"Colloque de la Société Mathématique de Tunisie" Mahdia, mars 2004

Périodes
d'après M. Kontsevich et D. Zagier

Michel Waldschmidt

http://www.math.jussieu.fr/~miw/

Périodes

M. Kontsevich et D. Zagier – *Periods.*
Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond.
Engquist, B.; Schmid, W., Eds., Springer (2000), 771–808.
http://www.ihes.fr/PREPRINTS/M01/Resu/resu-M01-22.html

Une période est un nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire sont des valeurs d'intégrales absolument convergentes de fonctions rationnelles avec des coefficients rationnels, sur des domaines de $\mathbf{R}^n$ définis par des égalités ou des inégalités polynomiales ayant des coefficients rationnels.

Périodes

M. Kontsevich et D. Zagier – *Periods.*
Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond.
Engquist, B.; Schmid, W., Eds., Springer (2000), 771–808.
`http://www.ihes.fr/PREPRINTS/M01/Resu/resu-M01-22.html`

Une période est un nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire sont des valeurs d'intégrales absolument convergentes de fonctions rationnelles avec des coefficients rationnels, sur des domaines de $\mathbf{R}^n$ définis par des égalités ou des inégalités polynomiales ayant des coefficients rationnels.

L'ensemble $\mathcal{P}$ des périodes est une sous-$\overline{\mathbf{Q}}$-algèbre de $\mathbf{C}$.

Exemples:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &= \int_{2x^2 \leq 1} dx, \\
\pi &= \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy, \\
\log 2 &= \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}, \\
\zeta(2) &= \int_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2} = \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}
$$

Relations entre périodes

$\boxed{1}$ Additivité

$$\int_a^b \bigl(f(x)+g(x)\bigr)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$\boxed{2}$ Changement de variables

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f\bigl(\varphi(u)\bigr)\varphi'(u)du.$$

$\boxed{3}$ Newton–Leibniz–Stokes

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Conjecture *(Kontsevich–Zagier).* *Si une période a deux représentations, alors on peut passer de l'une à l'autre en utilisant uniquement les règles* $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ *et* $\boxed{3}$ *dans lesquelles toutes les fonctions et tous les domaines d'intégration sont algébriques avec des coefficients algébriques.*

$$
\begin{aligned}
\pi &= \int_{x^2+y^2\le 1} dxdy \\
&= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.
\end{aligned}
$$

Plan

$\boxed{1}$ Transcendance de valeurs d'intégrales définies

Genre 0: logarithmes de nombres algébriques

Genre 1: Intégrales elliptiques

Genre ≥ 2: Intégrales abéliennes

$\boxed{2}$ Valeurs de la fonction Gamma d'Euler

$\boxed{3}$ Valeurs de la fonction zêta de Riemann

$\boxed{4}$ Fonctions hypergéométriques

$\boxed{5}$ Périodes exponentielles

Transcendance de valeurs d'intégrales définies

F. Lindemann (1882) – *Über die Ludolph'sche Zahl.*

Le nombre π *est transcendant.*

Transcendance de valeurs d'intégrales définies

F. Lindemann (1882) – *Über die Ludolph'sche Zahl.*
Le nombre π *est transcendant.*

Ch. Hermite (1873) + F. Lindemann (1882) – *Si* α *est un nombre algébrique non nul, et si* $\log\alpha$ *est une détermination non nulle de son logarithme, alors le nombre* $\log\alpha$ *est transcendant.*

Transcendance de valeurs d'intégrales définies

F. Lindemann (1882) – *Über die Ludolph'sche Zahl.*
Le nombre π *est transcendant.*

Ch. Hermite (1873) + F. Lindemann (1882) – *Si* α *est un nombre algébrique non nul, et si* $\log \alpha$ *est une détermination non nulle de son logarithme, alors le nombre* $\log \alpha$ *est transcendant.*

A.O. Gelfond et Th. Schneider (1932) (Septième problème de Hilbert) – *Si* $\log \alpha_1$ *et* $\log \alpha_2$ *sont deux logarithmes non nuls de nombres algébriques, le quotient* $(\log \alpha_1)/(\log \alpha_2)$ *est soit rationnel, soit transcendant.*

A. Baker (1968) – *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers*

Si $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ *sont des logarithmes* $\mathbf{Q}$*-linéairement indépendants de nombres algébriques, alors* $1, \log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ *sont linéairement indépendants sur le corps* $\overline{\mathbf{Q}}$ *des nombres algébriques.*

Exemple:

le nombre

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\log 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

est transcendant.

