Séminaire P.LELONG
(Analyse)
15e année, 1974/75.

4 Mars 1975

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES (I)

par Michel WALDSCHMIDT

L'étude des propriétés arithmétiques de fonctions de plusieurs variables a été commencée en 1940 par Theodor SCHNEIDER [1] , qui montrait la transcendance d'au moins une des périodes d'une intégrale abélienne de première ou de deuxième espèce à coefficients algébriques. En particulier, comme les périodes de l'intégrale abélienne

$$\int x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \ , \quad (a,b \text{ rationnels})$$

s'expriment rationnellement en fonction de $B(a,b)$, SCHNEIDER obtenait la transcendance du nombre

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \ ,$$

quand a et b sont rationnels et non entiers (ce résultat contient à peu près tout ce que l'on sait actuellement sur les propriétés arithmétiques de la fonction gamma, par exemple la transcendance de l'un des deux nombres $\Gamma(a)$, $\Gamma(2a)$, pour $a \in \mathbb{Q}$, $a \notin \mathbb{Z}$; on ignore encore la transcendance de nombres tels que $\Gamma(\frac{1}{3})$) . Pour obtenir ces résultats, il fallait étendre aux fonctions de plusieurs variables le lemme classique de Schwarz (qui permet de majorer une fonction d'une variable ayant de nombreux zéros , distincts ou confondus). La méthode de Schneider consistait à utiliser une formule d'interpolation reposant sur la formule intégrale de Cauchy itérée, ce qui permet de majorer les valeurs d'une fonction s'annulant en tous les points d'un produit $S_1 \times \ldots \times S_n$ dans $\mathbb{C}^n$.

Cette méthode de Schneider a été reprise en 1963 par Serge LANG [2,4] qui généralisait ainsi un critère de transcendance qu'il avait obtenu précédemment pour les fonctions d'une variable satisfaisant des équations différentielles.

Les formules d'interpolation utilisées par Schneider et Lang étaient difficiles à exploiter ; elles ont été transformées en 1967 par Alan BAKER [5] , qui étendait à n variables des résultats classiques de Gaston POLYA (1914) et Ernst G.STRAUS (1950). Ainsi, d'après Baker, la fonction $2^{z_1+\dots+z_n}$ est la "plus petite" fonction entière, transcendante par rapport à chaque variable, et qui prend des valeurs dans $\mathbb{Z}$ en tous les points de $\mathbb{N}^n$.

Le résultat de Lang permettait de montrer qu'un sous-ensemble $\mathscr{S}$ de $\mathbb{C}^n$ (ensemble de valeurs algébriques de fonctions méromorphes satisfaisant des équations différentielles) ne pouvait pas contenir un produit $S_1 \times \dots \times S_n$, avec $S_i \subset \mathbb{C}$, card $S_i = +\infty$. Il avait été conjecturé par NAGATA [4 , chap. IV] que cet ensemble $\mathscr{S}$ était contenu dans une hypersurface algébrique. Cette conjecture a été résolue en 1970 par Enrico BOMBIERI [7] qui utilisait pour cela, et pour la première fois dans ce domaine, des méthodes de la théorie des fonctions de plusieurs variables [6,7,8,13]. Nous retiendrons seulement la variante du lemme de Schwarz employée par BOMBIERI [6,7] ; elle consiste à faire jouer le rôle du nombre de zéros (d'une fonction d'une variable) dans un disque à la masse moyenne du diviseur des zéros (de la fonction de n variables) dans une boule . L'analogue p-adique de ce lemme de Schwarz (dû à Kurt MAHLER (1935) dans le cas d'une variable) avait été démontré en 1965 par Jean-Pierre SERRE [3].

Dans cet exposé, nous étudierons les valeurs algébriques de fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}^n$, et nous ne supposerons pas que les fonctions étudiées satisfont des équations différentielles.

Nous donnerons d'abord quelques conséquences d'une formule d'interpolation (§ 1) dans $\mathbb{C}^n$; après avoir démontré un premier critère (§ 2), nous étudierons l'indépendance algébrique de fonctions périodiques, admettant n périodes $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes, et dont le développement de Taylor à l'origine satisfait des hypothèses arithmétiques (§ 3).

Nous appliquerons ensuite une variante n-dimensionnelle du lemme de SCHWARZ (§ 4) pour donner un deuxième critère (§ 5), qui généralise un résultat de E.Bombieri et S.Lang [6] , et qui permet d'étudier les valeurs algébriques de sous-groupes analytiques de variétés de groupe (§ 6).

§ 1. - Une formule d'interpolation dans $\mathbb{C}^n$.

Pour $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, nous notons

$$|\underline{z}| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i| ;$$

pour $\underline{a} \in \mathbb{C}^n$ et $r > 0$, nous appelons polydisque de centre $\underline{a}$ et de rayon r le sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ défini par

$$D(\underline{a}, r) = \left\{ \underline{z} \in \mathbb{C}^n \quad , \; |\underline{z} - \underline{a}| \leqslant r \right\}.$$

Si f est une fonction analytique dans un voisinage de $\underline{a}$ dans $\mathbb{C}^n$, on dit que f admet un zéro en $\underline{a}$ d'ordre $\geqslant s$ si le développement de Taylor de f en $\underline{a}$ commence par un polynôme homogène de degré supérieur ou égal à s (le degré exact de ce polynôme est appelé "nombre de Lelong de f au point $\underline{a}$").

Pour $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $\partial^{\underline{k}}$ l'opérateur différentiel

$$\partial^{\underline{k}} = \frac{\partial^{\underline{k}}}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} ;$$

l'ordre de $\partial^{\underline{k}}$ est le nombre $|\underline{k}| = k_1 + \dots + k_n$. Une fonction f a un zéro en $\underline{a}$ d'ordre $\geqslant s$ si et seulement si

$$\partial^{\underline{k}} f(\underline{a}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \underline{k} \text{ tel que } |\underline{k}| \leqslant s.$$

Le lemme de Schwarz classique s'énonce :

(1.1.) <u>si</u> f <u>est une fonction analytique dans un polydisque</u> $D(\underline{0},R)$, <u>admettant un zéro à l'origine d'ordre</u> $\geqslant s$, <u>alors on a</u>

$$|f(\underline{z})| \leqslant \left(\frac{|\underline{z}|}{R}\right)^s |f|_R \quad \underline{\text{pour}}\ |\underline{z}| \leqslant R ,$$

<u>où</u> $|f|_R = \sup_{|t| = R} |f(t)|$.

Ce résultat est une conséquence immédiate du lemme classique à une variable, appliqué à une fonction $u \mapsto f(\underline{z}.u)$. Il est beaucoup plus difficile de généraliser l'énoncé à une variable correspondant à de nombreux zéros distincts ou confondus. Cette difficulté provient du fait que les zéros d'une fonction analytique de plusieurs variables ne sont pas isolés. Nous étudierons plus en détail au § 4 l'ensemble de ces zéros. Nous n'utiliserons, dans les paragraphes 2 et 3 que le résultat suivant.

LEMME 1.2. - <u>Soient</u> $S_1,\dots,S_n$ <u>des sous-ensembles de</u> $\mathbb{C}$, <u>contenant chacun</u> m <u>éléments distincts. Soit</u> $D(\underline{O},r)$ <u>un polydisque de</u> $\mathbb{C}^n$ <u>contenant</u> $S = S_1 \times\dots\times S_n$. <u>Soit</u> f <u>une fonction analytique dans un voisinage d'un polydisque</u> $D(\underline{O},R)$, <u>avec</u> $R > 3r$, <u>admettant en chaque point de</u> S <u>un zéro d'ordre</u> $\geqslant \sigma$. <u>Alors</u>

$$\operatorname{Log}|f|_r \leqslant \operatorname{Log}|f|_R - m\sigma \operatorname{Log}\frac{R}{3r} + n \operatorname{Log}[3(m\sigma+1)] .$$

Nous allons démontrer ce résultat en utilisant des formules d'interpolation dans $\mathbb{C}^n$; nous présentons d'abord ces formules dans le cas d'une variable.

