log } M)^{3/4} ,$$

ce qui n'est possible, pour N suffisamment grand, que pour

$$m \leqslant \delta(\rho_1+\rho_2) .$$

__Remarque.__ Supposons que la dérivation $\frac{d}{dz}$ opère sur __le corps__ $K(f_1,\ldots,f_h)$, au lieu de l'anneau $K[f_1,\ldots,f_h]$, les autres hypothèses du théorème 3.3.1 n'étant pas modifiées. Alors il existe des fractions rationnelles

$$\frac{P_k}{Q_k} \in K(X_1,\ldots,X_h) \quad , \quad 1 \leqslant k \leqslant h \, ,$$

telles que

$$\frac{d}{dz} f_k = \frac{P_k(f_1,\ldots,f_h)}{Q_k(f_1,\ldots,f_h)} \, .$$

Dans l'anneau factoriel $K[X_1,\ldots,X_h]$, on peut supposer P_k et Q_k sans facteurs communs, et noter Q le p.p.c.m. de $Q_1,\ldots,Q_h$. Soit

$$f_{h+1} = [Q(f_1,\ldots,f_h)]^{-1} \, .$$

On constate alors que la dérivation opère sur __l'anneau__ $K[f_1,\ldots,f_{h+1}]$, et que, si w n'est pas pôle de $f_1,\ldots,f_h$ et vérifie

$$f_k(w) \in K \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant h \, ,$$

alors ou bien w est pôle de f_{h+1}, ou bien $f_{h+1}(w) \in K$ (chacun des deux cas peut se présenter ; considérer par exemple

$$f_1(z) = z \, , \; f_2(z) = z^2 \wp(z) \, , \; f_3(z) = z^3 \wp'(z) \, ,$$

avec $h = 3$ et $w = 0$).

Par conséquent, d'après le théorème 3.3.1, l'ensemble des nombres complexes w, qui ne sont pas pôles de $f_1,\ldots,f_h$, __ni de__ f_{h+1}, et tels que

$$f_j(w) \in K \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant h \, ,$$

est fini et a au plus

$$(\rho_1+\rho_2)[K:\mathbb{Q}]$$

éléments.

§3.4 Références

La démonstration du §3.1 est essentiellement différente de celles de Hermite (qui obtint la transcendance de e en 1873) et de Lindemann (qui démontra, en 1882, la transcendance de π) ; ces démonstrations originales reposaient sur l'identité d'Hermite : si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme de degré n, la fonction

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k}{dz^k} P(x)$$

vérifie

$$e^x F(0) - F(x) = e^x \int_0^x e^{-t} P(t)dt .$$

On pourra trouver de plus amples renseignements sur la méthode de Hermite Lindemann (ainsi que ses développements, par Weierstrass, Siegel, Shidlovskii,...) dans les articles et ouvrages suivants : [Fel'dman et Shidlovskii, 1966] ; [Siegel,T] ; voir aussi [Ramachandra, 1968], [Lipman], [Mahler, 1969], et [Lang,T,chap.VII].

La démonstration présentée ici du théorème de Hermite Lindemann n'est pas la plus simple qu'on puisse donner ; mais elle présente la curiosité de n'utiliser la fonction auxiliaire F_N qu'en deux points, 0 et α.

La solution, par Gel'fond, du septième problème de Hilbert, date du 1 avril 1934 [Gel'fond, 1934]. Elle a été reprise et détaillée par [Hille, 1942] et [Siegel,T]

Le premier théorème général sur les valeurs de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes, contenant des résultats de transcendance, est dû à Schneider [Schneider, 1948]. Deux variantes de ce premier théorème sont les théorèmes 12 et 13 de [Schneider,T.]. Ces résultats étaient très généraux, en particulier celui de 1948, qui pouvait s'appliquer aussi bien aux fonctions satisfaisant des équations différentielles (méthode de Gel'fond) qu'aux autres (méthode de Schneider) ; seulement leur énoncé n'était pas propice à une généralisation, par exemple pour les fonctions de plusieurs variables ; c'est Lang qui, en 1962, a trouvé les hypothèses convenables, ce qui lui a permis, l'année suivante, d'énoncer un résultat correspondant pour les fonctions de plusieurs variables [Lang,T.] ; voir à ce sujet [Bombieri, 1970].