A.J. van der Poorten (1970) – *On the arithmetic nature of definite integrals of rational functions.*

Soient P *et* Q *des polynômes à coefficients algébriques vérifiant* $\deg P < \deg Q$ *et soit* γ *un chemin fermé, ou bien un chemin dont les extrémités sont algébriques ou infinies. Si l'intégrale*

$$\int_\gamma \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

existe, alors elle est soit nulle, soit transcendante.

Intégrales elliptiques

Th. Schneider
(1934) – *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen.*
(1937) – *Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale.*
Transcendance d'intégrales elliptiques de première ou de seconde espèce.

Soient a et b deux nombres algébriques réels; soit $\mathcal{E}_{ab}$ l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On pose

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Soient (x_0, y_0) et (x_1, y_1) deux points sur $\mathcal{E}_{ab}$ ayant des coordonnées algébriques. *Alors la longueur de l'arc*

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{a^2 - \epsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx$$

est soit nulle, soit un nombre transcendant.

Soient a un nombre algébrique non nul. On désigne par $\mathcal{L}_a$ la lemniscate

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2).$$

On pose

$$t = \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}.$$

Soient (x_0, y_0) et (x_1, y_1) deux point sur $\mathcal{L}_a$ ayant des coordonnées algébriques réelles. *Alors la longueur de l'arc*

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^4}}\, dt$$

est soit nulle, soit un nombre transcendant.

Exemples numériques:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3-4x}} = \frac{1}{4}\mathrm{B}(1/4,1/2) = \frac{\Gamma(1/4)^2}{4\sqrt{2\pi}}$$

et

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3-4}} = \frac{1}{6}\mathrm{B}(1/6,1/2) = \frac{\Gamma(1/3)^3}{2^{4/3}\pi}$$

sont des nombres transcendants.

Intégrales abéliennes

Th. Schneider (1940) – *Zur Theorie des Abelschen Funktionen und Integrale.*

Soient a *et* b *des nombres rationnels non entiers tels que* $a+b$ *ne soit pas non plus un entier. Alors le nombre*

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

est transcendant.

Remarque. Pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$ avec $p>0$ et $q>0$, le nombre $\Gamma(p/q)^q$ est une période.

Intégrales abéliennes

Th. Schneider (1940), S. Lang (1960's), D.W. Masser (1980's).

G. Wüstholz (1989) – *Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen.*

Extension du théorème de Baker aux groupes algébriques commutatifs.

Transcendance et indépendance linéaire sur le corps des nombres algébriques d'intégrales abéliennes de première, seconde ou troisième espèce.

G.V. Chudnovskij (1976) – *Algebraic independence of constants connected with exponential and elliptical functions*

Théorème *(G.V. Chudnovskij). Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2 et g_3. Soit ω une période non nulle de $\wp$ et soit η la quasi-période associée de la fonction zêta de Weierstrass ζ:*

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \qquad \zeta' = -\wp, \quad \zeta(z+\omega) = \zeta(z) + \eta.$$

Alors deux au moins des nombres

$$g_2,\ g_3,\ \omega/\pi,\ \eta/\pi$$

sont algébriquement indépendants.

Corollaire. *En considérant la courbe elliptique* $y^2 = 4x^3 - 4x$ *on déduit l'indépendance algébrique des deux nombres*

$$\Gamma(1/4) \quad \textit{et} \quad \pi.$$

Avec la courbe $y^2 = 4x^3 - 4$ *on obtient l'indépendance algébrique de*

$$\Gamma(1/3) \quad \textit{et} \quad \pi.$$

Yu.V. Nesterenko (1996) – *Modular functions and transcendence questions*

$$\begin{aligned} P(q) &= E_2(q) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n}, \\ Q(q) &= E_4(q) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1-q^n}, \\ R(q) &= E_6(q) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^n}{1-q^n}. \end{aligned}$$

Théorème *(Yu.V. Nesterenko.)* *Soit $q \in \mathbf{C}$ un nombre complexe satisfaisant $0 < |q| < 1$. Alors trois au moins des quatre nombres*

$$q, \; P(q), \; Q(q), \; R(q)$$

sont algébriquement indépendants.