Etant donné une fonction f analytique dans un voisinage d'un disque $|z|\leqslant R$ de $\mathbb{C}$, et étant donné s points (distincts ou non) $u_o,\dots,u_{s-1}$ du disque $|z|<R$, on cherche le polynôme P (polynôme d'interpolation) de degré strictement inférieur à s, tel que la fonction $f - P$ possède les zéros $u_o,\dots,u_{s-1}$ (comptés avec leur ordre de multiplicité). L'idée consiste à écrire

$$f(z) = f(u_o) + (z - u_o)g(z) ,$$

ce qui permet de construire P par récurrence sous la forme

$$P(z) = a_o + (z-u_o)\left[a_1 + (z-u_1) \quad \dots\dots \right. = \sum_{o\leqslant i<s} a_i \prod_{o\leqslant j<i} (z - u_j) .$$

Pour calculer les coefficients a_i, on procède de la même manière que pour montrer l'analyticité d'une fonction holomorphe : on exprime f par la formule intégrale de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta ;$$

pour développer $\frac{1}{\zeta - z}$, on écrit

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - u_i} + \frac{z - u_i}{\zeta - u_i} \cdot \frac{1}{\zeta - z} ,$$

ce qui donne par récurrence

$$(1.3.) \qquad \frac{1}{\zeta - z} = \sum_{0 \leqslant i < s} \frac{\prod_{j < i} (z-u_j)}{\prod_{\ell \leqslant i} (\zeta - u_\ell)} + \frac{\prod_{j<s} (z-u_j)}{(\zeta - z) \prod_{j<s} (\zeta - u_j)} .$$

On multiplie les deux membres de (1.3.) par $\frac{1}{2i\pi} f(\zeta)$ et on intègre sur $|\zeta| = R$:

$$f(z) = P(z) + R(z) \cdot \prod_{0 \leqslant j < s} (z-u_j) ,$$

avec

$$P(z) = \sum_{0 \leqslant i < s} a_i \prod_{0 \leqslant j < i} (z-u_j) .$$

$$a_i = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\prod_{\ell \leqslant i} (\zeta - u_\ell)} d\zeta$$

et

$$R(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z) \prod_{j<s} (\zeta - u_j)} d\zeta .$$

Comme $R(z)$ est analytique dans $|z| < R$, la fonction $f - P$ a les zéros voulus.

Remarquons que, si f s'annule en chacun des points u_i (avec multiplicité), alors $P = 0$ (d'après l'unicité de P ; on le voit aussi en calculant les coefficients a_i par le théorème des résidus); dans ce cas, on déduit de la relation

$$f(z) = R(z) \cdot \prod_{0 \leqslant j < s} (z - u_j)$$

l'inégalité

$$|f|_r \leqslant |f|_R \cdot \left(\frac{2r}{R - r}\right)^s \frac{R}{R - r} ,$$

pour tout r vérifiant $\max_{0 \leqslant i < s} |u_i| \leqslant r < R$.

Avant de généraliser ces formules, il est commode d'introduire un nombre complexe u_s (par exemple $u_s = 0$) et d'écrire (1.3.) sous la forme

$$(1.4.)\qquad \frac{1}{\zeta - z} = \sum_{i=0}^{s} \frac{\prod\limits_{j<i}(z-u_j)}{\prod\limits_{\ell \leqslant i}(\zeta - u_\ell)} \cdot \left(\frac{\zeta - u_i}{\zeta - z}\right)^{\delta_{i,s}} .$$

Par conséquent

$$f(z) = \sum_{i=0}^{s} a_i(z) \prod_{j<i}(z-u_j) ,$$

où

$$a_i(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\prod\limits_{\ell \leqslant i}(\zeta-u_\ell)} \left(\frac{\zeta-u_i}{\zeta-z}\right)^{\delta_{i,s}} d\zeta .$$

Remarquons que $a_i(z)$ ne dépend de z que pour $\delta_{i,s} = 1$, c'est-à-dire $i=s$.

Démonstration du lemme 1.2.

Notons $u_o^{(k)}, \dots, u_{m-1}^{(k)}$ m éléments distincts de S_k. On définit

$$u_o^{(k)}, \dots, u_{m\sigma-1}^{(k)}$$

par $\qquad u_{mj+r}^{(k)} = u_r^{(k)}$ pour $o \leqslant r < m$, $o \leqslant j < \sigma - 1$.

Ainsi chaque élément de S_k est répété σ-fois.

La formule (1.4.) donne, par récurrence sur n :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\zeta_k - z_k} = \sum_{j_1=o}^{m\sigma} \cdots \sum_{j_n=o}^{m\sigma} \prod_{k=1}^{n} \frac{\prod\limits_{\ell<j_k}(\zeta_k - u_\ell^{(k)})}{\prod\limits_{\lambda \leqslant j_k}(\zeta_k - u_\lambda^{(k)})} \cdot \left(\frac{\zeta_k - u_{j_k}^{(k)}}{\zeta_k - z_k}\right)^{\delta_{j_k,m}} .$$

On utilise la formule intégrale de Cauchy :

$$f(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{C_1}\cdots\int_{C_n} \frac{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\zeta_k - z_k)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n ,$$

où C_k est la circonférence $|\zeta_k| = R$.

On obtient ainsi

$$f(z_1,\dots,z_n) = \sum_{j_1=o}^{m\sigma} \sum_{j_n=o}^{m\sigma} a_{j_1,\dots,j_n}(z_1,\dots,z_n) \prod_{k=1}^{n} \prod_{\ell<j_k}(z_k - u_\ell^{(k)})$$

avec

$$a_{j_1,\dots,j_n}(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{C_1}\cdots\int_{C_n} f(\zeta_1,\dots,\zeta_n) \prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\prod\limits_{\lambda \leqslant j_k}(\zeta_k - u_\lambda^{(k)})} \left(\frac{\zeta_k - u_{j_k}^{(k)}}{\zeta_k - z_k}\right)^{\delta_{j_k,m\sigma}} \right\} d\zeta_1,\dots,d\zeta_n$$

Si $\delta_{j_k, m\sigma} = 0$ pour tout k, alors $a_{j_1,\ldots,j_n}$ ne dépend pas de $z_1,\ldots,z_n$. De plus, comme f admet les zéros $\underline{u} = (u^{(1)}_{\lambda_1},\ldots,u^{(n)}_{\lambda_n})$, $(0 \leqslant \lambda_k < m\sigma,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$, on obtient à partir de l'expression $a_{j_1,\ldots,j_n}$ et de la formule des résidus :

$$a_{j_1,\ldots,j_n} = 0 \quad \text{si} \quad j_k < m\sigma \text{ pour } k = 1,\ldots,n\ .$$

Si l'un des $\delta_{j_k, m\sigma}$ vaut 1, c'est-à-dire si l'un des j_k vaut $m\sigma$, on majore :

$$f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \quad \text{par} \quad |f|_R\ ;$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\prod_{\lambda \leqslant j_k} |\zeta_k - u^{(k)}_{\lambda}|} \quad \text{par} \quad \left(\frac{1}{R-r}\right)^{n+\sum_{k=1}^{n} j_k}\ ;$$

$$\left|\frac{\zeta_k - u^{(k)}_{j_k}}{\zeta_k - z_k}\right| \quad \text{par} \quad \frac{R+r}{R-r}\ ;$$

enfin, comme $\frac{R}{R-r} < \frac{3}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} j_k \geqslant m\sigma$, et $\frac{R+r}{R-r} \leqslant 2$, on obtient

$$|f|_r \leqslant |f|_R \cdot \left(\frac{2r}{R-r}\right)^{m\sigma} \cdot (m\sigma + 1)^{n-1} \left(\frac{R}{R-r}\right)^{n} \cdot \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^{n},$$

d'où le lemme ◀

§ 2. - Un premier critère.