Le lien entre ces résultats (par exemple le fait que le théorème 12 de [Schneider,T] conduise à la borne

$$m \leqslant (\max(\rho_1, \rho_2)+\tfrac{1}{2})(6[K:\mathbb{Q}]-1)$$

pour le théorème 3.3.1) est expliqué dans [Lipman].

On peut remarquer que la borne

$$(\rho_1+\rho_2)[K:\mathbb{Q}]$$

du théorème 3.3.1 est la meilleure possible quand $K=\mathbb{Q}$ (considérer les deux fonctions

$$z \quad \text{et} \quad \exp(z(z-1)\ldots(z-k+1)) \text{).}$$

EXERCICES

Exercice 3.1.a. Soit $M \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ une matrice qui n'est pas nilpotente.

1) Montrer que, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\alpha \neq 0$, la matrice

$$\exp(M\alpha)$$

n'appartient pas à $GL_n(\overline{\mathbb{Q}})$.

2) On suppose qu'il existe $u \in \mathbb{C}$, $u \neq 0$ tel que

$$\exp(Mu) \in GL_n(\overline{\mathbb{Q}}) .$$

Montrer que le sous $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par les valeurs propres de M a pour dimension 1, et que M est diagonalisable.

(Utiliser le théorème de Hermite Lindemann ou celui de Gel'fond Schneider, suivant que M est diagonalisable ou non).

Exercice 3.3.a. Soit f une fonction méromorphe transcendante, d'ordre fini, vérifiant une équation différentielle du type

$$f^{(m)}(z) = P(z\ ,f(z),\dots,f^{(m-1)}(z))\ ,$$

où $P \in \mathbb{Q}[X_1,\dots,X_m]$. Montrer que l'ensemble des $z \in \mathbb{Q}$ tels que $f(z) \in \mathbb{Q}$ est fini.

Exercice 3.3.b. Avec les notations de l'exercice 2.2.b, le théorème de Hermite Lindemann s'énonce

$$\delta(z\ ,\ e^z) = 0\ ,$$

et le théorème de Gel'fond Schneider s'écrit

$$\delta(e^z\ ,\ e^{bz}) = 0$$

pour $b \in \overline{\mathbb{Q}}$, $b \notin \mathbb{Q}$.

Soient α , β deux nombres algébriques, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, et $\wp_1$, $\wp_2$ deux fonctions elliptiques de Weierstrass, d'invariants $g_2^{(1)}$, $g_3^{(1)}$ et $g_2^{(2)}$, $g_3^{(2)}$ algébriques. Soit ζ_1 la fonction zêta associée à $\wp_1$. Vérifier, en utilisant le théorème 3.3.1, les majorations suivantes

$$\delta(e^{\beta z}\ ,\ \wp_1(z)) = 0 \qquad \text{si } \beta \neq 0\ ;$$

$$\delta(\wp_1(z)\ ,\ \alpha z+\beta\zeta_1(z)) = 0\ ;$$

$$\delta(\wp_1(z)\ ,\ \wp_2(\beta z)) = 0\ ,\ \text{si les deux fonctions}$$

$$\wp_1(z)\ ,\ \wp_2(\beta z)$$

sont algébriquement indépendantes.

[Schneider, T., chap.II §4].

Exercice 3.3.c

1) Soient a et b deux nombres réels algébriques, $0 < b < a$; soient ξ_1, η_1, ξ, η des nombres réels algébriques ; on suppose que les points (ξ_1,η_1) et (ξ,η) de $\mathbb{R}^2$ appartiennent à l'ellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 .$$

Montrer que la longueur de l'arc

$$s(\xi,\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi} \sqrt{\frac{a^2-\varepsilon\xi^2}{a^2-\xi^2}}\, d\xi ,$$

(où $\varepsilon^2 = 1-\frac{b^2}{a^2}$) est un nombre transcendant ou nul.