Lien avec les fonctions elliptiques

Soit $\wp$ une fonction elliptique d'invariants g_2 et g_3 et de périodes fondamentales ω_2, ω_1. Posons $\tau = \omega_1/\omega_2$, $q = e^{2i\pi\tau}$,

$$J(q) = j(\tau) = 1728 \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}.$$

Remarque. Le nombre

$$\Delta(q) = \frac{1}{1728}\bigl(Q(q)^3 - R(q)^2\bigr)$$

vérifie

$$J(q) = \frac{Q(q)^3}{\Delta(q)} \text{ et } \Delta(q) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}.$$

LEMNISCATE $\quad y^2 = 4x^3 - 4x$

$$g_2 = 4, \quad g_3 = 0, \quad j = 1728, \quad \tau = i, \quad q = e^{-2\pi},$$

$$\omega_1 = \frac{\Gamma(1/4)^2}{\sqrt{8\pi}} = 2.6220575542\dots$$

$$P(e^{-2\pi}) = \frac{3}{\pi}, \qquad Q(e^{-2\pi}) = 3\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^4,$$

$$R(e^{-2\pi}) = 0, \qquad \Delta(e^{-2\pi}) = \frac{1}{2^6}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{12}.$$

ANHARMONIQUE $\quad y^2 = 4x^3 - 4$

$$g_2 = 0, \quad g_3 = 4, \quad j = 0, \quad \tau = \varrho, \quad q = -e^{-\pi\sqrt{3}},$$

$$\omega_1 = \frac{\Gamma(1/3)^3}{2^{4/3}\pi} = 2.428650648\ldots$$

$$P(-e^{-\pi\sqrt{3}}) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}, \qquad Q(-e^{-\pi\sqrt{3}}) = 0,$$

$$R(-e^{-\pi\sqrt{3}}) = \frac{27}{2}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^6, \qquad \Delta(-e^{-\pi\sqrt{3}}) = -\frac{27}{256}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{12}.$$

Corollaire. *Les trois nombres*

$$\Gamma(1/4), \quad \pi \quad \textit{et} \quad e^{\pi}$$

sont algébriquement indépendants, et il en est de même de

$$\Gamma(1/3), \quad \pi \quad \textit{et} \quad e^{\pi\sqrt{3}}.$$

Lindemann: *le nombre* $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ *est transcendant.*

Lindemann: *le nombre* $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ *est transcendant.*

Chacun des trois nombres $\Gamma(1/2)$, $\Gamma(1/3)$ et $\Gamma(1/4)$ est transcendant.

Ce sont les seules valeurs de la fonction Gamma en des points rationnels de l'intervalle $(0,1/2]$ dont on connaisse la nature arithmétique.

Lindemann: *le nombre* $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ *est transcendant.*

Chacun des trois nombres $\Gamma(1/2)$, $\Gamma(1/3)$ et $\Gamma(1/4)$ est transcendant.

Problème ouvert: *le nombre* $\Gamma(1/5)$ *est-il transcendant?*

Lindemann: *le nombre* $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ *est transcendant.*

Chacun des trois nombres $\Gamma(1/2)$, $\Gamma(1/3)$ et $\Gamma(1/4)$ est transcendant.

Problème ouvert: *le nombre* $\Gamma(1/5)$ *est-il transcendant?*

Remarque. La courbe de Fermat d'exposant 5, à savoir $x^5 + y^5 = 1$, est de genre 2. Sa Jacobienne est une surface abelienne.

Lindemann: *le nombre* $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ *est transcendant.*

Chacun des trois nombres $\Gamma(1/2)$, $\Gamma(1/3)$ et $\Gamma(1/4)$ est transcendant.

Problème ouvert: *le nombre* $\Gamma(1/5)$ *est-il transcendant?*

Remarque. La courbe de Fermat d'exposant 5, à savoir $x^5 + y^5 = 1$, est de genre 2. Sa Jacobienne est une surface abelienne.

Conjecture. *Trois au moins des quatre nombres*

$$\Gamma(1/5), \quad \Gamma(2/5), \quad \pi \quad \textit{et} \quad e^{\pi\sqrt{5}}$$

sont algébriquement indépendants.