Si des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}^n$, d'ordre fini, prennent des valeurs algébriques en tous les points d'un ensemble $S^{(1)} \times \ldots \times S^{(n)}$, alors ces fonctions sont algébriquement dépendantes. Pour énoncer les hypothèses précises, on filtre chacun des ensembles $S^{(j)}$ par $S^{(j)} = \bigcup_{N \geqslant 1} S^{(j)}_N$; par exemple, si $S^{(j)}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{C}$ engendré par $u_1,\ldots,u_\ell$, on choisit

$$S^{(j)}_N = \left\{ k_1 u_1 + \ldots + k_\ell u_\ell\ ;\ -N \leqslant k_i \leqslant N \right\}.$$

On dira qu'une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}^n$ est d'<u>ordre inférieur ou égal à</u> ρ si elle est quotient de deux fonctions entières satisfaisant

$$\operatorname{Log} |f|_R \leqslant C.R^{\rho} \quad \text{pour tout} \quad R > 1\ .$$

(Les résultats seraient inchangés si on choisissait la définition plus classique pour une fonction entière :

$$\rho = \limsup_{R \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} \operatorname{Log} |f|_R}{\operatorname{Log} R}).$$

Enfin on utilisera la <u>taille</u> $t(\alpha)$ d'un nombre algébrique α, définie par

$$t(\alpha) = \max \left\{ \operatorname{Log} d(\alpha), \operatorname{Log} |\overline{\alpha}| \right\},$$

où $d(\alpha)$ est le dénominateur de α (plus petit entier positif dont le produit par α est entier algébrique sur $\mathbb{Z}$), et $|\overline{\alpha}|$ est le maximum des valeurs absolues des conjugués de α sur $\mathbb{Q}$.

Le résultat suivant généralise à n variables un théorème dû essentiellement à LANG et RAMACHANDRA (voir Lecture Notes in Math., vol. 402, théorème 2.2.1), contenant en particulier le théorème de Gel'fond Schneider sur la transcendance de a^b.

THÉORÈME 2.1. - <u>Soient</u> K <u>un corps de nombres</u>, $f_1,\dots,f_d$ <u>des fonctions méromorphes dans</u> $\mathbb{C}^n$, $g_1,\dots,g_d$ <u>des fonctions entières dans</u> $\mathbb{C}^n$, <u>telles que, pour</u> $1 \leqslant i \leqslant d$, g_i <u>et</u> $g_i f_i$ <u>soient entières d'ordre</u> $\leqslant \rho_i$. <u>Soient</u> $(S_N^{(j)})_{N \geqslant 1}$, $(1 \leqslant j \leqslant n)$ n <u>suites de sous-ensembles de</u> $\mathbb{C}$, <u>vérifiant, pour</u> $1 \leqslant j \leqslant n$

$$\max_{\underline{t} \in S_N^{(j)}} |\underline{t}| \ll N, \quad \operatorname{Card} S_N^{(j)} \gg N^m,$$

<u>et tels que, pour</u> $\underline{z} \in S_N^{(1)} \times \dots \times S_N^{(n)}$ <u>et</u> $1 \leqslant i \leqslant d$, <u>on ait</u>

$$h_i(\underline{z}) \neq 0 \quad ; \quad f_i(\underline{z}) \in K \quad , \text{ et}$$

$$\max \left\{ \operatorname{Log} \frac{1}{|h_i(\underline{z})|}, \; t(f_i(\underline{z})) \right\} \ll N^{\rho_i} .$$

<u>On suppose de plus</u>

$$\rho_1 + \dots + \rho_d < (d-n)m.$$

<u>Alors les fonctions</u> $f_1,\dots,f_d$ <u>sont algébriquement dépendantes sur</u> K.

On en déduit le cas particulier suivant d'un théorème de Baker.

COROLLAIRE 2.2. - Si f est une fonction entière dans $\mathbb{C}^n$, d'ordre strictement inférieur à 1, et telle que $f(\underline{z})\in\mathbb{Z}$ pour tout $\underline{z}\in\mathbb{N}^n$, alors f est un polynôme.

On peut démontrer un résultat beaucoup plus précis que le corollaire 2.2., en introduisant dans la démonstration des polynômes d'interpolation à n variables

$$\binom{\underline{z}}{\underline{i}} = \binom{z_1}{i_1} \cdots \binom{z_n}{i_n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{z_k(z_k-1)\ \cdots\ (z_k-i_k+1)}{i_k\,!} .$$

Démonstration du théorème 2.1.

Il n'y a pas de restriction à supposer

$$\max_{1\leqslant i\leqslant d} \rho_i < \frac{\rho_1+\ldots+\rho_d+mn}{d} \quad \text{et} \quad \text{Card } S_N^{(i)} \gg\ll N^m .$$

Le lemme de SIEGEL [4] permet de construire un polynôme non nul $P_N \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_d]$, tel que la fonction $F_N = P_N(f_1,\ldots,f_d)$ vérifie $F_N(\underline{z}) = 0$ pour tout $\underline{z}\in S_N = S_N^{(1)} \times \ldots \times S_N^{(n)}$. De plus on peut majorer le degré L_i de P_N par rapport à X_i :

$$L_i \ll N^{\frac{mn}{d}+\rho-\rho_i} \quad , \text{ avec } \rho = \frac{\rho_1+\ldots+\rho_d}{d} ,$$

et la hauteur $H(P_N)$ de P_N (maximum des valeurs absolues des coefficients de P_N) :

$$\text{Log } H(P_N) \ll N^{\frac{mn}{d}+\rho} .$$

Notons $G_N = F_N \prod_{i=1}^{d} g_i^{L_i}$.

Montrons que l'on a, pour tout $M > N$,

$(I)_M$ $\qquad F_N(\underline{z}) = 0$ pour tout $\underline{z}\in S_M$

$(II)_M$ $\qquad \text{Log} \sup_{\underline{z}\in S_{M+1}} |G_N(\underline{z})| \ll - M^m$.

L'implication $(I)_M \Longrightarrow (II)_M$ est une conséquence du lemme 1.2. appliqué à la fonction G_N, avec $R \gg\ll M$, et $r = \frac{R}{4}$, $\sigma = 1$. On majore Log $|f|_R$

par

$$\mathrm{Log}\,|f|_R \ll M^{\frac{mn}{d}+\varrho},$$

ce qui est négligeable devant M^m, grâce à l'hypothèse $\varrho + \frac{mn}{d} < m$.

Si $(II)_M$ est vérifiée, on a $\mathrm{Log}\,|F_N(\underline{z})| \ll - M^m$ pour tout $\underline{z} \in S_{M+1}$, et, comme $t(F_N(\underline{z})) \ll M^{\varrho+\frac{mn}{d}}$, on déduit $(I)_{M+1}$ de la relation $-2[K:\mathbb{Q}]\,t(\alpha) \leqslant \mathrm{Log}\,|\alpha|$, vraie pour tout élément non nul α de K.

Comme $(I)_N$ est vrai par construction, on en déduit $(II)_M$ pour tout $M \geqslant N$, donc F_N est identique à 0. ◢

§ 3. – Propriétés arithmétiques de fonctions périodiques.

Nous étudions l'indépendance algébrique de fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}^n$, d'ordre fini, possédant n périodes communes $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes, et admettant un développement de Taylor à l'origine à coefficients algébriques. Nous montrons par exemple que s'il existe une telle fonction non constante, alors les coordonnées (dans $\mathbb{C}^n$) des n périodes ne sont pas toutes algébriques.

Notations.