2) Soient $a > 0$ un nombre réel, et $(\xi_1,\eta_1),(\xi,\eta)$ deux points de la lemmiscate

$$(\xi^2+\eta^2)^2 = 2a^2(\xi^2-\eta^2) ;$$

montrer que, si a, ξ, ξ_1 sont algébriques, la longueur de l'arc

$$s(\xi,\xi_1) = \int_{t_1}^{t} \frac{a\sqrt{2}\, d\tau}{1-\tau^4}$$

(où $t^2 = \frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2+\eta^2}$) est un nombre transcendant ou nul.

En déduire la transcendance du nombre

$$\pi^{-\frac{1}{4}}\, \Gamma(\tfrac{1}{4}) ,$$

où Γ désigne la fonction gamma.

3) Montrer que le nombre

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}}$$

est transcendant [Siegel, 1931] et [Siegel, T].

Exercice 3.3.d. Soient K un corps de nombres, d , h et δ trois entiers, $\delta \geqslant 1$, $h \geqslant d \geqslant 2$, et $f_1,\dots,f_h$ des fonctions méromorphes. On suppose que la dérivation $\frac{d}{dz}$ opère sur le corps $K(f_1,\dots,f_h)$, et que les fonctions $f_1,\dots,f_d$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, d'ordre inférieur ou égal à $\rho_1,\dots,\rho_d$ respectivement.

Montrer que l'ensemble des nombres complexes w , non pôles de $f_1,\dots,f_h$, et tels que

$$f_i(w) \in \overline{\mathbb{Q}} \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant h ,$$

avec

$$[K(f_1(w),\dots,f_h(w)) : \mathbb{Q}] \leqslant \delta ,$$

est fini, et a au plus

$$\frac{\rho_1+\dots+\rho_d}{d-1}.\delta$$

éléments.

(Indications. Se ramener au cas

$$\max_{1\leqslant i\leqslant d} \rho_i \leqslant \frac{\rho_1+\dots+\rho_d}{d-1} ,$$

en s'inspirant de 2.2.5.

Utiliser ensuite l'exercice 1.3.b pour construire, pour N suffisamment grand, un polynôme non nul

$$P_N \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_d] ,$$

de degré inférieur ou égal à

$$N^{1-\frac{(d-1)\rho_i}{\rho_1+\dots+\rho_d}}.(\mathrm{Log}\ N)^{\frac{1}{d}}$$

par rapport à X_i $(1 \leqslant i \leqslant d)$, et de taille inférieure ou égale à N , tel que la fonction

$$F_N = P_N(f_1,\ldots,f_d)$$

vérifie

$$\frac{d^s}{dz^s} F_N(w_j) = 0 \quad \text{pour} \quad j = 1,\ldots,m \text{ , et } \quad s = 0,\ldots,N-1 \text{ .}$$

Continuer ensuite comme dans la démonstration de 3.3.1 ; on utilisera le principe du maximum sur un disque de rayon

$$M^{\frac{d-1}{\rho_1+\ldots+\rho_d}}).$$

Montrer que si K n'est pas un sous-corps de $\mathbb{R}$, l'ensemble des w a au plus

$$\frac{\rho_1+\ldots+\rho_d}{d-1}\cdot\frac{\delta}{2}$$

éléments.

(En utilisant la conjugaison complexe, on remplacera (1.2.4) par

$$-n \text{ Log } d(\alpha) -(n-2) \text{ Log}|\bar{\alpha}| \leqslant 2 \text{ Log}|\alpha|$$

quand $\alpha \notin \mathbb{R}$).

Exercice 3.3.e. Une dérivation D sur un anneau A est une application de A dans A satisfaisant

$$D(x+y) = Dx + Dy \quad \text{et} \quad D(xy) = x\,Dy + y\,Dx$$

pour tout $(x,y) \in A \times A$.