Relations Standard

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),$$

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)},$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(a + \frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{-na+(1/2)} \Gamma(na).$$

Posons
$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(z).$$
D'après la formule de multiplication de Gauss et Legendre, pour tout entier positif N et tout nombre complexe z satisfaisant $Nz \not\equiv 0 \pmod{\mathbf{Z}}$, on a
$$\prod_{i=0}^{N-1} G\left(z + \frac{i}{N}\right) = N^{(1/2)-Nz}G(Nz).$$

La fonction Gamma n'a pas de zéros. Elle définit une application de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}^\times$. On la restreint à $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ puis on la compose avec l'application canonique $\mathbf{C}^\times \to \mathbf{C}^\times / \overline{\mathbf{Q}}^\times$. L'application qui en résulte est périodique de période 1, ce qui fournit une application

$$\overline{G} : \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{Z}} \setminus \{0\} \to \frac{\mathbf{C}^\times}{\overline{\mathbf{Q}}^\times}$$

qui est une *distribution* impaire sur $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \setminus \{0\}$:

$$\prod_{i=0}^{N-1} \overline{G}\left(a + \frac{i}{N}\right) = \overline{G}(Na) \quad \text{pour} \quad a \in \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{Z}} \setminus \{0\}$$

et

$$\overline{G}(-a) = \overline{G}(a)^{-1}.$$

Conjecture *(Rohrlich)*. $\overline{G}$ est la distribution impaire universelle à valeurs dans un groupe où la multiplication par 2 est inversible.

Conjecture *(Rohrlich)*. $\overline{G}$ est la distribution impaire universelle à valeurs dans un groupe où la multiplication par 2 est inversible.

Cela signifie: toute relation multiplicative de la forme

$$\pi^{b/2} \prod_{a \in \mathbf{Q}} \Gamma(a)^{m_a} \in \overline{\mathbf{Q}}$$

avec b et m_a dans $\mathbf{Z}$ se déduit des relations standard.

Conjecture *(Rohrlich)*. $\overline{G}$ est la distribution impaire universelle à valeurs dans un groupe où la multiplication par 2 est inversible.

Cela signifie: toute relation multiplicative de la forme

$$\pi^{b/2} \prod_{a \in \mathbf{Q}} \Gamma(a)^{m_a} \in \overline{\mathbf{Q}}$$

avec b et m_a dans $\mathbf{Z}$ se déduit des relations standard.

Exemple: (P. Das)

$$\frac{\Gamma(1/3)\Gamma(2/15)}{\Gamma(4/15)\Gamma(1/5)} \in \overline{\mathbf{Q}}.$$

Conjecture *(Rohrlich)*. $\overline{G}$ est la distribution impaire universelle à valeurs dans un groupe où la multiplication par 2 est inversible.

Cela signifie: toute relation multiplicative de la forme

$$\pi^{b/2} \prod_{a \in \mathbf{Q}} \Gamma(a)^{m_a} \in \overline{\mathbf{Q}}$$

avec b et m_a dans $\mathbf{Z}$ se déduit des relations standard.

Cela conduit à la question de savoir si l'idéal sur $\overline{\mathbf{Q}}$ de toutes les relations algébriques entre les valeurs de $G(a)$ pour $a \in \mathbf{Q}$ est engendré par les relations de distributions, l'équation fonctionnelle et l'imparité.

Constante d'Euler

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right) = 0.5772157\ldots$$

Constante d'Euler

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right) = 0.5772157\ldots$$

Problème ouvert: Le nombre γ est-il irrationnel?

Constante d'Euler

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right) = 0.5772157\ldots$$

Problème ouvert: Le nombre γ est-il irrationnel?

Conjecture: Le nombre γ est transcendant.

Constante d'Euler

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right) = 0.5772157\ldots$$

Problème ouvert: Le nombre γ est-il irrationnel?

Conjecture: Le nombre γ est transcendant.

Conjecture: Le nombre γ n'est pas une période.

J. Sondow (2003) – *Critère d'irrationalité pour la constante d'Euler.*

Une inégalité très forte et conjecturale pour une infinité d'éléments d'une suite bien spécifiée de nombres de la forme

$$\left| e^{b_0} a_1^{b_1} \cdots a_m^{b_m} - 1 \right|$$

avec b_0 quelconque, où tous les exposants b_i ont le même signe, permettrait d'établir l'irrationalité de la constante d'Euler.