Pour $\underline{h} = (h_1,\ldots,h_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $\underline{z} = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n$, on note :

$$|\underline{h}| = h_1+\ldots+h_n \;;$$
$$\underline{h} \geq \underline{0} \quad \text{si} \quad h_i \geq 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n \;;$$
$$\underline{h}! = h_1!\ldots h_n! \quad \text{si} \quad \underline{h} \geq \underline{0} \;;$$
$$\underline{z}^{\underline{h}} = z_1^{h_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{h_n} \quad \text{pour} \quad \underline{h} \geq \underline{0}\,.$$

Soient K un corps de nombres, et $\underline{w}_1,\ldots,\underline{w}_n$ n éléments $\mathbb{C}$-linéairement indépendants de $\mathbb{C}^n$. On considère l'ensemble $E_K(\underline{w}_1,\ldots,\underline{w}_n)$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}^n$, d'ordre fini, admettant $\underline{w}_1,\ldots,\underline{w}_n$ pour périodes, analytiques en $\underline{0}$, et dont le développement de Taylor à l'origine :

$$f(\underline{z}) = \sum_{\underline{h}\geq\underline{0}} a_{\underline{h}}\,\underline{z}^{\underline{h}}$$

a pour coefficients $a_{\underline{h}}$ des éléments de K vérifiant, pour tout $\underline{h} \in \mathbb{N}^n$,

(i) $\qquad \mathrm{Log}|\overline{a_{\underline{h}}}| \leqslant C(f)\ (|\underline{h}|+1)\ \mathrm{Log}(|\underline{h}|+1)$;

(ii) $\qquad v_1(f)^{|\underline{h}|+1}\left[(v_2(f)\underline{h})!\right]^{v_3(f)} . \ a_{\underline{h}}$ est entier sur $\mathbb{Z}$,

où $C(f)$ et $v_j(f)$ sont des entiers positifs (indépendants de $\underline{h}$).

Par exemple, si, pour $k = 1,\dots, n$, les coordonnées de $\underline{w}_k$ valent 0 ou $2\pi i$, alors les fonctions $e^{z_1},\dots,e^{z_n}$ appartiennent à $E_K(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n)$.

Il est facile de voir que $E_K(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n)$ est un anneau intègre (cf. lemme 3.3. ci-dessous).

THÉORÈME 3.1. - Soit L le corps des fractions de $E_K(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n)$, et soit ν un entier, $0 \leqslant \nu \leqslant n$. On suppose que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, les ν premières coordonnées de $\underline{w}_k$ sont algébriques. Alors le degré de transcendance de L sur K est inférieur ou égal à $n - \nu$.

En particulier ($\nu = 0$) le degré de transcendance de L sur K est toujours inférieur ou égal à n. D'autre part, dans le cas $\nu = n$, on obtient le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.2. - Si toutes les coordonnées de $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n$ sont algébriques, alors $E_K(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n) = K$.

Etant donnés des points $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n$ $\mathbb{C}$-linéairement indépendants de $\mathbb{C}^n$, on peut construire une fonction entière dans $\mathbb{C}^n$, transcendante sur $\mathbb{C}(\underline{z}) = \mathbb{C}(z_1,\dots,z_n)$, admettant $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n$ pour périodes et dont les dérivées à l'origine soient des entiers rationnels (une telle construction a été faite par Kurt MAHLER en une variable ; cf. Bull.Austral. Math. Soc. 5 (1971), p. 191-195). Si on choisit pour $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n$ des éléments de $\mathbb{C}^n$ à coordonnées toutes algébriques, alors, d'après le corollaire 3.2., une telle fonction n'est pas d'ordre fini.

Le théorème 3.1. généralise les résultats de SCHNEIDER [1] . Par exemple, le théorème de Schneider sur la transcendance de B(a,b) est une conséquence du corollaire 3.2. (cf. [1] , lemmes 5 et 6) ; ainsi, pour $n = 1$, $E_{\mathbb{Q}}(2i\pi)$ contient la fonction $\exp(z)$, donc π est transcendant. On obtient de la même manière la transcendance des périodes non nulles de fonctions elliptiques dont les invariants sont algébriques.

Notons que le corollaire 3.2. se réduit par récurrence au cas n=1; d'ailleurs, pour démontrer le théorème 3.1., il suffirait de considérer les deux cas $\nu=0$ et $\nu=n=1$ (mais il n'est pas plus difficile d'étudier directement le cas général).

Dans cette démonstration, on aura besoin des deux lemmes techniques suivants, qui montrent que $E_K(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n)$ est une K-algèbre.

LEMME 3.3. - *Pour*

$$f(\underline{z}) = \sum_{\underline{k}\geqslant \underline{o}} a_{\underline{k}}\, \underline{z}^{\underline{k}} \in E_K(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n) ,$$

on note

$$\mathrm{Log}\,|\overline{a_{\underline{k}}}| \leqslant \left\{C_1(f)|\underline{k}| + C_2(f)\right\} \mathrm{Log}(|\underline{k}|+1) + C_3(f) ,$$

pour tout $\underline{k}\geqslant\underline{0}$.

Si $P\in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_\mu]$ *a un degré* $\leqslant L_i$ *par rapport à* X_i, *et une hauteur* $\leqslant H(P)$ *pour* $F = P(f_1,\dots,f_\mu)$, $f_j\in E_K(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n)$, $(1\leqslant j\leqslant \mu)$, *on a*

$$F\in E_K(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n) ,$$

et

$$C_1(F)\leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant \mu} C_1(f_j) ;$$

$$C_2(F)\leqslant \sum_{j=1}^{\mu} L_j\,\left[C_2(f_j) + n\right] ;$$

$$C_3(F)\leqslant \sum_{j=1}^{\mu}\left[L_j\, C_3(f_j) + \mathrm{Log}(L_j+1)\right] + \mathrm{Log}\, H(P).$$

▶ La démonstration du lemme 3.3. se fait par récurrence, à partir des relations

$$\begin{cases} C_1(f_1+f_2)\leqslant \max\left\{C_1(f_1),\ C_1(f_2)\right\} ; \\ C_2(f_1+f_2)\leqslant \max\left\{C_2(f_1),\ C_2(f_2)\right\} ; \\ C_3(f_1+f_2)\leqslant \max\left\{C_3(f_1),\ C_3(f_2)\right\}+\mathrm{Log}\,2 ; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1(f_1f_2)\leqslant \max\left\{C_1(f_1),\ C_1(f_2)\right\} ; \\ C_2(f_1f_2)\leqslant C_2(f_1) + C_2(f_2) + n \\ C_3(f_1f_2)\leqslant C_3(f_1) + C_3(f_2) \end{cases}$$ ◀

LEMME 3.4. - *Soient* $f_1,\dots,f_\mu$ *des éléments de* $E_K(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n)$, *et soient* $P\in\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_\mu]$, $F = P(f_1,\dots,f_\mu)$.

Alors $v_1(F)$ *divise* $\prod_{i=1}^{\mu} v_1(f_i)$

$$v_2(F)\leqslant \max v_2(f_i)$$

$$v_3(F)\leqslant \max v_3(f_i).$$

Démonstration. ▶par récurrence◀

Démonstration du théorème 3.1.

▶ Supposons que les ν premières composantes de $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n$ soient algébriques (on notera δ un dénominateur commun). Montrons d'abord que le degré de transcendance du corps $L(z_1,\dots,z_\nu)$ sur $Q(z_1,\dots,z_\nu)$ est inférieur ou égal à $n-\nu$, c'est-à-dire que toute famille de $n-\nu+1$ éléments de L est algébriquement dépendante sur $Q(z_1,\dots,z_\nu)$.

Soient $f_1,\dots,f_{n+1}$ des éléments de $L(z_1,\dots,z_\nu)$, avec $f_i(\underline{z}) = z_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant \nu$, et $f_i \in E_K(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n)$ pour $\nu < i \leqslant n+1$.

