CHAPITRE 4

Type de transcendance

Dans les deux méthodes de transcendance étudiées précédemment, la conclusion s'obtenait toujours en utilisant, pour un corps de nombres, l'inégalité fondamentale (1.2.3) :

$$-2[K:\mathbb{Q}].s(\alpha) \leqslant \operatorname{Log}|\alpha| \ ,$$

pour tout $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$.

Pour obtenir des résultats d'indépendance algébrique, nous considérerons des extensions de $\mathbb{Q}$ de type fini, et nous supposerons qu'elles vérifient une inégalité du même genre.

§4.1 Définition du type de transcendance, et énoncé d'un premier résultat

Rappelons que, si $P \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_q]$ est un polynôme non nul de degré

$$\deg_{X_i} P = r_i$$

par rapport à X_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$, et de hauteur $H(P)$ (la hauteur de P est le maximum des valeurs absolues des coefficients de P), on définit la *taille* de P par

$$t(P) = \max\{\operatorname{Log} H(P) \ ; \ 1+r_1,\dots,1+r_q\}$$

(voir §1.2).

Soient K un sous-corps de $\mathbb{C}$, et $\tau \geqslant 1$ un nombre réel. On dit que K *a un type de transcendance inférieur ou égal à* τ *sur* $\mathbb{Q}$ si K a un degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ fini, et s'il existe une base de transcendance $(x_1,\dots,x_q)$ de K sur $\mathbb{Q}$ telle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$, $\alpha \neq 0$, on ait

$$(4.1.1) \qquad - (t(\alpha))^{\tau} \ll \operatorname{Log}|\alpha| .$$

(La constante $\ll$ dépend de $K, x_1,\dots,x_q, \tau$, mais non de α).

Si K a un type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbb{Q}$ et un degré de transcendance q sur $\mathbb{Q}$, alors on a

$$\tau \geqslant q+1 .$$

Ceci se voit en utilisant le principe des tiroirs de Dirichlet (voir exercice 1.3.f).

Si τ est un nombre réel, $1 \leqslant \tau < 2$, alors un corps K a un type de transcendance sur $\mathbb{Q}$ inférieur ou égal à τ si et seulement si K est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$.

Nous démontrerons, pour commencer, un premier résultat d'indépendance algébrique concernant les valeurs de la fonction exponentielle, en utilisant une extension de la méthode de Schneider.

Théorème 4.1.2. *Soient $\tau > 1$ un nombre réel et K un sous-corps de $\mathbb{C}$, de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbb{Q}$. Soient $u_1,\dots,u_n$ (resp. $v_1,\dots,v_m$) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.*

Si

$$mn \geqslant \tau(m+n) ,$$

alors l'un au moins des nombres

$$\exp(u_i v_j) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n , 1 \leqslant j \leqslant m)$$

est transcendant sur K .

Quand K est le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (ou le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques), l'hypothèse

$$\text{il existe } \tau > 1 \text{ tel que } mn \geqslant \tau(m+n)$$

s'écrit simplement

$$mn > m+n\ ,$$

c'est-à-dire $(m \geqslant 3\ ,\ n \geqslant 2)$, (ou $m \geqslant 2\ ,\ n \geqslant 3$) (on peut choisir par exemple $\tau = \frac{6}{5}$) ; on obtient alors (2.2.3) comme corollaire.

La démonstration du théorème 4.1.2 est particulièrement facile dans le cas où on ne considère que des extensions transcendantes pures $\mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_q)$ de $\mathbb{Q}$, où $x_1,\ldots,x_q$ vérifient 4.1.1 (voir par exemple [Lang, T., chap.V §1] pour le cas $q=1$).

Pour démontrer le cas général, il est utile de définir une fonction taille pour des extensions de $\mathbb{Q}$ de type fini. Pour étudier les propriétés de cette taille, nous établirons quelques lemmes auxiliaires qui seront utiles dans les chapitres suivants.

§4.2 Taille sur une extension de $\mathbb{Q}$ de type fini

Soit K une extension de $\mathbb{Q}$ de type fini ; soit $q \geqslant 0$ le degré de transcendance de K sur $\mathbb{Q}$. Soit $(x_1,\dots,x_q)$ une base de transcendance de K sur $\mathbb{Q}$. D'après le théorème de l'élément primitif, il existe $y_1 \in K$ tel que $K = \mathbb{Q}(x_1,\dots,x_q,y_1)$. Le nombre y_1 est algébrique sur $\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_q)$; il est donc racine d'un polynôme P irréductible (mais pas forcément unitaire) sur $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$. Soit $\eta \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$ le coefficient du terme de plus haut degré de P ; alors $y = \eta . y_1$ est entier sur $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$ c'est-à-dire racine d'un polynôme unitaire irréductible à coefficients dans $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$, et on a $K = \mathbb{Q}(x_1,\dots,x_q,y)$.

On voit ainsi que l'anneau $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$ joue par rapport à K le rôle de l'anneau des entiers rationnels par rapport à un corps de nombres (mais $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$ ne se définit pas de façon intrinsèque).

On introduit la définition suivante :

(4.2.1) Systèmes générateurs. Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ de type fini sur $\mathbb{Q}$. Nous dirons que des éléments $x_1,\dots,x_q,y$ forment un système générateur de K sur $\mathbb{Q}$ si

1) $K = \mathbb{Q}(x_1,\dots,x_q,y)$;

2) $x_1,\dots,x_q$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$;

3) y est entier sur $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$.

Alors un élément a de K s'écrit de manière unique (à des facteurs ± 1 près) sous la forme

$$(4.2.2) \qquad a = \sum_{i=1}^{\delta} \frac{Q_i}{R_i} y^{i-1} ,$$

où $\delta = [K : \mathbb{Q}(x_1,\dots,x_q)]$ est le degré de y sur $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$, et, pour tout

$i = 1,\dots,\delta$, Q_i et R_i sont deux éléments de $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$ sans facteurs communs. (L'anneau $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$ est, rappelons le, factoriel [Lang, A., chap.V §6]). On appelle <u>dénominateur de</u> a (par rapport au système générateur $(x_1,\dots,x_q,y)$) le plus petit commun multiple de $R_1,\dots,R_\delta$, dans $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$.

Nous pouvons maintenant définir la taille sur une extension K de $\mathbb{Q}$ de type fini. Soit $x_1,\dots,x_q,y$ un système générateur de K sur $\mathbb{Q}$. Soit $a \in K$, et soit P le dénominateur de a (relatif au système générateur $x_1,\dots,x_q,y$). Alors $Pa \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q,y]$ s'écrit

$$P.a = \sum_{i=1}^{\delta} P_i\, y^{i-1} ,$$

où $P_i \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$ $(1 \leqslant i \leqslant \delta)$.

(Avec les notations (4.2.2), on a $P_i = (\frac{P}{R_i}).Q_i$). On définit <u>la taille de</u> a (relative au système générateur $x_1,\dots,x_q,y$) par

$$t(a) = \max\{t(P) ; t(P_1);\dots;t(P_\delta)\} .$$

Si K est un corps de nombres, un système générateur est formé par un élément $y \in K$, entier sur $\mathbb{Z}$, tel que $K = \mathbb{Q}(y)$; on a défini deux applications de $K^* = K - \{0\}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des nombres réels $x \geqslant 0$: la fonction s ("size", introduite au §1.2), et la fonction t (taille par rapport au système générateur y).

On voit facilement qu'il existe deux constantes c_1 , c_2 , ne dépendant que de y , telles que, pour tout $a \in K$, $a \neq 0$, on ait

(4.2.3) $$s(a) - c_1 \leqslant t(a) \leqslant 2\, s(a) + c_2 \quad \text{(cf. exercice 4.2.a).}$$

La relation 1.2.3 montre qu'il existe une constante $c_K > 0$ telle que

(4.2.4) $$-c_K\, t(\alpha) \leqslant \operatorname{Log}|\alpha| \quad \text{pour tout } \alpha \in K ,\ \alpha \neq 0 .$$

Nous allons généraliser cette relation aux extensions de $\mathbb{Q}$ de type fini et de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbb{Q}$. Nous montrerons que, si K a un type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbb{Q}$, et si L est un sous-corps de K de type fini sur $\mathbb{Q}$, alors il existe une constante $C_L > 0$ (ne dépendant que d'un système générateur de L sur $\mathbb{Q}$, permettant de définir une taille t_L sur L), telle que

$$-C_L(t_L(a))^\tau \leqslant \operatorname{Log}|a| \quad \text{pour tout} \quad a \in L,\ a \neq 0 .$$

On en déduit que K a un type de transcendance inférieur ou égal à τ par rapport à toute base de transcendance, et que tout sous-corps de K a un type de transcendance inférieur ou égal à τ.

Nous commençons par le

<u>Lemme</u> (4.2.5). <u>Soit</u> K <u>une extension de</u> $\mathbb{Q}$ <u>de type fini. Soit</u> $(x_1,\dots,x_q,y)$ <u>un système générateur de</u> K <u>sur</u> $\mathbb{Q}$.