Analogue de la constante d'Euler en caractéristique finie

L. Carlitz (1935) – *On certain functions connected with polynomials in a Galois field.*

V.G. Drinfel'd (1974) – *Elliptic modules.*

I.I. Wade (1941), J.M. Geijsel (1978), P. Bundschuh (1978), Yu Jing (1980's), G.W. Anderson et D. Thakur (1990). . .

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}, \qquad \gamma = \lim_{s \to 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right).$$

En caractéristique finie, p décrit les polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans un corps fini, et $\zeta(1)$ converge.

Un analogue en dimension 2 de la constante d'Euler

Pour chaque $k \geq 2$, désignons par A_k l'aire minimale d'un disque fermé de $\mathbf{R}^2$ contenant au moins k points de $\mathbf{Z}^2$. Pour $n \geq 2$, posons

$$\delta_n = -\log n + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{A_k} \quad \text{et} \quad \delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n.$$

F. Gramain conjecture:

$$\delta = 1 + \frac{4}{\pi}\big(\gamma L'(1) + L(1)\big),$$

où

$$L(s) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (2n+1)^{-s}.$$

Comme $L(1) = \pi/4$ et

$$\begin{aligned} L'(1) &= \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\log(2n+1)}{2n+1} \\ &= \frac{\pi}{4}\bigl(3\log\pi + 2\log 2 + \gamma - 4\log\Gamma(1/4)\bigr), \end{aligned}$$

la conjecture de Gramain s'écrit aussi

$$\delta = 1 + 3\log\pi + 2\log 2 + 2\gamma - 4\log\Gamma(1/4) = 1.82282524\ldots$$

Meilleur encadrement connu pour δ
(F. Gramain et M. Weber, 1985):

$$1.811\ldots < \delta < 1.897\ldots$$

Transcendance de sommes de séries

S.D. Adhikari, N. Saradha, T.N. Shorey, R. Tijdeman (2001) – *Transcendental infinite sums.*

N. Saradha, R. Tijdeman (2003) – *On the transcendence of infinite sums of values of rational functions.*

Question: quelle est la nature arithmétique de

$$\sum_{\substack{n\geq 0\\ Q(n)\neq 0}} \frac{P(n)}{Q(n)}\ ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right) = 0$$

sont des nombres rationnels.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right) = 0$$

sont des nombres rationnels. Séries téléscopiques.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(an+b)(an+a+b)} = \frac{1}{ab},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(an+b)(an+a+b)(an+2a+b)} = \frac{1}{2ab(a+b)}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \log 2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)(4n+1)} = \frac{\pi}{3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$$

sont des nombres transcendants.

Le nombre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$$

est aussi transcendant (combinaison linéaire de logarithmes de nombres algébriques).

Question: *quelles sont les périodes parmi les nombres*

$$\sum_{\substack{n\ge 0\\ Q(n)\neq 0}} \frac{P(n)}{Q(n)} \quad ?$$

Question: *quelles sont les périodes parmi les nombres*

$$\sum_{\substack{n\geq 0\\ Q(n)\neq 0}} \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ ?}$$

Le nombre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \int_{1>t>u>0} \frac{dt}{t} \cdot \frac{du}{1-u}$$

est une période, mais probablement pas

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}.$$

Question: *quelles sont les périodes parmi les nombres*

$$\sum_{\substack{n\geq 0\\ Q(n)\neq 0}} \frac{P(n)}{Q(n)} \; ?$$

Conjecture: *un nombre de la forme*

$$\sum_{\substack{n\geq 0\\ Q(n)\neq 0}} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

est soit rationnel, soit transcendant.

Question: *quelles sont les périodes parmi les nombres*

$$\sum_{\substack{n\geq 0\\ Q(n)\neq 0}} \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ ?}$$

Conjecture: *un nombre de la forme*

$$\sum_{\substack{n\geq 0\\ Q(n)\neq 0}} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

est soit rationnel, soit transcendant. De plus, s'il est rationnel, alors la série est télescopique.

Cas particulier: $P(X)/Q(X) = X^{-s}$

Fait: *pour* $s \geq 2$

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

est une période.

Cas particulier: $P(X)/Q(X) = X^{-s}$

Fait: *pour* $s \geq 2$

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

est une période.

Démonstration: $\zeta(s) = \int_{1>t_1>\cdots>t_s>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_{s-1}}{t_{s-1}} \cdot \frac{dt_s}{1-t_s}.$

Cas particulier: $P(X)/Q(X) = X^{-s}$

Fait: *pour* $s \geq 2$

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

est une période.