Soit N un entier suffisamment grand, et soit

$$L = \left[N^{\frac{n}{n+1}} \,.\, \operatorname{Log} N\right].$$

On construit un polynôme non nul $P_N \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_{n+1}]$, de degré $\leqslant L$ en chaque variable, tel que la fonction $F = P_N(f_1,\dots,f_{n+1})$ vérifie

$$\partial^{|\underline{k}|} F(\underline{\ell}\,.\,\underline{w}) = 0$$

pour tout $\underline{\ell} = (\ell_1,\dots,\ell_n) \in \mathbb{Z}^n$, $(0 \leqslant \ell_j < [\operatorname{Log} N]$, $1 \leqslant j \leqslant n)$, et tout $\underline{k} = (k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{Z}^n$, $(\underline{k} \geqslant \underline{0}$, $|\underline{k}| = k_1+\dots+k_n < N)$.

(On a écrit $\underline{\ell}.\underline{w}$ pour $\ell_1\underline{w}_1+\dots+\ell_n\underline{w}_n$, et $\partial^{\underline{k}}$ pour $\dfrac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_n^{k_n}}$).

Cette construction revient à résoudre un système linéaire

$$\sum_{\underline{\lambda}} p(\underline{\lambda})\ \partial^{\underline{k}}(f_1^{\lambda_1}\dots f_{n+1}^{\lambda_{n+1}})\ (\underline{\ell}.\ \underline{w}) = 0,$$

de moins de $N^n (\operatorname{Log} N)^n$ équations à

$$(L+1)^{n+1} \geqslant N^n(\operatorname{Log} N)^{n+1} \quad \text{inconnues ;}$$

les coefficients de ce système s'écrivent

$$\sum_{\underline{K}\leqslant\underline{k}} \Big(\prod_{i=1}^{\nu} \frac{k_i!}{K_i!(k_i-K_i)!}\cdot\frac{\lambda_i!}{(\lambda_i-K_i)!}\,z_i^{\lambda_i-K_i}\Big)_{\underline{z}=\underline{\ell}.\underline{w}} \times \partial^{\underline{k}-\underline{K}}\,(f_{\nu+1}^{\lambda_{\nu+1}}\dots f_{n+1}^{\lambda_{n+1}})_{\underline{z}=\underline{0}}\ .$$

Notons $\quad v_1 = \prod_{\nu+1}^{n+1} v_1(f_j) \quad ; \quad v_2 = \max v_2(f_j)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad v_3 = \max v_3(f_j)$;

alors grâce au lemme 3.4.,

$$\delta^{\nu.L} \cdot v_1^{|\underline{k}|}\left[(v_2\ \underline{k})\ !\right]^{v_3} \cdot \partial^{\underline{k}}(f_1^{\lambda_1}\dots f_{n+1}^{\lambda_{n+1}})\ (\underline{\ell}.\ \underline{w})$$

est entier sur $\mathbb{Z}$; sa taille est majorée, grâce au lemme 3.3., par $O(N.\mathrm{Log}\ N)$.

Grâce au lemme de Siegel [4] , on peut choisir les $p(\underline{\lambda})$ dans $\mathbb{Z}$, non tous nuls, vérifiant

$$\mathrm{Log}\ \max_{\underline{\lambda}} |p(\underline{\lambda})| \ll N .$$

<u>Montrons que pour tout</u> $M \geqslant N$, <u>on a</u>

$$\partial^{\underline{h}}\ F(\underline{\ell},\ \underline{w}) = 0$$

<u>pour tout</u> $\underline{\ell} \in \mathbb{Z}^n$, $(0 \leqslant \ell_j < [\mathrm{Log}\ N])$, <u>et pour tout</u> $h \in \mathbb{Z}^n$, $\underline{h} \geqslant \underline{0}$, $|\underline{h}| < M$.

Supposons cette relation vraie au rang M ; soient $\underline{k} \in \mathbb{Z}^n$, $|\underline{k}| \leqslant M$, et $\underline{\ell} \in \mathbb{Z}^n$, $0 \leqslant \ell_j < [\mathrm{Log}\ N]$. Le nombre

$$\gamma = \partial^{\underline{k}}\ F(\underline{\ell}.\underline{w})$$

est algébrique ; un dénominateur de γ est

$$\delta^{\nu.L} \cdot v_1^{|\underline{k}|}\ \left[(v_2\ k)\ !\right]^{v_3} ,$$

et le maximum des valeurs absolues des conjugués de γ est majoré par $O(M\ \mathrm{Log}\ M)$. Donc

$$t(\gamma) \ll M\ \mathrm{Log}\ M.$$

Si γ n'est pas nul, comme $\gamma \in K$, on a

$$\mathrm{Log}|\gamma| \gg -M\ \mathrm{Log}\ M.$$

Majorons γ. Considérons des fonctions entières $g_1,\dots,g_{n+1}$, non nulles en $\underline{0}$, telles que g_i et $g_i\ f_i$ soient entières d'ordre fini (disons $\leqslant \rho$). (On choisit $g_1 = \dots = g_\nu = 1$). Le lemme 1.2., appliqué à la fonction

$$G = F \cdot \prod_{\nu+1}^{n+1} g_i^L ,$$

sur les disques de rayon $r = (\mathrm{Log}\ N)^2$ et $R = M^{\frac{1}{(n+2)\rho}}$, donne

$$\mathrm{Log}\ |G|_r \leqslant \mathrm{Log}\ |G|_R - \tfrac{1}{2}M(\mathrm{Log}\ N)^n\ \mathrm{Log}\ \frac{R}{3r} .$$

Or on a facilement

$$\operatorname{Log}|G|_R \ll L R^{\rho} + N \ll M ,$$

d'où

$$\operatorname{Log}|G|_r \ll - M(\operatorname{Log} M).(\operatorname{Log} N)^n .$$

Mais

$$\gamma = \partial^k F(\underline{\ell}.\underline{w}) = \frac{1}{\prod_{\nu+1}^{n+1} g_i(\underline{0})^L} \partial^{\underline{k}} G(\underline{\ell}.\underline{w}),$$

et les inégalités de Cauchy donnent

$$\operatorname{Log}|\partial^{\underline{k}} G(\underline{\ell}.\underline{w})| \leqslant M \operatorname{Log} M + \operatorname{Log}|G|_r - M \operatorname{Log} r ,$$

d'où

$$\operatorname{Log}|\gamma| \ll - M(\operatorname{Log} M)\ (\operatorname{Log} N)^n.$$

Par conséquent $\gamma = 0$; toutes les dérivées à l'origine de F sont donc nulles, et $f_1,\dots,f_{n+1}$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{Q}$.

Soient maintenant $h_1,\dots,h_d$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}^n$, admettant n périodes communes $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n$, $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes. Supposons que les fonctions $z_1,\dots,z_n$, $h_1,\dots,h_d$ soient algébriquement dépendantes sur $\mathbb{Q}$:

$$\sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}}(\underline{h}) \ .\ z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n} \equiv 0 ,$$

où les $a_{\underline{i}}(\underline{h})$ sont des polynômes en $\underline{h} = (h_1,\dots,h_d)$, non tous nuls. Soit $\underline{z}_o \in \mathbb{C}^n$; le polynôme

$$\sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}}(\underline{h}(\underline{z}_o)) \ .\ X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$$

s'annule en tous les points $\underline{z}_o + \underline{w}$, pour $\underline{w} \in \mathbb{Z}\,\underline{w}_1 + \dots + \mathbb{Z}\,\underline{w}_n$; on en déduit que ce polynôme est identiquement nul, donc

$a_{\underline{i}}(\underline{h}(\underline{z}_o)) = 0$ pour tout $\underline{i}$ et tout $\underline{z}_o$.

Par conséquent $h_1,\dots,h_d$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{Q}$.