1. <u>Si</u> $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ <u>sont des éléments de</u> $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q,y]$, <u>alors</u>

(4.2.6) $$t(\alpha_1+\dots+\alpha_m) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} t(\alpha_i) + \operatorname{Log} m .$$

2. <u>Il existe une constante</u> $C > 0$, <u>ne dépendant que de</u> $x_1,\dots,x_q,y$, <u>telle que, pour tout</u> $(a_1,\dots,a_m) \in K^m$, <u>on ait</u>

(4.2.7) $$t(a_1+\dots+a_m) \leqslant C(t(a_1)+\dots+t(a_m))$$

(4.2.8) $$t(a_1\dots a_m) \leqslant C(t(a_1)+\dots+t(a_m))$$

3. <u>Si</u> $\alpha \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q,y]$ <u>et</u> $\beta \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$, $\beta \neq 0$, <u>on a</u>

(4.2.9) $$t\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \leqslant C \max(t(\alpha),t(\beta)) .$$

(Comme au §1.2, on laisse le soin au lecteur d'étudier ce qui se passe lorsque certains des nombres concernés s'annulent).

<u>Démonstration du lemme</u>(4.2.5)

1. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ des éléments de $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q,y]$. Il existe des polynômes

$$P_{j,i} \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$$

tels que

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{\delta} P_{j,i}\, y^{i-1} \quad , 1 \leqslant j \leqslant m .$$

On a

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \sum_{i=1}^{\delta}\Big(\sum_{j=1}^{m} P_{j,i}\Big)y^{i-1} ,$$

donc

$$t\Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j\Big) = \max_{1\leqslant i\leqslant \delta} t\Big(\sum_{j=1}^{m} P_{j,i}\Big) .$$

Or, trivialement, on a

$$H\Big(\sum_{j=1}^{m} P_{j,i}\Big) \leqslant m.\sup_{1\leqslant j\leqslant m} H(P_{j,i}) ,$$

et

$$\deg_{x_h}\Big(\sum_{j=1}^{m} P_{j,i}\Big) \leqslant \sup_{1\leqslant j\leqslant m} \deg_{x_h}(P_{j,i}) .$$

On en déduit très facilement (4.2.6).

2. Remarquons déjà que, si P_1, P_2 sont des éléments de $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_q]$, on a

$$\text{(4.2.10)} \qquad H(P_1.P_2) \leqslant H(P_1).H(P_2).\prod_{\ell=1}^{q} (1+\deg_{x_\ell} P_1) ,$$

donc, par récurrence, si $P_1,\dots,P_m$ sont des éléments non nuls de $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_q]$,

$$\text{(4.2.11)} \qquad H(P_1\dots P_m) \leqslant \prod_{i=1}^{m} H(P_i).\prod_{\ell=1}^{q}\prod_{j=1}^{m-1} (1+\deg_{x_\ell} P_j) .$$

Considérons maintenant deux éléments a_1 , a_2 de $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_q,y]$. On peut écrire

$$a_1 = \sum_{i=1}^{\delta} P_i \, y^{i-1} ,$$

et

$$a_2 = \sum_{j=1}^{\delta} Q_j \, y^{j-1} ,$$

où P_i et Q_j $(1 \leqslant i,j \leqslant \delta)$ appartiennent à $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_q]$. Le produit $a_1 a_2$ appartient à $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_q,y]$; il s'écrit donc sous la forme

$$a_1 a_2 = \sum_{k=1}^{\delta} R_k \, y^{k-1} .$$

Pour expliciter $R_1,\ldots,R_\delta$, soient $\pi_{u,\ell} \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_q]$ $(u \geqslant 0 \; , \; \ell = 1,\ldots,\delta)$ tels que

$$y^{\delta+u} = \sum_{\ell=1}^{\delta} \pi_{u,\ell} \, y^{\ell-1} .$$

Alors

$$\begin{aligned} a_1 . a_2 &= \sum_{i=1}^{\delta} \sum_{j=1}^{\delta} P_i \, Q_j \, y^{i+j-2} \\ &= \sum_{k=1}^{2\delta-1} \sum_{i+j=k+1} P_i \, Q_j \, y^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\delta} \sum_{i+j=k+1} P_i \, Q_j \, y^{k-1} + \sum_{u=0}^{\delta-2} \sum_{i+j=\delta+u+2} P_i \, Q_j \, y^{\delta+u} . \end{aligned}$$

Donc

$$R_k = \sum_{i+j=k+1} P_i \, Q_j + \sum_{u=0}^{\delta-2} \sum_{i+j=\delta+u+2} P_i \, Q_j \, \pi_{u,k} ,$$

pour tout entier $k = 1,\ldots,\delta$.

On déduit de (4.2.6) et (4.2.11)

$$t(a_1 . a_2) = \max_{1 \leqslant k \leqslant \delta} t(R_k) \leqslant t(a_1) + t(a_2) + \sum_{\ell=1}^{q} \mathrm{Log}(1 + \max_{1 \leqslant i \leqslant \delta} (\deg_{x_\ell} P_i)) + c_1$$

où c_1 se calcule facilement en fonction de δ et $t(\pi_{u,k})$ $(0 \leqslant u \leqslant \delta-2\,,\, 1 \leqslant k \leqslant \delta)$.

Par récurrence, on obtient

(4.2.12) $$t(a_1 \dots a_m) \leqslant (q+1) \sum_{i=1}^{m} t(a_i) + c_2\,,$$

si $a_1,\dots,a_m$ sont des éléments de $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_q,y]$, et $c_2 = c_1(q+1)$.

Enfin, si $a_1,\dots,a_m$ sont des éléments de K, notons P_i le dénominateur de a_i, et $\alpha_i = a_i P_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

On a

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \prod_{j\neq i} P_j}{\prod_{j=1}^{m} P_j}\,,$$

et

$$\prod_{i=1}^{m} a_i = \frac{\prod_{i=1}^{m} \alpha_i}{\prod_{j=1}^{m} P_j}\,.$$

D'après (4.2.6) et (4.2.12), on a

$$\begin{aligned} t\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \prod_{j\neq i} P_j\Big) &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} t\Big(\alpha_i \prod_{j\neq i} P_j\Big) + \operatorname{Log} m \\ &\leqslant (q+1) \max_{1\leqslant i\leqslant m} \Big[t(\alpha_i) + \sum_{j\neq i} t(P_j)\Big] + \operatorname{Log} m + c_2 \\ &\leqslant (q+1) \sum_{i=1}^{m} t(\alpha_i) + \operatorname{Log} m + c_2\,; \end{aligned}$$

de même

$$t\Big(\prod_{j=1}^{m} \alpha_j\Big) \leqslant (q+1) \sum_{i=1}^{m} t(a_i) + c_2\,,$$

et

$$t\Big(\prod_{j=1}^{m} P_j\Big) \leqslant (q+1) \sum_{i=1}^{m} t(a_i) + c_2\,.$$

Les relations (4.2.7) et (4.2.8) seront donc des conséquences de (4.2.9).

3. Pour démontrer (4.2.9), on considère deux éléments $\alpha \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q,y]$ et $\beta \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$. Soit $P \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$ le dénominateur de $\frac{\alpha}{\beta}$; on a

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\delta} \pi_i\, y^{i-1} \ , \text{ avec } \ \pi_i \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q] \ , \ (1 \leqslant i \leqslant \delta) \ ,$$

et

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{\delta} P_i\, y^{i-1}}{P} = \frac{\sum_{i=1}^{\delta} \pi_i\, y^{i-1}}{\beta} \ ,$$

avec $P_i \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$ $(1 \leqslant i \leqslant \delta)$. On en déduit

$$\pi_i P = P_i \beta \ , \ (1 \leqslant i \leqslant \delta) \ ,$$

donc P divise β et P_i divise π_i (dans $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$): il existe $Q \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$ tel que

$$\beta = PQ \ , \text{ et } \ \pi_i = P_i Q \ , \ (1 \leqslant i \leqslant \delta) \ .$$

Il suffit donc que l'on établisse le résultat suivant :

si P et Q sont deux éléments non nuls de $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$, on a

$$t(P) \leqslant t(PQ) + \sum_{i=1}^{q} . \deg_{X_i}(PQ) \ . \tag{4.2.13}$$

Cette inégalité fait l'objet du lemme suivant

Lemme (4.2.14). Soient $P_1,\dots,P_m$ des éléments de $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_q]$, et soit n_j le degré de $P_1\dots P_m$ par rapport à X_j $(1 \leqslant j \leqslant q)$. On suppose $n_j \geqslant 1$ pour tout $j = 1,\dots,q$.

Alors on a

$$\|P_1\dots P_m\| \geqslant 2^{-n+\frac{q}{2}} . \|P_1\| \dots \|P_m\| \ ,$$

avec $n = n_1+\dots+n_q$.

Les inégalités

$$e^x > \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.2^x \quad \text{pour} \quad x \geqslant 1$$

et (1.2.7) :

$$H(P) \leqslant \|P\| \leqslant H(P).\prod_{k=1}^{q} (1+\deg_{X_k} P)^{\frac{1}{2}}$$

montrent que l'on a, à plus forte raison, (et sans supposer $n_j \geqslant 1$ pour $j = 1,\ldots,q$) :

$$H(P_1\ldots P_m) \geqslant e^{-n}.H(P_1)\ldots H(P_m) ,$$

d'où on déduit (4.2.13).