1) Montrer qu'on peut remplacer, dans l'énoncé du lemme 3.3.2, la dérivation $\frac{d}{dz}$ par une dérivation quelconque D sur l'anneau $K[f_1,\ldots,f_h]$.

2) On remplace, dans les hypothèses du théorème 3.3.1 (resp. de l'exercice 3.3.d), la condition :

"la dérivation $\frac{d}{dz}$ opère sur l'anneau $K[f_1,\ldots,f_h]$"

par :

"il existe une dérivation D sur l'anneau $L = K[f_1,\ldots,f_h]$, qui possède les deux propriétés suivantes :

a) pour tout $w \in \mathbb{C}$ et $g \in L$, si w n'est pas pôle de g, alors w n'est pas pôle de Dg (on note alors $Dg_{|w}$ la valeur de Dg en w), et, pour tout entier $k > 0$, on a

$$D^h g_{|w} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant h \leqslant k \Longrightarrow \frac{d^h}{dz^h} g(w) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant h \leqslant k\,.$$

b) Il existe un prolongement de D à l'anneau $L[z]$ tel que

$$\operatorname{Log} D^k(z^k)\big|_{z=0} \leqslant c\, k \operatorname{Log} k \quad \text{pour} \quad k \to +\infty\,,$$

où c est un entier positif indépendant de k".

Montrer que la conclusion devient

$$m \leqslant (\rho_1+\rho_2)(\delta+c-1)$$

(resp.

$$m \leqslant \frac{\rho_1+\dots+\rho_d}{d-1}\,(\delta+c-1)\quad).$$

3) Donner des exemples de dérivations D possédant les propriétés a) et b) précédentes (considérer, par exemple, les dérivations

$$g(z).\frac{d}{dz}\ ,$$

où g est une fonction entière).

Exercice 3.3.f. Soit K un corps de nombres ; soient $f_1,\dots,f_h$ des fonctions holomorphes au voisinage d'un point $w \in \mathbb{C}$; soit D une dérivation sur l'anneau

$$K[f_1,\dots,f_h] .$$

On suppose que la dérivation D opère sur le K-espace vectoriel

$$K + Kf_1 + \dots + Kf_h ,$$

c'est-à-dire qu'il existe des éléments

$$u_{i,j} \quad , \quad (0 \leqslant i \leqslant h \ , \ 1 \leqslant j \leqslant h)$$

de K, vérifiant

$$Df_j = u_{o,j} + u_{1,j}f_1 + \dots + u_{h,j}f_h \quad , \quad (1 \leqslant j \leqslant h).$$

Soit ∂ un dénominateur des nombres

$$u_{i,j} \qquad (0 \leqslant i \leqslant h \ , \ 1 \leqslant j \leqslant h) ,$$

et soit

$$U = \operatorname{Log} \max_{i,j} |\overline{u_{i,j}}| .$$

Soit $P \in K[X_1,\dots,X_h]$ un polynôme de degré total r ; on note $|\overline{P}|$ le maximum des valeurs absolues des conjugués des coefficients de P, et $d(P)$ le plus petit commun multiple des dénominateurs des coefficients de P (ainsi les coefficients du polynôme $d(P).P$ sont des entiers de K sur $\mathbb{Z}$).

Soit $F = P(f_1,\dots,f_h)$.

1) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 0$, on a

$$D^k F(w) \in K ;$$

montrer que

$$d(P).\partial^k.(d(f_1(w))\dots d(f_h(w)))^r$$

est un dénominateur de $D^kF(w)$, et que

$$\mathrm{Log}\ |\overline{D^kF(w)}| \leqslant \mathrm{Log}\ |\overline{P}| + r(\max_{1\leqslant j\leqslant h} s(f_j(w)) + \mathrm{Log}(h+1)) + k(\mathrm{Log}(r+1) + \mathrm{Log}(h+1) + U).$$

(Voir à ce sujet [Adams, 1964, p. 283] et [Waldschmidt, 1972 a, lemme 3.1]).