D'où le théorème 3.1. ◀

§ 4. - Un lemme de Schwarz en plusieurs variables.

Nous utiliserons la norme euclidienne

$$\|\underline{z}\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)^{1/2} \quad \text{pour} \quad \underline{z} = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n ,$$

et nous appellerons boule de centre $\underline{a} \in \mathbb{C}^n$ et de rayon $R > 0$ l'ensemble

$$B_R(\underline{a}) = \left\{\underline{z} \in \mathbb{C}^n , \quad \|\underline{z} - \underline{a}\| \leqslant R\right\} .$$

Le cas $n=1$ étant bien connu, nous supposerons $n \geqslant 2$ (pour simplifier les notations).

Soient V un voisinage de $B_R(\underline{0})$, et u une fonction sousharmonique dans V ; la distribution $\mu = \frac{(n-2)!}{4\pi^n}\Delta u$ est alors positive dans V, c'est la mesure de Riesz associée à u (cf. par exemple [11] , théorème 1.2.1.); d'après une formule de Jensen généralisée (qui remonte en fait à H.Poincaré), si μ n'a pas de masse dans un voisinage de l'origine, la moyenne $\mathcal{M}_u(\underline{0},R)$ sur le bord de $B_R(\underline{0})$ vérifie

$$u(\underline{0}) = \mathcal{M}_u(\underline{0},R) - \int_0^R \nu(t)\,\frac{dt}{t} ,$$

avec $\nu(t) = \frac{2n-2}{t^{2n-2}}\,\mu(t)$, où $\mu(t) = \mu(B_t(\underline{0}))$ est la masse de la boule $B_t(\underline{0})$ $(0 < t \leqslant R)$ pour la mesure μ (cf. [11], théorème 1.2.2. ; voir aussi [12] , § 1).

D'autre part quand u est plurisousharmonique, la fonction ν est croissante sur $]0, R]$ (cf. [10_a] , p. 73, [10_b] , chap. 7, [11], p. 230, et [12] , lemme 1.4.) ; si on suppose toujours $\mu(\varepsilon) = 0$ pour ε suffisamment petit, on obtient, pour $0 < r \leqslant R$,

$$(4.1.) \qquad u(\underline{0}) \leqslant \sup_{\underline{z} \in B_R(\underline{0})} u(\underline{z}) - \nu(r)\,\mathrm{Log}\,\frac{R}{r} .$$

Quand f est une fonction analytique dans un voisinage d'une boule $B_r(\underline{a})$, la fonction $u(\underline{z}) = \mathrm{Log}\,|f(\underline{z} + \underline{a})|$ est plurisousharmonique dans un voisinage de la boule $B_r(\underline{0})$, et le nombre $\nu(r)$ est appelé <u>masse moyenne de</u> $f^{-1}(0)$ <u>dans</u> $B_r(\underline{a})$; nous le noterons $\Theta_f(\underline{a},r)$.

Nous utiliserons la propriété suivante ([11], chap. IV, § 2) :

(4.2.) Le nombre $\Theta_f(\underline{a}) = \lim\limits_{r\to 0} \Theta_f(\underline{a},r)$ est le nombre de Lelong de f au point $\underline{a}$, c'est-à-dire la multiplicité du zéro $\underline{z} = \underline{a}$ de f (c'est le degré du premier polynôme homogène non nul dans le développement de Taylor de f au point $\underline{a}$).

Nous allons généraliser (1.1.) au cas d'une fonction ayant de nombreux zéros suffisamment espacés. Nous noterons $\|f\|_r$ le maximum de $f(\underline{z})$ pour $\underline{z} \in B_r(\underline{0})$.

PROPOSITION 4.3. - Soit F une fonction analytique dans un voisinage d'une boule $B_R(\underline{0})$ dans $\mathbb{C}^n$, admettant des zéros $\underline{z}_1,\ldots,\underline{z}_s$ (comptés avec leur ordre de multiplicité) dans une boule $B_\rho(\underline{0})$, avec $\rho \leqslant R$. Soit δ un nombre réel vérifiant

$$2\delta \leqslant \min_{\underline{z}_j \neq \underline{z}_k} \|\underline{z}_j - \underline{z}_k\| .$$

Alors on a, pour $0 \leqslant r \leqslant R$,

$$\log \|F\|_r \leqslant \operatorname{Log} \|F\|_R - s . \left(\frac{\delta}{r+\rho+\delta}\right)^{2n-2} . \operatorname{Log} \frac{R-r}{r+\rho+\delta}$$

Démonstration de la proposition 4.3.

Il n'y a pas de restriction à supposer $R > 2r + \rho + \delta$ (puisque le principe du maximum donne $\|F\|_r \leqslant \|F\|_R$) et $\|F\|_r \neq 0$. Soit $\underline{w} \in B_r(\underline{0})$ tel que $|F(\underline{w})| = \|F\|_r$. La fonction $f(\underline{z}) = F(\underline{z} + \underline{w})$ est analytique dans $B_{R-r}(\underline{0})$, et s'annule aux points $\underline{\zeta}_j = \underline{z}_j + \underline{w}$, qui sont dans $B_{r+\rho}(\underline{0})$. Notons $\mu = \frac{(n-2)!}{4\pi^n} \Delta \operatorname{Log} |f|$. Comme $\underline{w} \notin F^{-1}(0)$, on a $\mu(B_\varepsilon(\underline{0})) = 0$ pour ε suffisamment petit, et , d'après (4.1.),

$$\operatorname{Log} |f(\underline{0})| \leqslant \operatorname{Log} \|f\|_{R-r} - \Theta_f(\underline{0}, r+\rho+\delta) \operatorname{Log} \frac{R-r}{r+\rho+\delta} .$$

La croissance des fonctions $t \mapsto \Theta_f(\underline{\zeta}_j, t)$, pour $0 < t \leqslant \delta$, montre que l'on a, grâce à (4.2.) :

$$\mu(B_\delta(\underline{\zeta}_j)) \geqslant \frac{1}{2n-2} \delta^{2n-2} . \Theta_f(\underline{\zeta}_j) ;$$

mais les boules $B_\delta(\underline{\zeta}_j)$ sont deux à deux disjointes, et contenues dans $B_{r+\delta+\rho}(\underline{0})$, donc

$$\mu(B_{r+\delta+\rho}(0)) \geqslant \frac{1}{2n-2} \delta^{2n-2} s ,$$

d'où

$$\Theta_f(\underline{0}, r+\rho+\delta) \geqslant \left(\frac{\delta}{r+\rho+\delta}\right)^{2n-2} . s .$$

Enfin
$$\operatorname{Log} \|f\|_{R-r} \leqslant \operatorname{Log} \|F\|_R ,$$

d'où la proposition .◀

§ 5. - Un deuxième critère.

Si, dans la démonstration du théorème 2.1., on remplace le lemme 1.2. par la proposition 4.3., on obtient le résultat suivant [9] .

THÉORÈME 5.1. - Soient $\ell, \lambda, \rho_1,\dots,\rho_d$ des nombres réels positifs, K un corps de nombres, $(S_N)_{N\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de $\mathbb{C}^n$, $f_1,\dots,f_d$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}^n$, d'ordre (strict) inférieur ou égal à $\rho_1,\dots,\rho_d$ respectivement, et $g_1,\dots,g_d$ des fonctions entières dans $\mathbb{C}^n$, d'ordre (strict) inférieur ou égal à $\rho_1,\dots,\rho_d$ respectivement, telles que $g_1f_1,\dots,g_df_d$ soient entières dans $\mathbb{C}^n$.