Notons que, dans l'autre sens, on obtient facilement (voir 4.2.10)

$$H(P_1\ldots P_m) \leqslant H(P_1)\ldots H(P_m).\prod_{i=1}^{q} (\deg_{X_i}(P_1\ldots P_m))^{m-1} .$$

<u>Démonstration du lemme</u> (4.2.14)

L'inégalité à démontrer s'écrit, en utilisant (1.2.6)

$$\int_{H_q} |P(e^{2i\pi u_1},\ldots,e^{2i\pi u_q})|^2 du_1\ldots du_q \geqslant 2^{-2n+q}.\prod_{k=1}^{m} \int_{H_q} |P_k(e^{2i\pi u_1},\ldots,e^{2i\pi u_q})|^2 du_1\ldots du_q ,$$

où $P = P_1\ldots P_m$.

Examinons pour commencer le cas $q = 1$.

Quitte à diviser chaque P_j par une puissance convenable de l'inconnue X , on peut supposer, sans perte de généralité, $P(0) \neq 0$.

On remarque que, si z , α , β sont des nombres complexes vérifiant

$$|z| = 1 , \alpha \neq 0 , \text{ et } \beta = \frac{\alpha}{|\alpha|} ,$$

alors on a

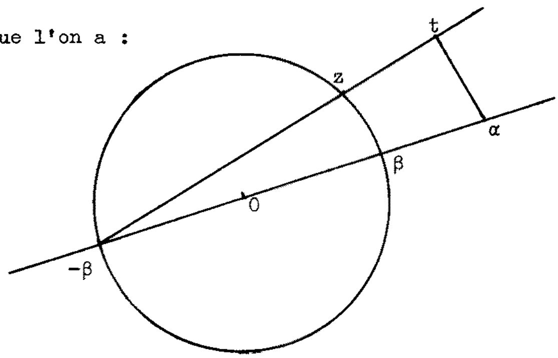
$$|z-\alpha| \geqslant (1+|\alpha|).\frac{|z-\beta|}{2} . \tag{4.2.15}$$

(Le cas $z = \pm\beta$ est trivial ; sinon, notons t la projection orthogonale de α sur la droite $(-\beta, z)$; on constate que l'on a :

$$|z-\alpha| \geqslant |t-\alpha|$$

$$\left|\frac{t-\alpha}{\beta+\alpha}\right| = \frac{1}{2}\,|z-\beta|$$

$$|\beta+\alpha| = 1 + |\alpha|).$$



D'autre part, si $R \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $R(0) \neq 0$, on peut écrire R sous la forme

$$R(X) = \sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k = a_r \prod_{j=1}^{r} (X-\alpha_j) \ ,$$

avec

$$r = \deg R \ , \ a_r \neq 0 \ , \text{ et } \ \alpha_j \neq 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant r).$$

D'après (4.2.15), si on note $\beta_j = \dfrac{\alpha_j}{|\alpha_j|}$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$, on a, pour $|z| = 1$,

$$|R(z)| = |a_r| . \prod_{j=1}^{r} |z-\alpha_j| \geqslant |a_r| . \prod_{j=1}^{r} (1+|\alpha_j|) . \prod_{k=1}^{r} \frac{|z-\beta_k|}{2}$$

(4.2.16)
$$|R(z)| \geqslant \sup_{|y|=1} |R(y)| . \prod_{j=1}^{r} \frac{|z-\beta_j|}{2} \ .$$

Utilisons (4.2.16) pour $P_1,\dots,P_m$ successivement ; en notant $v_1,\dots,v_n$ les racines de P , on obtient, pour $|z| = 1$:

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^{m} |P_k(z)| \geqslant 2^{-n} . \prod_{j=1}^{n} \left|z - \frac{v_j}{|v_j|}\right| . \prod_{k=1}^{m} \max_{|y|=1} |P_k(y)| \ .$$

Le polynôme

$$Q(X) = \prod_{j=1}^{n} \left(X - \frac{v_j}{|v_j|}\right) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, X^k$$

vérifie

$$\|Q\| \geqslant \sqrt{2} ,$$

car $|b_0| = b_n = 1$, et $n \geqslant 1$. D'où, en utilisant (1.2.6) :

$$\int_0^1 \prod_{j=1}^{n} \left|e^{2i\pi x} - \frac{v_j}{|v_j|}\right|^2 dx \geqslant 2 .$$

On obtient ainsi

$$(4.2.17) \qquad \|P\|^2 = \int_0^1 |P(e^{2i\pi u})|^2 du \geqslant 2^{1-2n} . \prod_{k=1}^{m} \max_{|y|=1} |P_k(y)|^2 .$$

D'après (1.2.8), on a

$$\|P_k\| \leqslant \max_{|y|=1} |P_k(y)| ,$$

donc l'inégalité (4.2.14) est démontrée dans le cas $q=1$.

Le cas général va se démontrer par récurrence. Soient $P_1,\dots,P_m$ des éléments de $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_q]$, et soit $P = P_1 \dots P_m$.

Remarquons déjà que, si $x_1,\dots,x_{s-1}$, $x_{s+1},\dots,x_q$ sont des nombres complexes, on a, d'après (4.2.17)

$$(4.2.18) \quad \int_0^1 |P(x_1,\dots,x_{s-1},e^{2i\pi u},x_{s+1},\dots,x_q)|^2 du \geqslant$$

$$\geqslant 2^{1-2n_s} . \prod_{k=1}^{m} \int_0^1 |P_k(x_1,\dots,x_{s-1},e^{2i\pi u},x_{s+1},\dots,x_q)|^2 du ,$$

avec $n_s = \deg_{X_s} P$.

L'hypothèse de récurrence est la suivante : il existe un entier s , $1 \leqslant s \leqslant q-1$, tel que l'on ait, pour tout $(x_1,\dots,x_s) \in \mathbb{C}^s$,

$$(4.2.19) \quad \int_{H_{q-s}} |P(x_1,\dots,x_s,e^{2i\pi u_{s+1}},\dots,e^{2i\pi u_q})|^2 du_{s+1}\dots du_q \geqslant$$

$$\geqslant 2^{q-s-2\sum_{\nu=s+1}^{q} n_\nu} . \prod_{k=1}^{m} \int_{H_{q-s}} |P_k(x_1,\dots,x_s,e^{2i\pi u_{s+1}},\dots,e^{2i\pi u_q})|^2 du_{s+1}\dots du_q .$$

Cette relation est vraie au rang $s = q-1$, d'après (4.2.18) ; supposons la vraie au rang s (avec $2 \leqslant s \leqslant q-1$) et démontrons la au rang $s-1$. On intègre les deux membres de (4.2.19) sur le cercle unité $x_s = e^{2i\pi u_s}$, $0 \leqslant u_s \leqslant 1$. On obtient, grâce à (4.2.18) :

$$\int_0^1 \int_{H_{q-s}} |P(x_1,\dots,x_{s-1},e^{2i\pi u_s},\dots,e^{2i\pi u_q})|^2 du_s\, du_{s+1}\dots du_q \geqslant$$

$$\geqslant 2^{q-s-2\sum_{\nu=s+1}^{q} n_\nu} \cdot \int_0^1 \prod_{k=1}^{m} \int_{H_{q-s}} |P_k(x_1,\dots,x_{s-1},e^{2i\pi u_s},\dots,e^{2i\pi u_q})|^2 du_s\dots du_q$$

$$\geqslant 2^{q-s-2\sum_{\nu=s+1}^{q} n_\nu} \cdot 2^{1-2n_s} \cdot \prod_{k=1}^{m} \int_0^1 \int_{H_{q-s}} |P_k(x_1,\dots,x_{s-1},e^{2i\pi u_s},\dots,e^{2i\pi u_q})|^2 du_s\dots du_q$$

ce qui établit la formule de récurrence (4.2.19) au rang $s-1$.

La démonstration du lemme (4.2.14) est donc terminée (donc aussi celle du lemme 4.2.5).

Nous poursuivons maintenant notre étude des propriétés de la taille ; le lemme suivant nous permettra de ramener certains problèmes au cas d'extensions transcendantes pures.

<u>Lemme</u> 4.2.20. <u>Soit</u> K <u>un sous-corps de</u> $\mathbb{C}$, <u>de type fini sur</u> $\mathbb{Q}$. <u>Soit</u> $(x_1,\dots,x_q,y)$ <u>un système générateur de</u> K <u>sur</u> $\mathbb{Q}$. <u>Il existe une constante</u> $C > 0$, <u>ne dépendant que de</u> $x_1,\dots,x_q,y$, <u>ayant la propriété suivante.</u>

<u>Soit</u> $a \in K$, $a \neq 0$. <u>Soit</u> P <u>le dénominateur de</u> a (<u>par rapport au système générateur</u> $x_1,\dots,x_q,y$).

<u>Soit</u> $\pi \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$ <u>la norme</u> (<u>de</u> K <u>sur</u> $\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_q)$) <u>de</u> $P.a$.

<u>On a</u> :

$$t(\pi) \leqslant C.t(a) \quad \underline{\text{et}} \quad \mathrm{Log}|\pi| \leqslant \mathrm{Log}|a| + Ct(a) .$$

(Dans les applications de ce lemme, $|a|$ sera très petit, et $t(a)$ ne sera pas trop grand, disons $t(a) \leqslant -\frac{1}{2C} \operatorname{Log}|a|$; ainsi $|\pi|$ sera très petit : $\operatorname{Log}|\pi| \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{Log}|a|$).