Démonstration: $\zeta(s) = \int_{1>t_1>\cdots>t_s>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_{s-1}}{t_{s-1}} \cdot \frac{dt_s}{1-t_s}.$

Notation *(intégrale itérée de Chen).*

$$\zeta(s) = \int_0^1 \omega_0^{s-1}\omega_1 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{dt}{1-t}.$$

Valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers positifs

Nombres d'Euler

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \qquad \text{for } s \geq 2.$$

Ce sont des valeurs spéciales de la fonction zêta de Riemann: $s \in \mathbf{C}$.

Euler: $\pi^{-2k}\zeta(2k) \in \mathbf{Q}$ *pour* $k \geq 1$ (nombres de Bernoulli).

Question Diophantienne: *Quelles sont les relations algébriques entre les nombres*

$$\zeta(2), \quad \zeta(3), \quad \zeta(5), \quad \zeta(7) \ldots ?$$

Conjecture. *Il n'y en a pas! Autrement dit les nombres*

$$\zeta(2), \quad \zeta(3), \quad \zeta(5), \quad \zeta(7)\ldots$$

sont algébriquement indépendants.

Conjecture. *Il n'y en a pas! Autrement dit les nombres*

$$\zeta(2),\quad \zeta(3),\quad \zeta(5),\quad \zeta(7)\ldots$$

sont algébriquement indépendants.

Connu:

• Hermite-Lindemann: π *est transcendant, donc* $\zeta(2k)$ *aussi pour tout* $k \ge 1$.

Conjecture. *Il n'y en a pas! Autrement dit les nombres*

$$\zeta(2), \quad \zeta(3), \quad \zeta(5), \quad \zeta(7)\ldots$$

sont algébriquement indépendants.

Connu:

- Hermite-Lindemann: π *est transcendant, donc* $\zeta(2k)$ *aussi pour tout* $k \geq 1$.

- Apéry (1978) – Le nombre $\zeta(3)$ *est irrationnel.*

Conjecture. *Il n'y en a pas! Autrement dit les nombres*

$$\zeta(2), \quad \zeta(3), \quad \zeta(5), \quad \zeta(7)\ldots$$

sont algébriquement indépendants.

Connu:

- Hermite-Lindemann: π *est transcendant, donc* $\zeta(2k)$ *aussi pour tout* $k \geq 1$.

- Apéry (1978) – Le nombre $\zeta(3)$ *est irrationnel.*

- Rivoal (2000) + Ball, Zudilin. . . *Parmi les nombres* $\zeta(2k+1)$, *il y en a une infinité d'irrationnels + minoration de la dimension du* $\mathbf{Q}$*-espace vectoriel engendré.*

Soit $\epsilon > 0$. Quand a est un entier impair suffisamment grand, la dimension du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par $1,\ \zeta(3),\ \zeta(5),\ \cdots,\zeta(a)$ est au moins

$$\frac{1-\epsilon}{1+\log 2}\log a.$$

W. Zudilin.

• *Un au moins des quatre nombres*

$$\zeta(5),\quad \zeta(7),\quad \zeta(9),\quad \zeta(11)$$

est irrationnel.

• *Il existe un entier impair* j *dans l'intervalle* $[5, 69]$ *tel que les trois nombres* 1, $\zeta(3)$, $\zeta(j)$ *soient linéairement indépendants sur* $\mathbf{Q}$.

Linéarisation du problème *(Euler).* Le produit de $\zeta(s_1)$ par $\zeta(s_2)$ est encore la somme d'une série.

Linéarisation du problème *(Euler).* Le produit de $\zeta(s_1)$ par $\zeta(s_2)$ est encore la somme d'une série.

De la relation

$$\sum_{n_1\geq 1} n_1^{-s_1} \sum_{n_2\geq 1} n_2^{-s_2} = \sum_{n_1>n_2\geq 1} n_1^{-s_1} n_2^{-s_2} + \sum_{n_2>n_1\geq 1} n_2^{-s_2} n_1^{-s_1} + \sum_{n\geq 1} n^{-s_1-s_2}$$

on déduit, pour $s_1 \geq 2$ et $s_2 \geq 2$,

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2)$$

avec

$$\zeta(s_1, s_2) = \sum_{n_1>n_2\geq 1} n_1^{-s_1} n_2^{-s_2}.$$

Pour k, $s_1, \ldots, s_k$ entiers positifs avec $s_1 \geq 2$, on pose $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ et

$$\zeta(\underline{s}) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}}.$$

(Valeurs zêta multiples - MZV)

Pour k, $s_1, \dots, s_k$ entiers positifs avec $s_1 \geq 2$, on pose $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ et

$$\zeta(\underline{s}) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}} \cdot$$

(Valeurs zêta multiples - MZV)

Pour $k = 1$ on retrouve les nombres d'Euler $\zeta(s)$.