On suppose

$$\max_{z\in S_N}\|z\|\leq N \ ; \ \mathrm{Card}\, S_N \gg N^{\ell} \ ; \ \min_{\substack{u\neq v\\ u,v\in S_N}}\|u-v\|\gg N^{-\lambda}, \text{ pour } N\to+\infty;$$

$$h(z)\neq 0 \text{ et } f(z)\in K \text{ pour } z\in S_N, \text{ et}$$

$$\max_{z\in S_N}\left(t(f_i(z))\ ;\ \mathrm{Log}\frac{1}{|h_i(z)|}\right)\ll N^{\rho_i} \quad \text{pour } N\to+\infty.$$

Si l'inégalité

$$(d-1)\ell > \rho_1+\dots+\rho_d+2d(n-1)(\lambda+1)$$

est satisfaite, alors $f_1,\dots,f_d$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{Q}$.

On remarquera que les paramètres λ et ℓ du théorème 5.1. sont liés à n par la relation

$$\lambda \geq \max\left\{0, \frac{\ell}{2n} - 1\right\}.$$

Démonstration du théorème 5.1.

▶ On reprend la démonstration du théorème 2.1., en remplaçant m par ℓ/n, et $(II)_M$ par

$$\mathrm{Log}\sup_{\underline{z}\in S_{M+1}}|G_N(z)|\ll -M^{\ell-2(n+1)(\lambda+1)} .$$

L'implication $(I)_M \Longrightarrow (II)_M$ est une conséquence de la proposition 4.3. ◀

§ 6. - Valeurs algébriques de sous-groupes analytiques de variétés de groupe.

Soit G une variété de groupe (ou groupe algébrique connexe) définie sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques. Soit $\varphi: \mathbb{C}^n \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$ un homomorphisme différentiable du groupe additif $\mathbb{C}^n$ dans la variété G, dont la différentielle à l'origine est injective; il existe alors une application linéaire injective $\mathcal{L}$ de $\mathbb{C}^n$ dans l'espace tangent à l'origine de G, telle que $\varphi = \exp_G \circ \mathcal{L}$. On dit que est un sous-groupe à n paramètres de G, et on appelle dimension algébrique de φ la dimension de la plus petite sous-variété de groupe de G contenant l'image de φ (cette dimension est supérieure ou égale à n).

Le théorème 5.1. permet de majorer la dimension algébrique d'un sous-groupe à n paramètres d'une variété linéaire ou abélienne, en fonction du nombre de points algébriques $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants que ce sous-groupe contient. Nous étudierons ici les valeurs de tels sous-groupes en des points algébriques (l'étude générale est faite dans [9] , où les résultats de [6] sont améliorés).

THÉORÈME 6.1. - Soient G une variété de groupe définie sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques, $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$ un sous-groupe à n paramètres de G, de dimension algébrique $\geqslant \delta$, et $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_\ell$ des éléments $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de $\overline{\mathbb{Q}}^n$, tels que

$$\varphi(\underline{a}_j) \in G_{\overline{\mathbb{Q}}} \quad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant \ell.$$

Pour $N \geqslant 1$, on note

$$\Gamma_N = \left\{ k_1 \underline{a}_1 + \ldots + k_\ell \underline{a}_\ell \; ; \; k_j \in \mathbb{Z} \; , \; |k_j| \leqslant N \right\},$$

et on suppose qu'il existe un nombre réel λ tel que

$$\min_{\substack{\underline{z} \in \Gamma_N \\ \underline{z} \neq \underline{0}}} \|\underline{z}\| \gg N^{-\lambda} \quad \text{pour } N \longrightarrow +\infty$$

Alors

1. Si G est une variété linéaire, on a

$$\ell(\delta - 1) \leqslant \delta - n + 2\delta(n-1)(\lambda+1) \; ;$$

2. Si G est une variété abélienne, on a

$$\ell(n+\delta-1) \leqslant 2\delta + 2(n+\delta)(n-1)(\lambda+1).$$

COROLLAIRE 6.2. - Sous les hypothèses du théorème 6.1., quand G est une variété abélienne, on a

$$\lambda \geqslant \frac{\ell}{2n} - 1 + \frac{\ell - 2n}{4n(n-1)}$$

(en effet, avec $\delta = n$, on obtient $4n(n-1)\lambda \geqslant (2n-1)(\ell-2n)$.

Démonstration du théorème 6.1.

▶ Le cas linéaire [9] est facile : on considère δ-n fonctions $f_{n+1},\dots,f_\delta$, coordonnées de φ, telles que $z_1,\dots,z_n,f_{n+1},\dots,f_\delta$ soient algébriquement indépendantes. Comme les f_j sont données par des polynômes exponentiels, elles sont d'ordre $\leqslant 1$, et la vérification des hypothèses du théorème 5.1. (avec $\rho_1 = \dots = \rho_n = \varepsilon$; $\rho_{n+1} = \dots = \rho_\delta = 1$; $h_i(\underline{z}) = 1$) ne présente aucune difficulté.

Pour démontrer le cas abélien, on considère des coordonnées projectives de φ, soient $(\varphi_0,\dots,\varphi_\mu)$, avec $\varphi_0(\underline{0}) \neq 0$. On démontre d'abord que le degré de transcendance sur $\mathbb{C}$ du corps

$$\mathbb{C}(z_1,\dots,z_n\,,\ \frac{\varphi_1}{\varphi_0}\,,\ \dots\,,\ \frac{\varphi_\mu}{\varphi_0}\,)$$

est supérieur ou égal à $n+\delta$; deux démonstrations de ce résultat m'ont été communiquées ; l'une par Serge LANG, montre que, quand $B\times A$ est un produit de variétés de groupes tel que toute application rationnelle de B dans A soit constante, et quand G est une sous-variété de groupe du produit, dont la projection sur chaque facteur est surjective, alors $G = B\times A$; on applique ceci à la fermeture Zariskienne du graphe du sous-groupe à n paramètres.

L'autre, par David Masser, consiste à se ramener au cas n=1, puis à utiliser la périodicité de la fonction théta de la variété abélienne, ainsi que le principe des tiroirs.

Considérons donc $\delta+1$ coordonnées projectives $\varphi_0,\dots,\varphi_\delta$ de φ, telles que les fonctions

$$z_1,\dots,\ z_n,\frac{\varphi_1}{\varphi_0}\,,\ \dots,\ \frac{\varphi_\delta}{\varphi_0}$$

soient algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$. Soit

$$\Theta : \mathbb{C}^D \longrightarrow A$$

une application théta de la variété abélienne A, homomorphisme analytique surjectif dont le noyau est un réseau Λ de $\mathbb{C}^D$ (autrement dit un sous-groupe à D paramètre, où D est la dimension de A). Comme φ est un sous-groupe à n paramètres, il existe une application linéaire injective $L : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^D$ telle que

$$\varphi = \Theta \circ L.$$

Considérons les coordonnées projectives $(\theta_o,\dots,\theta_\mu)$ de Θ, telles que $\varphi_i = \theta_i \circ L$, $0 \leqslant i \leqslant \delta$. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{C}^D$ telle que la fonction

$$\psi : \mathbb{C}^D \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\underline{z} \longmapsto |\theta_o(\underline{z})|^2 \exp q(z)$$

admette Λ pour groupe de périodes. Soit Δ une boule fermée de $\mathbb{C}^D$, de centre $\underline{0}$ et de rayon >0, ne contenant aucun zéro de θ_o . Si

$$s : \mathbb{C}^D \text{---} \mathbb{C}^D/\Lambda$$

désigne la surjection canonique, la fonction $\frac{1}{|\psi(z)|}$ est bornée sur $s^{-1} \circ s\,(\Delta)$.