<u>Démonstration</u>

Soit $\delta = [K : \mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_q)]$; notons $y_1,\ldots,y_\delta$ les différents conjugués de y sur $\mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_q)$ (avec $y_1 = y$ par exemple). On peut écrire

$$Pa = \sum_{i=1}^{\delta} P_i\, y^{i-1} ,$$

où $P_1,\ldots,P_\delta$ appartiennent à $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_q]$. Alors

$$\pi = \prod_{i=1}^{\delta} \Big(\sum_{j=1}^{\delta} P_j\, y_i^{j-1}\Big) = P.a . \prod_{i=2}^{\delta} \Big(\sum_{j=1}^{\delta} P_j\, y_i^{j-1}\Big) .$$

La majoration de $t(\pi)$ se déduit alors du lemme 4.2.5, et la relation

$$\pi \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_q]$$

provient du fait que l'anneau $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_q]$ est intégralement clos. [Lang, A, chap.IX, prop.6].

Enfin la majoration de $\operatorname{Log}|\pi|$ est une conséquence de l'inégalité triviale

(4.2.21) $\qquad \operatorname{Log}|\alpha| \leqslant c.t(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_q,y]$, $\alpha \neq 0$.

Nous montrons maintenant que la taille ne dépend pas (à une constante près) du système générateur choisi.

<u>Lemme</u> 4.2.22. <u>Soient</u> $K_1 \subset K_2$ <u>deux extensions de</u> $\mathbb{Q}$ <u>de type fini</u>, $(x_1,\ldots,x_{q_1},y)$ (<u>resp</u>. $(\xi_1,\ldots,\xi_{q_2},\eta)$) <u>un système générateur de</u> K_1 (<u>resp</u>. K_2) <u>sur</u> $\mathbb{Q}$, <u>et</u> t_1 (<u>resp</u>. t_2) <u>la taille sur</u> K_1 (<u>resp</u>. K_2) <u>définie à partir de ce système générateur</u>.

<u>Il existe une constante</u> $c > 0$ <u>telle que, pour tout élément non nul</u> a <u>de</u> K_1, <u>on ait</u>

$$\frac{1}{c}\, t_1(a) \leqslant t_2(a) \leqslant c\, t_1(a)\ .$$

Démonstration

1) On démontre l'inégalité $t_2 \ll t_1$ d'abord pour un monôme $p.x_1^r$ ($p \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$, $r \geqslant 0$), puis pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$ (en utilisant le lemme 4.2.5), enfin pour tout élément non nul de K_1. Les détails, faciles, sont laissés au lecteur ; cf. [Waldschmidt, 1972, a, lemme 2.3].

2) D'après la relation $t_2 \ll t_1$, il suffit, pour démontrer que $t_1 \ll t_2$, d'étudier le cas

$$x_\ell = \xi_\ell \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant \ell \leqslant q_1\ .$$

Soit

$$a = \sum_{i=1}^{\delta} R_i\, y^{i-1} \in K_1\ ,\ R_i \in \mathbb{Q}(x_1,\dots,x_{q_1})\ ;$$

on a

$$t_2(R_i) = t_1(R_i)\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant \delta\ ,$$

donc

$$t_1(a) \ll \max_{1\leqslant i\leqslant\delta} t_2(R_i)\ .$$

Soient $\sigma_1,\dots,\sigma_\delta$ les différents $\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_q)$-isomorphismes de K_1 dans une clôture algébrique Ω de K_2 (grâce à la relation $t_2 \ll t_1$, il n'y a pas de restriction à supposer $\sigma_j(K_1) \subset K_2$ pour $1 \leqslant j \leqslant \delta$) ; comme la matrice

$$(\sigma_i y^{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant\delta}$$

est inversible, on a

$$\max_{1\leqslant i\leqslant\delta} t_2(R_i) \ll \max_{1\leqslant j\leqslant\delta} t_2(\sigma_j(a))\ .$$

Pour tout $j = 1,\dots,\delta$, σ_j se prolonge en un homomorphisme σ'_j de K_2 dans Ω ; on a alors

$$t_1(a) \ll \max_{1\leqslant j\leqslant\delta} t_2(\sigma_j(a)) = \max_{1\leqslant j\leqslant\delta} t_2(\sigma'_j(a)) \ll t_2(a) ,$$

ce qui démontre le lemme 4.2.22.

On déduit des lemmes 4.2.20 et 4.2.22 le

Lemme 4.2.23. *Soit* K *un sous-corps de* $\mathbb{C}$, *de type de transcendance inférieur ou égal à* τ *sur* $\mathbb{Q}$ *(avec* $\tau \geqslant 1$). *Soit* L *un sous-corps de* K , *de type fini sur* $\mathbb{Q}$; *soit* $(x_1,\dots,x_q,y)$ *un système générateur de* L *sur* $\mathbb{Q}$; *on note* t_L *la taille définie sur* L *à partir de ce système générateur. Il existe une constante* C_L , *ne dépendant que de* $x_1,\dots,x_q,y$, *telle que, pour tout élément non nul* a *de* L , *on ait*

$$-C_L.(t_L(a))^\tau \leqslant \operatorname{Log}|a| .$$

Toutes les propriétés que nous avions annoncées concernant le type de transcendance sont maintenant démontrées.

§4.3 Un lemme de Siegel pour les extensions de type fini

Nous aurons besoin d'une variante du lemme de Siegel, concernant les extensions de $\mathbb{Q}$ de type fini.

Lemme 4.3.1. *Soit K une extension de $\mathbb{Q}$ de type fini. Soit $(x_1,\ldots,x_q,y)$ un système générateur de K sur $\mathbb{Q}$. Il existe une constante $C>0$ ayant la propriété suivante.*

Soient n et r deux entiers rationnels, $n \geqslant 2r > 0$ et $a_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant n,$ $1 \leqslant j \leqslant r)$ des éléments de l'anneau $A = \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_q,y]$.

Il existe des éléments $\xi_1,\ldots,\xi_n$ de A, non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\,\xi_i = 0 \quad \text{pour} \quad j = 1,\ldots,r\ ;$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} t(\xi_i) \leqslant C\,[\max_{i,j} t(a_{i,j}) + \operatorname{Log} n]\ .$$

Démonstration

Commençons par nous ramener au cas où

$$y \in A_0 = \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_q]\ .$$

Pour cela, notons

$$\delta = [K : \mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_q)]\ .$$

En écrivant $\xi_1,\ldots,\xi_n$ dans $A = A_0[y]$, nous introduisons les nouvelles inconnues

$$\eta_{i,\ell}\ ,\ (1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ 1 \leqslant \ell \leqslant \delta)\ ,$$

avec

$$\xi_i = \sum_{\ell=1}^{\delta} \eta_{i,\ell}\, y^{\ell-1}\ ,\ (1 \leqslant i \leqslant n)\ ,$$

et $\eta_{i,\ell} \in \mathbf{A}_o$. De même écrivons les coefficients $a_{i,j}$ sous la forme

$$a_{i,j} = \sum_{h=1}^{\delta} b_{i,j,h}\, y^{h-1} \ , \ (1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 1 \leqslant j \leqslant r) \ ,$$

avec $b_{i,j,h} \in \mathbf{A}_o$.

Pour $u \geqslant 0$ entier et $k = 1,\dots,\delta$, on définit des éléments $\pi_{u,k}$ de $\mathbf{A}_o$ par les relations

$$y^{\delta+u} = \sum_{k=1}^{\delta} \pi_{u,k}\, y^{k-1} \ ;$$

le système d'équations

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, x_i = 0 \ , \ (1 \leqslant j \leqslant r)$$

s'écrit alors

$$\sum_{i=1}^{n} L_{i,j,k} = 0 \ , \ (1 \leqslant j \leqslant r \ , \ 1 \leqslant k \leqslant \delta) \ ,$$

avec

$$L_{i,j,k} = \sum_{h+\ell=k+1} b_{i,j,h}\, \eta_{i,\ell} + \sum_{u=0}^{\delta-2} \ \sum_{h+\ell=\delta+u+2} \pi_{u,k}\, b_{i,j,h}\, \eta_{i,\ell}$$

(voir la démonstration de 4.2.12).

Les $L_{i,j,k}$ $(1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 1 \leqslant j \leqslant r \ , \ 1 \leqslant k \leqslant \delta)$ sont des formes linéaires en $\eta_{i,\ell}$ $(1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 1 \leqslant \ell \leqslant \delta)$, à coefficients dans $\mathbf{A}_o$, ces coefficients ayant une taille majorée par

$$c_1 \max_{i,j} t(a_{i,j}) \ .$$

<u>Il suffit donc que l'on démontre le lemme</u> 4.3.1 <u>dans le cas</u> $\delta = 1$ <u>et</u> $\mathbf{A} = \mathbf{A}_o$.