Pour k, $s_1, \ldots, s_k$ entiers positifs avec $s_1 \geq 2$, on pose $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ et

$$\zeta(\underline{s}) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}}.$$

(Valeurs zêta multiples - MZV)

Pour $k = 1$ on retrouve les nombres d'Euler $\zeta(s)$.

Remarque: $\zeta(\underline{s})$ est une période:

$$\zeta(\underline{s}) = \int_0^1 \omega_0^{s_1 - 1} \omega_1 \cdots \omega_0^{s_k - 1} \omega_1.$$

Pour k, $s_1, \ldots, s_k$ entiers positifs avec $s_1 \geq 2$, on pose $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ et

$$\zeta(\underline{s}) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}}.$$

(Valeurs zêta multiples - MZV)

Pour $k = 1$ on retrouve les nombres d'Euler $\zeta(s)$.

Le produit de deux valeurs zêta multiples est une combinaison linéaire de valeurs zêta multiples.

Ces nombres vérifient beaucoup de relations linéaires à coefficients rationnels.

Ces nombres vérifient beaucoup de relations linéaires à coefficients rationnels.

- Produit de séries.
- Produit d'intégrales.
- Régularisation des séries et intégrales divergentes.

Ces nombres vérifient beaucoup de relations linéaires à coefficients rationnels.

Une description exhaustive de ces relations devrait résoudre le problème de l'indépendance algébrique des nombres

$$\pi, \quad \zeta(3), \quad \zeta(5), \ldots, \quad \zeta(2k+1).$$

But: *décrire toutes les relations linéaires à coefficients rationnels entre les Valeurs Zêta Multiples.*

Exemple de relation linéaire.

Euler:

$$\zeta(2,1) = \zeta(3).$$

Exemple de relation linéaire.

Euler:

$$\zeta(2,1) = \zeta(3).$$

$$\zeta(2,1) = \int_{1>t_1>t_2>t_3>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2} \cdot \frac{dt_3}{1-t_3}.$$

Exemple de relation linéaire.

Euler:

$$\zeta(2,1) = \zeta(3).$$

$$\zeta(2,1) = \int_{1>t_1>t_2>t_3>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2} \cdot \frac{dt_3}{1-t_3}.$$

$$\zeta(3) = \int_{1>t_1>t_2>t_3>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{t_2} \cdot \frac{dt_3}{1-t_3}.$$

Exemple de relation linéaire.

Euler:

$$\zeta(2,1) = \zeta(3).$$

$$\zeta(2,1) = \int_{1>t_1>t_2>t_3>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2} \cdot \frac{dt_3}{1-t_3}.$$

$$\zeta(3) = \int_{1>t_1>t_2>t_3>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{t_2} \cdot \frac{dt_3}{1-t_3}.$$

Le résultat d'Euler' s'obtient par $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (1-t_3, 1-t_2, 1-t_1)$.

Soit $\mathfrak{Z}_p$ le $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}$ engendré par les nombres $\zeta(\underline{s})$ pour $\underline{s}$ de poids $s_1 + \cdots + s_k = p$, avec $\mathfrak{Z}_0 = \mathbf{Q}$ et $\mathfrak{Z}_1 = \{0\}$.

Voici la conjecture de Zagier sur la dimension d_p de $\mathfrak{Z}_p$.

Conjecture *(Zagier). Pour $p \geq 3$ on a*

$$d_p = d_{p-2} + d_{p-3}.$$

$$(d_0,\ d_1,\ d_2, \ldots) = (1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, \ldots).$$

Cette conjecture s'écrit aussi

$$\sum_{p\geq 0} d_p X^p = \frac{1}{1-X^2-X^3}.$$

M. Hoffman conjecture: *une base de* $\mathfrak{Z}_p$ *sur* $\mathbf{Q}$ *est donnée par les nombres* $\zeta(s_1,\dots,s_k)$, $s_1+\cdots+s_k=p$, *où chacun des* s_i *est soit* 2, *soit* 3.