2) Applications :

a) Sous les hypothèses du théorème 3.3.1, on suppose que la dérivation $\frac{d}{dz}$ opère sur le K-espace vectoriel $K + K.f_1 +\dots+ K.f_h$.

Montrer que l'ensemble des $w \in \mathbb{C}$ tels que

$$f_i(w) \in K \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant h$$

a au plus

$$\delta\rho_2 + \rho_1$$

éléments, si $\rho_2 \geqslant \rho_1$ et $\delta = [K:\mathbb{Q}]$.

(Indications. La démonstration est identique à celle du théorème 3.3.1, à l'exception de la majoration de $s(\gamma_N)$ qui devient

$$s(\gamma_N) \leqslant \frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2} M \,\mathrm{Log}\, M + M(\mathrm{Log}\, M)^{\frac{1}{2}} .$$

Comparer avec la démonstration du §3.2).

b) Avec les notations de l'exercice 3.3.d, on suppose que $\frac{d}{dz}$ opère sur $K + Kf_1 +\dots+ Kf_h$; montrer que l'ensemble des w a au plus

$$\delta.\frac{\rho_1+\dots+\rho_d}{d-1} - (\delta-1).\min_{1\leqslant i\leqslant d} \rho_i$$

éléments.

Exercice 3.3.g

1) Soit f une fonction entière d'ordre inférieur ou égal à ρ $(\rho > 0)$. En utilisant les inégalités de Cauchy sur un disque de rayon $(\frac{n}{\rho})^{1/\rho}$, montrer que, pour tout $w \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathrm{Log}\left|\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}f(w)\right| + \frac{n}{\rho}\mathrm{Log}\, n << n \quad \text{pour} \quad n \to +\infty \; (\text{cf. [Rudin]}).$$

En déduire

$$\max_{0 \leqslant \lambda \leqslant n} \mathrm{Log}\left|\frac{d^n}{dz^n}f^{\lambda}(w)\right| << n\,\mathrm{Log}\, n \quad \text{pour} \quad n \to +\infty .$$

2) Soient $f_1,\ldots,f_d$ des fonctions entières d'ordre fini. Vérifier que, pour tout $w \in \mathbb{C}$, on a

$$\max_{0 \leqslant \lambda_1,\ldots,\lambda_d \leqslant n} \mathrm{Log}\left|\frac{d^n}{dz^n}f_1^{\lambda_1}\cdots f_d^{\lambda_d}(w)\right| << n\,\mathrm{Log}\, n \quad \text{pour} \quad n \to +\infty .$$

3) Soient $f_1,\ldots,f_d$ des fonctions entières, algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, d'ordre inférieur ou égal à $\rho_1,\ldots,\rho_d$ respectivement. Soient $k_1,\ldots,k_m$ des entiers rationnels, deux à deux distincts, tels que

$$\frac{d^n}{dz^n}f_i(k_j) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout} \quad (n,i,j) \in \mathbb{N}^3 \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant u \; , \; 1 \leqslant j \leqslant m .$$

Montrer que

$$(d-1)m \leqslant \rho_1+\ldots+\rho_d$$

(Reprendre la démonstration de l'exercice 3.3.c)

4) En déduire que, si f est une fonction entière transcendante d'ordre $\leqslant \rho$, et si $m \in \mathbb{N}$ est tel que

$$\frac{d^n}{dz^n}f(j) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout} \quad (n,j) \in \mathbb{N}^2 \quad , \quad 1 \leqslant j \leqslant m ,$$

alors

$$m \leqslant \rho .$$

(On peut arriver au même résultat par une méthode entièrement différente [Straus, 1949, théorème 1] ; d'autre part, pour tout réel $w > 0$, on peut construire une fonction entière transcendante g , admettant w pour période, et telle que

$$\frac{d^n}{dz^n} g(0) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N} ;$$

cf. [Mahler, 1971] ; par conséquent, si on choisit pour w un nombre rationnel, une telle fonction g n'est pas d'ordre fini).