Les coefficients $a_{i,j}$ appartiennent à $\mathbf{A}_o = \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$; écrivons les

$$a_{i,j} = \sum_{\ell_1=0}^{d_1-1} \cdots \sum_{\ell_q=0}^{d_q-1} a_{i,j,(\ell)}\, x_1^{\ell_1} \cdots x_q^{\ell_q} \ , \ (1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 1 \leqslant j \leqslant r) \ ,$$

où $(\ell) = (\ell_1,\dots,\ell_q)$, et $a_{i,j,(\ell)} \in \mathbb{Z}$.

Soit c_2 un entier vérifiant

$$c_2 \geqslant \left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{q}} - 1\right)^{-1} .$$

Introduisons les nouvelles inconnues

$$\xi_{i,(\lambda)} \in \mathbb{Z} , \ (1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 0 \leqslant \lambda_h \leqslant c_2 d_h - 1 \ , \ 1 \leqslant h \leqslant q) ,$$

définies par

$$\xi_i = \sum_{\lambda_1=0}^{c_2 d_1 - 1} \cdots \sum_{\lambda_q=0}^{c_2 d_q - 1} \xi_{i,(\lambda)} \, x_1^{\lambda_1} \cdots x_q^{\lambda_q} \ , \ (1 \leqslant i \leqslant n) .$$

Le système devient alors

$$\sum_{i=1}^{n} \ \sum_{\lambda_1+\ell_1=\Lambda_1} \cdots \sum_{\lambda_q+\ell_q=\Lambda_q} a_{i,j,(\ell)} \, \xi_{i,(\lambda)} = 0 \ ,$$

pour $0 \leqslant \Lambda_k \leqslant (c_2+1)d_k - 1$, $(1 \leqslant k \leqslant q)$, $1 \leqslant j \leqslant r$.

On obtient un système de

$$(c_2+1)^q d_1 \dots d_q r$$

équations à

$$c_2^q d_1 \dots d_q n$$

inconnues, à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Remarquons que

$$c_2^q d_1 \dots d_q n \geqslant \tfrac{4}{3} \, (c_2+1)^q d_1 \dots d_q r .$$

Le lemme 1.3.1 (avec $K = \mathbb{Q}$, $\delta = 1$) montre qu'il existe une solution $\xi_{i,(\lambda)}$ non triviale vérifiant

$$\operatorname{Log} \max_{i,(\lambda)} |\xi_{i,(\lambda)}| \leqslant 3.\operatorname{Log} c_2^q d_1 \dots d_q + 3 \max_{i,j} t(a_{i,j}) .$$

On en déduit le lemme 4.3.1.

§4.4 <u>Démonstration du théorème</u> 4.1.2

Soient $\tau > 1$ un nombre réel, et $u_1,\dots,u_n$ (resp. $v_1,\dots,v_m$) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Soit K le corps obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}$ les mn nombres

$$\exp(u_i v_j) \ , \ (1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 1 \leqslant j \leqslant m) \ .$$

D'après le lemme 4.2.23, il suffit que l'on montre que, si K a un type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbb{Q}$, alors

$$mn < \tau(m+n) \ .$$

Comme $\tau > 1$, il n'y a pas de restriction à supposer

$$mn > m+n \ . \tag{4.4.1}$$

Soit $(x_1,\dots,x_q,y)$ un système générateur de K sur $\mathbb{Q}$. On note A l'anneau $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q,y]$. Soit N un entier suffisamment grand.

Montrons qu'<u>il existe un polynôme non nul</u>

$$P_N \in A[X_1,\dots,X_n] \ ,$$

<u>de degré inférieur à</u> $2N^m$ <u>par rapport à</u> X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, <u>et dont les coefficients ont une taille majorée par</u>

$$t(\text{coefficients}) \ll N^{m+n} \ , \tag{4.4.2}$$

<u>tel que la fonction</u>

$$F_N(z) = P_N(e^{u_1 z},\dots,e^{u_n z})$$

<u>vérifie</u>

$$F_N(k_1 v_1 + \dots + k_m v_m) = 0 \quad \text{pour} \quad k_j = 1,\dots,N^n \ (1 \leqslant j \leqslant m) \ . \tag{4.4.3}$$

Notons ∂ le produit des dénominateurs - par rapport à $(x_1,\dots,x_q,y)$ - des éléments

$$e^{u_i v_j}\ ,\ (1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$$

de K . Considérons le système d'équations en $p_N(\ell_1,\dots,\ell_n) \in A$, $(0 \leqslant \ell_i < 2N^m$, $1 \leqslant i \leqslant n)$

$$\sum_{(\ell)} p_N(\ell) \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} [(\partial.e^{u_i v_j})^{\ell_i k_j} . \partial^{N^{m+n}-\ell_i k_j}] = 0\ ,\ \text{pour}\ \ k_j = 1,\dots,N^n\ (1 \leqslant j \leqslant m)\ .$$

C'est un système de $N^{m.n}$ équations à $(2N^m)^n$ inconnues, à coefficients dans A , la taille de ces coefficients étant majorée par

$$t(\text{coefficients}) << N^{n+m}\ ,$$

grâce au lemme 4.2.5.

On a supposé $n \geqslant 2$ (4.4.1). Le lemme 4.3.1 montre qu'il existe une solution

$$p_N(\ell_1,\dots,\ell_n) \in A\ ,$$

non triviale, telle que

$$\max_{(\ell)} t(p_N(\ell)) << N^{m+n}\ .$$

Le polynôme

$$P_N = \sum_{(\ell)} p_N(\ell)\ X_1^{\ell_1}\dots X_n^{\ell_n}$$

fournit le résultat annoncé.

La fonction F_N ainsi construite n'est pas nulle (grâce à l'indépendance linéaire de $u_1,\dots,u_n$). Cette fonction est entière, d'ordre inférieur ou égal à 1 ; la condition $m \geqslant 2$ (qui résulte de l'hypothèse 4.4.1) montre que l'un des nombres

$$F_N(h_1 v_1 +\dots+ h_m v_m)\ ,\ h_j \in \mathbb{Z}\ ,\ h_j \geqslant 1\ (1 \leqslant j \leqslant m)$$

est non nul (cf (1.5.4)).

<u>Nous noterons</u> M <u>le plus grand entier tel que</u>

(4.4.4) $$F_N(k_1v_1 +\dots+ k_mv_m) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k_j \leqslant M^n \ (1 \leqslant j \leqslant m) ;$$

grâce à (4.4.3), on aura $M \geqslant N$; de plus <u>il existe des entiers rationnels</u> $h_1,\dots,h_m$ <u>avec</u> $1 \leqslant h_j \leqslant (M+1)^n$, $(1 \leqslant j \leqslant m)$, <u>tels que</u>

(4.4.5) $$\gamma_N = F_N(h_1v_1 +\dots+ h_mv_m) \neq 0 .$$

Pour majorer $|\gamma_N|$, notons $w_1,\dots,w_Q$ les nombres

$$k_1v_1 +\dots+ k_mv_m , \ 1 \leqslant k_j \leqslant M^n \ (1 \leqslant j \leqslant m) .$$

A cause de l'indépendance linéaire de $v_1,\dots,v_m$, on a

$$Q = M^{mn} .$$

Notons d'autre part

$$w_o = h_1v_1 +\dots+ h_mv_m ,$$

de telle manière que (4.4.5) s'écrive

$$\gamma_N = F_N(w_o) ;$$

grâce à (4.4.4), la fonction

$$F_N(z).\prod_{i=1}^{Q} (z-w_i)^{-1}$$

est entière dans $\mathbb{C}$. On lui applique le principe du maximum sur le disque de centre 0 et de rayon

$$R = M^{mn-m} .$$

L'hypothèse 4.4.1 entraîne $R > M^n$. On obtient

$$|\gamma_N| = |F_N(w_o)| \leqslant |F_N|_R \cdot \sup_{|t|=R} \prod_{h=1}^{Q} \left|\frac{w_o - w_h}{t - w_h}\right| .$$

Or on a d'une part (en utilisant 4.4.2)

$$\mathrm{Log}|F_N|_R \ll N^{m+n} + N^m R \ll M^{mn} = Q ,$$

et, d'autre part, pour $|t| = R$,

$$\mathrm{Log} \left|\frac{w_o - w_h}{t - w_h}\right| < - \frac{mn-m-n}{2} \mathrm{Log}\, M , \quad (1 \leqslant h \leqslant Q) .$$

Donc

$$\mathrm{Log} \sup_{|t|=R} \prod_{h=1}^{Q} \left|\frac{w_o - w_h}{t - w_h}\right| < - \frac{mn-m-n}{2} Q \,\mathrm{Log}\, M ,$$

et, pour N suffisamment grand,

$$\mathrm{Log}|\gamma_N| \leqslant - \frac{mn-m-n}{3} Q \,\mathrm{Log}\, M .$$

On utilisera cette inégalité sous la forme

(4.4.6) $$\mathrm{Log}|\gamma_N| \ll - M^{mn} \,\mathrm{Log}\, M .$$

Pour majorer la taille de γ_N , on remarque déjà que

$$\mu_N = \partial^{2mnN^m.(M+1)^n} . \gamma_N \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q,y] .$$

On utilise (4.2.6) pour majorer la taille de μ_N :

$$t(\mu_N) \leqslant \mathrm{Log}(2N^m)^n + \max_{(\ell)} t(p_N(\ell).\partial^{2mnN^m(M+1)^n} \times \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (e^{u_i v_j})^{\ell_i h_j}) .$$

Maintenant, d'après (4.2.8), on a

$$t(p_N(\ell).\partial^{2mnN^m(M+1)^n} . \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (e^{u_i v_j})^{\ell_i h_j}) \ll M^{m+n} .$$

D'où

$$t(\mu_N) \ll M^{m+n} ;$$

comme on a également

$$t(\partial^{2mnN^m(M+1)^n}) \ll M^{m+n} ,$$

on déduit de (4.2.9) la majoration attendue

$$(4.4.7) \qquad t(\gamma_N) \ll M^{m+n} .$$

Si K a un type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbb{Q}$, le lemme 4.2.23 montre que l'on a

$$-t(\gamma_N)^{\tau} \ll \operatorname{Log}|\gamma_N| \quad \text{pour} \quad N \to +\infty ,$$

donc

$$(4.4.8) \qquad -M^{\tau(m+n)} \ll -M^{mn} \operatorname{Log} M \text{ pour } M \to +\infty$$

(à cause de 4.4.6, 4.4.7 et de l'inégalité $M \geqslant N$). On en déduit

$$mn < \tau(m+n) .$$

§4.5 Indépendance algébrique des valeurs de fonctions méromorphes

On peut étendre le théorème 4.1.2 en un critère de dépendance algébrique de fonctions méromorphes, qui généralise 2.2.1.