Notons

$$S_N = \left\{\underline{z}=k_1\underline{a}_1+\dots+k\,\underline{a}_\ell ;\ -N \leqslant k_j \leqslant N \ ;\ L(\underline{z})\in s^{-1} \circ s\,(\Delta)\right\}.$$

On aura donc

$$\operatorname{Log} \max_{\underline{z}\in S_N} \left|\frac{1}{\varphi_o(\underline{z})}\right| \ll N^2 \quad \text{pour} \quad N \longrightarrow +\infty .$$

Grâce au principe de Dirichlet, on a [9]

$$\operatorname{Card} \ S_N \gg N^\ell ;$$

enfin la forme quadratique de Néron Tate permet d'obtenir [4] :

$$\max_{\underline{z}\in S_N} \ t\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_o}(\underline{z})\right) \ll N^2 \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant \nu \ .$$

On applique alors le théorème 5.1. aux fonctions

$$z_1,\dots,z_n, \frac{\varphi_1}{\varphi_o}, \dots, \frac{\varphi_\delta}{\varphi_o} ,$$

avec $\rho_1 = \dots = \rho_n = 0$, $\rho_{n+1} = \dots = \rho_{n+\delta} = 2$, $d = n + \delta$; on choisit pour K un corps de nombres sur lequel A est définie, contenant les coordonnées des $\underline{a}_j$, et tel que $\varphi(\underline{a}_j) \in A_K$. ◀

Nous allons appliquer le théorème 5.1. pour améliorer le théorème 6.1. dans le cas où le sous-groupe engendré par $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_\ell$ est très bien distribué, c'est-à-dire quand les hypothèses sont satisfaites pour tout réel λ vérifiant $\lambda > \max\left\{0, \frac{\ell}{2n} - 1\right\}$.

THÉORÈME 6.2. - Soient G une variété de groupe définie sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques, $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$ un sous-groupe à n paramètres de G qui n'est pas une fonction rationnelle de $\underline{z}$, et $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_\ell$ des éléments de $\overline{\mathbb{Q}}^n$, $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, dont les images par φ appartiennent au groupe $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ des points algébriques de G.

On suppose que, pour tout réel

$\lambda > \max\left\{0, \frac{\ell}{2n} - 1\right\}$, on a

$$\min_{\substack{\underline{z}\neq 0\\ \underline{z}\in\Gamma_N}} \|\underline{z}\| \gg N^{-\lambda},$$

où

$$\Gamma_N = \left\{k_1\,\underline{a}_1 + \ldots + k_\ell\,\underline{a}_\ell\ ;\ k_i \in \mathbb{Z}\ ,\ |k_i| \leqslant N\right\}.$$

Alors on a

$$\ell \leqslant 2n.$$

Démonstration du théorème 6.2.

► (On peut remarquer que, si G est une variété abélienne, le corollaire 6.2. donne immédiatement le résultat).

Si G est une variété linéaire, comme $\varphi(\underline{z})$ n'est pas une fonction rationnelle de $\underline{z}$, l'une des coordonnées affine de φ, soit f_1, est une fonction transcendante sur $\mathbb{C}(\underline{z}) = \mathbb{C}(z_1,\ldots, z_n)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 5.1. aux fonctions $z_1,\ldots,z_n$, $f_1(\underline{z})$.

Considérons maintenant le cas d'une variété de groupe quelconque. Il existe un sous-groupe linéaire maximal L de G tel que G/L soit une variété abélienne A définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Notons π: G $\to$ A l'homomorphisme canonique; l'application π est algébrique, c'est-à-dire envoie $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ dans $A_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Notons π^* l'homomorphisme induit sur les espaces tangents :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & G \arrow[r, "\pi"] & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_e(L) \arrow[r] \arrow[u, "\exp_L"] & T_e(G) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[u, "\exp_G"] & T_e(A) \arrow[r] \arrow[u, "\exp_A"] & 0
\end{tikzcd}$$

Soit $\mathscr{L}$: $\mathbb{C}^n \to T_e(G)$ l'application linéaire telle que $\varphi = \exp_G \circ \mathscr{L}$.

Si l'image de $\mathscr{L}$ est contenue dans $T_e(L)$, alors l'image de φ est contenue dans L, et on est ramené au cas linéaire.

Supposons donc $\pi^* \circ \mathcal{L} \neq 0$. Considérons l'application $\psi = \exp_A \circ \pi^* \circ \mathcal{L}$ de $\mathbb{C}^n$ dans $A_{\mathbb{C}}$. (Cette application n'est pas en général, un sous-groupe à n paramètres de A ; c'est pourquoi nous allons encore une fois revenir au théorème 5.1.). Considérons des coordonnées projectives $(\psi_0,\ldots,\psi_\nu)$ de ψ avec $\psi_0 \not\equiv 0$. Comme ψ est composée d'une application théta.

$$\Theta : \mathbb{C}^D \longrightarrow A_{\mathbb{C}}$$

(où D = dim A) et d'une application linéaire non nulle $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^D$ (provenant d'un isomorphisme $T_e(A) \simeq \mathbb{C}^D$), l'une des fonctions $\frac{\psi_1}{\psi_0},\ldots,\frac{\psi_\nu}{\psi_0}$, soit $g(\underline{z})$, est transcendante sur $\mathbb{C}(\underline{z})$.

On applique **alors** le théorème 5.1. aux fonctions $z_1,\ldots,z_n$, $g(\underline{z})$. Les calculs à faire sont essentiellement les mêmes que dans la démonstration du théorème 6.1. dans le cas abélien. ◄

RÉFÉRENCES

L'étude des propriétés arithmétiques des fonctions de plusieurs variables est développée dans les articles suivants, présentés par ordre chronologique.

[1] SCHNEIDER (Th.). - Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale; J.reine angew. Math., 183 (1941), 110-128.

[2] LANG (S.). - Algebraic values of meromorphic functions ; Topology, 3 (1965), 183-191.

[3] SERRE (J.-P.). - Dépendance d'exponentielles p-adiques. Sém. Delange-Pisot-Poitou, 7e année (1965-66), n° 15.

[4] LANG (S.). - Introduction to transcendental numbers. Addison Wesley, 1966 , Chapitre IV.

[5] BAKER (A.). - A note on integral integer-valued functions of several variables ; Proc. Camb. Phil. Soc., 63 (1967), 715-720.

[6] BOMBIERI (E.) and LANG (S.). - Analytic subgroups of group varieties; Invent. Math. 11 (1970), 1-14.

[7] BOMBIERI (E.). - Algebraic values of meromorphic maps ; Inventiones Math., 10 (1970), 267-287.

[8] LELONG (P.). - Valeurs algébriques d'une application méromorphe ; Sém. Bourbaki, 23e année, 1970-71, n° 384, Lecture-Notes in Math., vol. 244 (1971).

[9] WALDSCHMIDT (M.). - Dimension algébrique de sous-groupes analytiques de variétés de groupe ; Annales Instit. Fourier, 25 (1975), p. 23-33.

D'autre part, les zéros de fonctions analytiques de plusieurs variables complexes sont étudiés dans les ouvrages suivants (où l'on trouvera des bibliographies plus détaillées, avec en particulier des références aux travaux de P.LELONG et W.STOLL).

[10] LELONG (P.). - a/ Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives, Gordon Breach, New-York, et Dunod, Paris, 1967.

b/ Fonctions entières et fonctionnelles analytiques, Presses de Montréal, 1968.

[11] RONKIN (L.I.). - Introduction to the theory of entire functions of several variables; Transl. Math. Monographs, vol. 44, A.M.S., 1974.

[12] STOLL (W.). - Normal families of non negative divisors ; Math.Zeitschr. 84, p. 154-218, 1964.

Enfin, la théorie des L^2 estimées qu'utilise BOMBIERI dans [7] est exposée in extenso dans le livre suivant :

[13] HÖRMANDER (L.). - An introduction to complex analysis in several variables; North-Holland, Mathematical Library, vol.7, second édition, 1973.

Michel W A L D S C H M I D T
Analyse complexe et Géométrie (Lab.Associé au C.N.R.S., n° 213)
Université Pierre et Marie Curie (PARIS VI)
Mathématiques, Tour 45-46
4, Place Jussieu
75230 - PARIS CEDEX 05