Théorème 4.5.1. *Soient* $\tau > 1$ *et* $\ell > 0$ *deux nombres réels, et* K *un sous-corps de* $\mathbb{C}$ *, de type fini sur* $\mathbb{Q}$ *et de type de transcendance inférieur ou égal à* τ *sur* $\mathbb{Q}$ *. Soient* $f_1,\ldots,f_d$ *des fonctions méromorphes, algébriquement indépendantes sur* K *. Soit* $(S_N)_{N\geq 0}$ *une suite de sous-ensembles finis de* $\mathbb{C}$ *, tels que*

$$\operatorname{Card} S_N \gg N^{\ell}\text{ , et } \max_{z\in S_N} |z| \ll N \text{ pour } N \to +\infty .$$

On suppose que, pour tout $i = 1,\ldots,d$ *, il existe une fonction* h_i *entière, d'ordre inférieur ou égal à* ρ_i *, sans zéros dans*

$$\bigcup_N S_N ,$$

telle que $h_i f_i$ *soit entière d'ordre inférieur ou égal à* ρ_i *, et que l'on ait*

$$f_i(S_N) \subset K \text{ ; } \max_{z\in S_N} t(f_i(z)) \ll N^{\rho_i} \text{ , et}$$

$$\max_{z\in S_N} \operatorname{Log}\left|\frac{1}{h_i(z)}\right| \ll N^{\rho_i} \qquad (1 \leqslant i \leqslant d) .$$

Alors on a

$$(d-\tau)\ell < \tau(\rho_1+\ldots+\rho_d) .$$

On obtient comme corollaire le théorème 4.1.2, en choisissant

$$f_i(z) = \exp u_i z \text{ , } (1 \leqslant i \leqslant d) \text{ , } \rho_1 = \ldots = \rho_d = 1 \text{ ; } d = n \text{ ;}$$

$$S_N = \{k_1v_1+\ldots+k_mv_m \mid -N \leqslant k_j \leqslant N \text{ , } (1 \leqslant j \leqslant m)\} .$$

D'autre part, quand K est un corps de nombres, le théorème 4.5.1 est équivalent au théorème 2.2.1, grâce aux inégalités (4.2.3) entre s et t .

Démonstration du théorème 4.5.1

Supposons les hypothèses du théorème 4.5.1 vérifiées, et soit N un entier suffisamment grand. On définit :

$$R = [N^{\frac{\ell}{d}}] ,$$

et $$R_i = [N^{\frac{\ell}{d}+\rho-\rho_i}] , \ 1 \leqslant i \leqslant d ,$$

où

$$\rho = \frac{\rho_1+\dots+\rho_d}{d} .$$

On remarque tout d'abord qu'on peut supposer $d > \tau$ et

(4.5.2) $$\max_{1\leqslant i\leqslant d} \rho_i < \frac{\ell}{d} + \rho ;$$

(si on avait, par exemple, $\rho_d \geqslant \frac{\ell}{d} + \rho$, il suffirait que l'on démontre l'inégalité

$$(d-1-\tau)\ell < \tau(\rho_1+\dots+\rho_{d-1}) ,$$

en utilisant $f_1,\dots,f_{d-1}$, pour en déduire

$$(d-\tau)\ell < \tau(\rho_1+\dots+\rho_d) \quad).$$

Quitte à remplacer chaque S_N par un de ses sous-ensembles, on peut supposer $\mathrm{Card}\, S_N << N^{\ell}$.

Enfin, comme on a supposé $\tau > 1$, il n'y a pas de restriction à ajouter l'hypothèse

$$\ell > \frac{\rho_1+\dots+\rho_d}{d-1} .$$

Soit $(x_1,\dots,x_q,y)$ un système générateur de K sur $\mathbb{Q}$, et soit $A = \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q,y]$.

Montrons qu'il existe un polynôme non nul

$$P_N \in A[X_1,\dots,X_d] ,$$

<u>de degré par rapport à</u> X_i <u>vérifiant</u>

$$\deg_{X_i} P_N << R_i , \quad (1 \leqslant i \leqslant d) ,$$

<u>et dont les coefficients ont une taille</u> $<< R.N^{\rho}$, <u>tel que la fonction</u>

$$F_N = P_N(f_1,\dots,f_d)$$

<u>vérifie</u>

$$F_N(t) = 0 \quad \underline{\text{pour tout}} \quad t \in S_N .$$

On résoud pour cela le système $d(f_1(t))^{C.R_1}\dots d(f_d(t))^{C.R_d}.F_N(t) = 0$ pour tout $t \in S_N$. Le lemme 4.3.1 permet de trouver un entier $C > 0$ (indépendant de N) et des éléments

$$p_N(\lambda_1,\dots,\lambda_d) \in A , \quad (0 \leqslant \lambda_i \leqslant C.R_i , \ 1 \leqslant i \leqslant d)$$

non tous nuls, vérifiant

$$\max_{(\lambda)} t(p_N(\lambda)) << \sum_{i=1}^{d} R_i.N^{\rho_i} << R.N^{\rho} ,$$

et tels que le polynôme

$$P_N = \sum_{(\lambda)} p_N(\lambda)\, X_1^{\lambda_1}\dots X_d^{\lambda_d}$$

possède la propriété désirée.

D'après (1.5.4), il existe un plus grand entier $M \geqslant N$ tel que

$$F_N(t) = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in S_M .$$

Donc il existe $w_o \in S_{M+1}$, tel que

$$\gamma_N = F_N(w_o) \neq 0 .$$

Pour majorer γ_N , on utilise le principe du maximum sur un disque $|t| = R$, où

$$R = M^{\alpha} ,$$

avec

$$\alpha = \frac{d\ell}{\ell+d\rho} .$$

On a ainsi $\alpha > 1$ et, à cause de (4.5.2),

$$\frac{\ell}{d} + \rho - \rho_i + \alpha\rho_i \leqslant \ell \qquad \text{pour tout} \quad i = 1,\dots,d .$$

On obtient facilement

$$\mathrm{Log}|F_N|_R \ll M^{\ell} ,$$

et

$$|\gamma_N| \leqslant |F_N|_R . \sup_{|z|=R} \prod_{t\in S_M} \left|\frac{w_o - t}{z-t}\right| ,$$

d'où

$$\mathrm{Log}|\gamma_N| \ll - M^{\ell}\,\mathrm{Log}\,M .$$

D'autre part la taille de γ_N vérifie, d'après le lemme 4.2.5 :

$$t(\gamma_N) \ll \sum_{i=1}^{d} R_i \; M^{\rho_i} \ll M^{\frac{\ell}{d}+\rho} .$$

Enfin, le lemme 4.2.23 montre que

$$-t(\gamma_N)^{\tau} \ll \mathrm{Log}|\gamma_N| \quad \text{pour} \quad N \to +\infty ,$$

donc

$$\tau(\tfrac{\ell}{d}+\rho) > \ell ,$$

ce qui démontre le théorème 4.5.1.

§4.6 Références

La notion de "type de transcendance" est due à Lang ; de même la définition de la taille sur une extension $K = \mathbb{Q}(x_1,\dots,x_q,y)$ de $\mathbb{Q}$ de type fini est essentiellement celle de [Lang, T., chap.V §2], avec cependant une différence importante : après avoir défini la taille sur $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q,y]$, Lang dit qu'un élément γ de K a une taille inférieure ou égale à B si γ peut s'écrire comme un quotient

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta} \text{ , avec } \alpha \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q,y] \text{ , } \beta \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$$

$$\text{et} \quad t(\alpha) \leqslant B \text{ , } t(\beta) \leqslant B \text{ .}$$

D'après cette définition, si P et Q sont deux éléments non nuls de $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$, on devrait pouvoir écrire, en utilisant $\alpha = PQ$, $\beta = Q$ et $\gamma = P$,

$$t(P) \leqslant \max(t(PQ),t(Q)) \text{ ,}$$

ce qui n'est pas vrai en général. Mais l'inégalité (4.2.13) nous a permis de remédier à cet inconvénient et de donner une définition cohérente.

Cette inégalité (4.2.13), et la démonstration du lemme (4.2.14), sont dues à Gel'fond [Gel'fond, T., chap.III §4 lemme II], qui améliorait ainsi, et généralisait, un résultat de Popken et Koksma :

$$H(P_1\dots P_m) \geqslant (4n)^{-n}\, H(P_1)\dots H(P_m) \text{ ,}$$

où $P_1,\dots,P_m$ sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ [Schneider, T., lemme 16].

Il existe une autre démonstration très intéressante de ce lemme, par Mahler. [Mahler, 1961] ; le principe en est le suivant : pour $P \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_q]$, notons

$$M(P) = \exp \int_{H_q} \operatorname{Log} |P(e^{2i\pi u_1},\dots,e^{2i\pi u_q})|\,du_1\dots du_q$$

(avec $M(P) = 0$ si $P = 0$). On a évidemment

$$M(P_1 \dots P_m) = M(P_1) \dots M(P_m) \ ;$$

donc le problème revient à trouver des inégalités liant les fonctions $M(P)$ et $\|P\|$; on a dans un sens, grâce à Hardy, Littlewood et Polya :

$$M(P) \leqslant \|P\| \ .$$

D'autre part, en utilisant la formule (1.5.3) de Jensen [Mahler, 1960], on constate que, pour

$$P = \sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_q=0}^{n_q} a_{k_1,\dots,k_q} X_1^{k_1} \dots X_q^{k_q} \ ,$$

on a

$$|a_{k_1,\dots,k_q}| \leqslant \binom{n_1}{k_1} \dots \binom{n_q}{k_q} M(P) \ .$$

On en déduit des inégalités entre

$$\|P_1 \dots P_m\| \quad \text{et} \quad \|P_1\|, \dots, \|P_m\| \ ,$$

ou bien entre

$$H(P_1 \dots P_m) \quad \text{et} \quad H(P_1), \dots, H(P_m) \ .$$

Notons d'autre part une démonstration très simple de l'inégalité

$$t(P) \leqslant 3 \ t(PQ) \ ,$$

pour tout P et Q dans $\mathbb{Z}[X]$ [Lang, T., chap.VI §2].

Le théorème 4.5.1 correspond à [Lang, T, chap. V §3 th. 2] , avec les corrections nécessaires. Pour l'utiliser, il faut pouvoir déterminer le type de transcendance de certains corps, et ce problème est plus difficile que celui de la détermination du degré de transcendance d'un corps. Les mesures d'indépendance algébrique actuellement connues ne donnent pas de type de transcendance pour des corps de degré de transcendance supérieur ou égal à 2[Lang, T., p. 99]. Néanmoins, dans le cas de dimension algébrique 1, les mesures de transcendance donnent déjà certains résultats. Ainsi, A.O. Gel'fond a montré que $\mathbb{Q}(a^b)$ avait un type $\leqslant 4$, et que $\mathbb{Q}(\frac{\operatorname{Log}\alpha}{\operatorname{Log}\beta})$ avait un type $\leqslant 4+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ (cf. [Gel'fond, T, chap. III §3 Th. III]) ; puis N.I. Fel'dman a obtenu $\tau = 2+\varepsilon$ pour $\mathbb{Q}(\pi)$, et $\tau = 3+\varepsilon$ pour $\mathbb{Q}(\operatorname{Log}\alpha)$ [Fel'dman, 1959]. Plus récemment, P.L. Cijsouw a amélioré plusieurs de ces résultats, et a démontré de nouvelles mesures de transcendance pour e^α et e^π. Les résultats actuellement connus s'énoncent ainsi. <u>Les corps</u> K <u>suivants ont un type de transcendance inférieur ou égal à</u> τ, <u>dès que l'on choisit</u>

$$\tau > 2 \ \underline{\text{pour}}\ K = \mathbb{Q}(\pi) \quad ; \quad \tau > 3 \ \underline{\text{pour}}\ K = \mathbb{Q}(\operatorname{Log}\alpha) \ ;$$

$$\tau \geqslant 3 \ \underline{\text{pour}}\ K = \mathbb{Q}(e^\alpha) \quad ; \quad \tau \geqslant 4 \ \underline{\text{pour}}\ K = \mathbb{Q}(\frac{\operatorname{Log}\alpha}{\operatorname{Log}\beta}) \ ;$$

$$\tau \geqslant 3 \ \underline{\text{pour}}\ K = \mathbb{Q}(e^\pi) \quad ; \quad \tau \geqslant 4 \ \underline{\text{pour}}\ K = \mathbb{Q}(a^b) \ .$$

(Ici α, β, a et b sont algébriques). (Voir [Cijsouw, 1972]).

Nous n'avons parlé que de l'extension des résultats du chapitre 2, aux extensions de $\mathbb{Q}$ de type de transcendance $\leqslant \tau$. On peut effectuer une généralisation semblable des résultats du chapitre 3 ; le seul problème consiste à établir l'analogue du lemme 3.3.2 (où on remplace s par t, et K par une extension de $\mathbb{Q}$ de type fini). On peut démontrer par exemple que, sous les hypothèses du théorème 4.5.1, si on suppose, de plus que la dérivation $\frac{d}{dz}$ opère sur une extension finie du corps $K(f_1,\ldots,f_d)$, alors on a

$$(d-\tau)\ell < \tau(\frac{d-1}{d})(\rho_1+\ldots+\rho_d) \ ;$$

si, de plus, la dérivation opère sur le K-espace vectoriel

$$K + Kf_1 + \dots + Kf_d ,$$

alors

$$d\ell < (\tau-1)d + \tau\ell .$$

Nous étudierons, au chapitre 7, le cas particulier de la fonction exponentielle. Le cas général est exposé dans [Waldschmidt, 1972, a, §4].

EXERCICES

Exercice 4.1.a. Soient $\tau \geqslant 2$ un nombre réel, et x un nombre complexe transcendant. Soit K une extension algébrique de $\mathbb{Q}(x)$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) K a un type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbb{Q}$.

(ii) Pour tout polynôme irréductible non nul $P \in \mathbb{Z}[x]$, on a

$$-(t(P))^{\tau} \ll \operatorname{Log}|P(x)| .$$

(iii) Pour tout nombre algébrique α, on a

$$-(\sigma(\alpha))^{\tau} \ll \operatorname{Log}|x-\alpha| ,$$

où $\sigma(\alpha)$ désigne la taille du polynôme minimal de α sur $\mathbb{Z}$.

(Indications. Pour démontrer l'équivalence entre (i) et (ii), utiliser le lemme 5.3.5, pour l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (ii), utiliser l'exercice 4.1.b ; l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est facile. Voir [Lang, T., chap. VI §2 th.2], ou [Cijsouw, 1972, lemmes 2.15 et 4.3]).

Exercice 4.1.b. Soit $\Phi(n,s)$ une fonction réelle positive, définie pour $n \geqslant 0$ et $s \geqslant 1$ entiers, telle que, pour tout n,s, on ait

$$\Phi(n,s) \geqslant n.s \ ; \ \Phi(n,s_1) \leqslant \Phi(n,s_2) \ \text{ si } \ s_1 < s_2 \ ; \ \frac{1}{n_1}\Phi(n_1,s) \leqslant \frac{1}{n_2}\Phi(n_2,s) \ \text{ si } \ n_1 < n_2 \ .$$

Soit x un nombre complexe transcendant tel que, pour tout nombre algébrique α de degré N et de hauteur H, on ait $\mathrm{Log}|x-\alpha| > -\Phi(N,S)$, avec $S = [N + \mathrm{Log}\, H]$.

Montrer que, pour tout polynôme non constant $P \in \mathbb{Z}[X]$, de degré N et de hauteur H, on a $\mathrm{Log}|P(x)| > -3\Phi(N,2S)$, avec $S = [N + \mathrm{Log}\, H]$.

(Si P est irréductible, l'exercice 4.2.f donne

$$\mathrm{Log}|P(x)| > -3\,\Phi(N,S) \ ;$$

sinon, on utilise 4.2.13).

Ce résultat a été obtenu, par Cijsouw, à partir de la démonstration du théorème 2 de [Fel'dman, 1951].

Exercice 4.1.c. Soit Ω un sous-corps algébriquement clos de $\mathbb{C}$, de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbb{Q}$. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$; on note d la dimension du sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par les valeurs propres de M. Soient

$$t_1,\ldots,t_m$$

des nombres complexes, $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, tels que les matrices

$$\exp(Mt_j) \ , \ (1 \leqslant j \leqslant m) \ ,$$

appartiennent toutes à $M_n(\Omega)$.

Montrer que l'on a

$$md < \tau(m+d) \ .$$

En déduire le premier résultat de l'exercice 2.2.a.

Exercice 4.2.a. Démontrer les inégalités (4.2.3).

(Si $\sigma_1,\dots,\sigma_\delta$ désignent les différents plongements de K dans $\mathbb{C}$, choisir

$$c_1 = \max\{0 \; ; \max_{1\leqslant j\leqslant\delta} \operatorname{Log} \sum_{i=1}^{\delta} |\sigma_j y^{i-1}|\} .$$

En considérant le produit des dénominateurs par rapport à y des éléments d'une base sur $\mathbb{Z}$ de l'anneau des entiers $\mathbf{A}$ de K , montrer qu'il existe un entier rationnel $f > 1$ tel que $f.\mathbf{A} \subset \mathbb{Z}[y]$; définir

$$c_2 = \max\{\operatorname{Log} f \; , \; \operatorname{Log} \delta f c_0 \; , \; 1\} ,$$

où c_0 est le maximum des valeurs absolues des coefficients de la matrice inverse de

$$[\sigma_j y^{i-1}]_{1\leqslant i,j\leqslant\delta} \;).$$

En déduire une valeur de la constante c_K de (4.2.4).

Exercice 4.2.b. Soit K une extension de $\mathbb{Q}$ de type fini. Montrer qu'il existe des constantes, ne dépendant que d'un système générateur $(x_1,\ldots,x_q,y)$ de K sur $\mathbb{Q}$ (permettant de définir une taille t sur K), et notées $\ll$, telles que les propriétés suivantes soient vérifiées

1) $t(\frac{a}{b}) \ll \max(t(a),t(b))$ pour tout $a \in K$, $b \in K$, $b \neq 0$.

2) Si $a = \sum_{i=1}^{\delta} \frac{P_i}{Q_i} y^{i-1}$, où, pour tout $i = 1,\ldots,\delta$, P_i et Q_i sont deux éléments de $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_q]$ premiers entre eux, alors

$$t(a) \ll \max_{1\leqslant i\leqslant \delta} \{t(P_i),t(Q_i)\} \ll t(a) .$$

3) Soit $\sigma : K \to K$ un homomorphisme ; on a

$$t(\sigma(a)) \ll t(a) .$$

[Waldschmidt, 1972a §2].

Exercice 4.2.c. Soient $P \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_q]$, et $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 1$. Vérifier l'inégalité

$$\sup_{|x_1|=1,\ldots,|x_q|=1} |P(x_1,\ldots,x_q)|^{2m} \leqslant \|P^m\|^2 . \prod_{\nu=1}^{q} (1+2^m \deg_{x_\nu} P) .$$

En déduire

$$H(P^m) \geqslant \sup_{|x_1|=1,\ldots,|x_q|=1} |P(x_1,\ldots,x_q)|^m . \prod_{\nu=1}^{q} (1+2^m \deg_{x_\nu} P)^{-1} ,$$

et

$$H(P^m) \geqslant (H(P))^m . \prod_{\nu=1}^{q} (1+2m \deg_{x_\nu} P)^{-1}$$

[Gel'fond, T, Chap.III §4 lemme II'].

Exercice 4.2.d. Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$, $a_d \neq 0$.

Soient $z_1,\dots,z_d$ les racines de P dans $\mathbb{C}$; on note

$$|z_i|^* = \max(|z_i|,1) .$$

1) Vérifier l'inégalité

$$\sum_{j=0}^{d} |a_j|^2 \geqslant |a_d|^2 . \prod_{i=1}^{d} |z_i|^{*2} + |a_o|^2 \prod_{i=1}^{d} |z_i|^{*-2} ;$$

en particulier

$$\|P\| \geqslant |a_d| . \prod_{i=1}^{d} |z_i|^* .$$

[Mignotte, 1973].

2) En déduire que, si $Q_1,\dots,Q_m,R$ sont des polynômes unitaires de $\mathbb{Z}[X]$, on a

(avec les notations de l'exercice 1.2.a) :

$$\prod_{j=1}^{m} L(Q_j) \leqslant 2^{\sum_{j=1}^{m} \deg Q_j} . \|Q_1 \dots Q_m R\| .$$

De plus, si $Q_1 = b_o + b_1 X + \dots + b_\ell X^\ell$, on a

$$|b_i| \leqslant \binom{\ell}{i} \|Q_1 \dots Q_m R\| \quad , \quad 0 \leqslant i \leqslant \ell .$$

[Mignotte, 1973].

3) En déduire aussi l'inégalité

$$\prod_{\nu=1}^{n} (1 + |z_\nu|) \leqslant (n+1)\ 4^n\ |a_d|^{-1} . H(P)$$

[Fel'dman, 1951].

Exercice 4.2.e. Soit $Q = \sum_{i=0}^{N} q_i X^i = q_N \prod_{i=1}^{N} (X-\alpha_i) \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme non nul de degré $N \geqslant 1$ et de hauteur H , ayant ses racines deux à deux distinctes.

Soit Ω un sous-ensemble de

$$\{(i,j) \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant N \ , \ 1 \leqslant j \leqslant N \ , \ i < j\} \ .$$

Vérifier

$$\prod_{\Omega} |\alpha_i - \alpha_j| \geqslant 2^{-\frac{1}{2}N(N-1)} \ . \ (N+1)^{-\frac{1}{2}(N-1)} \ . \ H^{-(N-1)} \ . \ 2^{\mathrm{Card}\ \Omega} \ .$$

(Indications : utiliser l'exercice 4.2.d , et consulter [Cijsouw, 1972, lemme 2.8], ou [Güting, 1960], ou [Fel'dman, 1951, lemme 5]).

Exercice 4.2.f.

Soit

$$P = \sum_{i=0}^{m} a_i \ X^i \in \mathbb{Z}[X]$$

un polynôme de degré m , dont les racines

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$$

sont deux à deux distinctes.

Vérifier l'inégalité

$$|a_m| . e^{-m(2m+\mathrm{Log}\ H(P))} . \min_{1 \leqslant i \leqslant m} |\xi - \alpha_i| \leqslant |P(\xi)| \leqslant (m+1)4^m . H(P) . (1+|\xi|^m) . \min_{1 \leqslant i \leqslant m} |\xi - \alpha_i| \ .$$

[Feldman, 1951, lemme 5].

Exercice 4.5.a. Sous les hypothèses du théorème 4.5.1, on suppose que les fonctions $f_1,\ldots,f_d$ ont une période $w \neq 0$ commune non nulle. Etablir l'inégalité

$$(d-\tau)\ell < \tau(\rho_1+\ldots+\rho_d-1) .$$

En déduire le résultat de l'exercice 2.2.d.

Exercice 4.5.b. Toutes les inégalités qui interviennent dans les démonstrations que nous étudions sont du type

$$\ll N^a (\mathrm{Log}\, N)^b \qquad \text{pour} \quad N \to +\infty$$

où $a \geqslant 0$ et b sont deux réels ($b > 0$ si $a = 0$).

Remplacer, dans les hypothèses du théorème 4.5.1, toutes les inégalités du type

$$\ll N^a \qquad\qquad \text{pour} \quad N \to +\infty ,$$

par des inégalités du type précédent. Par exemple, au lieu de supposer que $K = \mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_q,y)$ a un type de transcendance $\leqslant \tau$, on suppose qu'il existe deux réels $\tau \geqslant 1$ et τ' tels que

$$- t(P)^{\tau} \,\mathrm{Log}(t(P))^{\tau'} \ll \mathrm{Log}\, |P(x_1,\ldots,x_q)|$$

pour tout $P \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_q]$, $P \neq 0$.

(Remarque : d'après [Fel'dman, 1960], on peut choisir

$$\tau = 2 \ , \ \tau' = 2 \quad \text{quand} \quad q = 1 \ , \ x_1 = \pi \ ;$$

et, d'après [Cijsouw, 1972], on peut choisir

$$\tau = 3 \ , \ \tau' = 2 \quad \text{quand} \quad q = 1 \ , \ x_1 = \mathrm{Log}\, \alpha \quad (\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \ , \ \alpha \neq 0,1)).$$

Montrer que la conclusion du théorème 4.5.1 devient :

si
$$(d-\tau)\ell' > \tau(\rho'_1+\ldots+\rho'_d) + d(\tau'-1)$$

alors

$$(d-\tau)\ell < \tau(\rho_1+\ldots+\rho_d) .$$

Exercice 4.6.a. Soient $P_1,\dots,P_m$ des polynômes de $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_q]$; on note

$$m_h = \sum_{i=1}^{m} \deg_{X_h} P_i \qquad (1 \leqslant h \leqslant q) .$$

Soit ν le nombre d'entiers h tels que $m_h > 1$. Vérifier

$$L(\prod_{i=1}^{m} P_i) \leqslant \prod_{i=1}^{m} L(P_i) \leqslant 2^{m_1+\dots+m_q} . L(\prod_{i=1}^{m} P_i) ;$$

$$2^{-(m_1+\dots+m_q)} H(P) \leqslant \prod_{i=1}^{m} H(P_i) \leqslant 2^{m_1+\dots+m_q-\nu} . [(m_1+1)\dots(m_q+1)]^{\frac{1}{2}} . H(\prod_{i=1}^{m} P_i) .$$

(Utiliser l'exercice 1.2.a et les remarques du §4.6, ou bien appliquer directement le lemme 4.2.14) [Mahler, 1961].

Exercice 4.6.b. Généraliser le lemme 3.3.2 aux extensions de $\mathbb{Q}$ de type fini.

En déduire une extension des résultats du chapitre 3 (méthode de Gel'fond) aux corps de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbb{Q}$ [Waldschmidt, 1972 a, lemme 3.1 et théorèmes 1b et 2b].