Compatible avec ce qui est connu pour $p\leq 16$ (Hoang Ngoc Minh)

Exemples

$d_0 = 1$ $\qquad \zeta(s_1, \ldots, s_k) = 1$ pour $k = 0$.

$d_1 = 0$ $\qquad \{(s_1, \ldots, s_k) \;;\; s_1 + \cdots + s_k = 1,\ s_1 \geq 2\} = \emptyset$.

$d_2 = 1$ $\qquad \zeta(2) \neq 0$

$d_3 = 1$ $\qquad \zeta(2,1) = \zeta(3) \neq 0$

$d_4 = 1$ $\qquad \zeta(3,1) = (1/4)\zeta(4), \quad \zeta(2,2) = (3/4)\zeta(4),$
$\zeta(2,1,1) = \zeta(4) = (2/5)\zeta(2)^2$

Question: $d_5 = 2$?

Comme on a

$$\begin{aligned}
\zeta(2,1,1,1) &= \zeta(5),\\
\zeta(3,1,1) = \zeta(4,1) &= 2\zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3),\\
\zeta(2,1,2) = \zeta(2,3) &= \frac{9}{2}\zeta(5) - 2\zeta(2)\zeta(3),\\
\zeta(2,2,1) = \zeta(3,2) &= 3\zeta(2)\zeta(3) - \frac{11}{2}\zeta(5),
\end{aligned}$$

il en résulte que $d_5 \in \{1,2\}$ et que $d_5 = 2$ si et seulement si le nombre $\zeta(2)\zeta(3)/\zeta(5)$ est irrationnel.

A.G. Goncharov (2000) – *Multiple ζ-values, Galois groups and Geometry of Modular Varieties.*

T. Terasoma (2002) – *Mixed Tate motives and multiple zeta values.*

Les entiers définis par la relation de récurrence de la conjecture de Zagier

$$d_p = d_{p-2} + d_{p-3}.$$

avec les conditions initiales $d_0 = 1,\ d_1 = 0$ *fournissent une majoration pour la dimension de* $\mathfrak{Z}_p$.

Fonction hypergéométrique de Gauss

Pour a, b, c et z nombres complexes avec $c \notin \mathbf{Z}_{\leq 0}$ et $|z| < 1$, on définit

$$ {}_2F_1\left(a,\ b\ ;\ c \mid z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{z^n}{n!} $$

où

$$ (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1). $$

Fonction hypergéométrique de Gauss

Pour a, b, c et z nombres complexes avec $c \notin \mathbf{Z}_{\leq 0}$ et $|z| < 1$, on définit

$$ {}_2F_1\left(a,\ b\ ;\ c \,\middle|\, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{z^n}{n!} $$

où

$$ (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1). $$

Fait: pour a, b, c rationnels avec $c \notin \mathbf{Z}_{\leq 0}$ et $z \in \overline{\mathbf{Q}}$ avec $|z| < 1$,

$$ {}_2F_1\left(a,\ b\ ;\ c \,\middle|\, z\right) \in \frac{1}{\pi}\mathcal{P}. $$

Remarque: $\mathcal{P} \subset (1/\pi)\mathcal{P}$.

Exemples

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left(a,\ 1\ ;\ 1 \;\middle|\; z\right) &= \frac{1}{(1-z)^a},\\
{}_2F_1\left(1/2,\ 1\ ;\ 3/2 \;\middle|\; z^2\right) &= \frac{1}{2z}\log\frac{1+z}{1-z},\\
{}_2F_1\left(1/2,\ 1/2\ ;\ 3/2 \;\middle|\; z^2\right) &= \frac{1}{z}\arcsin z,\\
{}_2F_1\left(1/2,\ 1/2\ ;\ 1 \;\middle|\; z^2\right) &= \frac{2}{\pi}K(z),\\
{}_2F_1\left(-n,\ n+1\ ;\ 1 \;\middle|\; (1+z)/2\right) &= 2^{-n}P_n(z),\\
{}_2F_1\left(-n,\ n\ ;\ 1/2 \;\middle|\; (1+z)/2\right) &= (-1)^n T_n(z).
\end{aligned}
$$

$K(z)$ est l'intégrale elliptique de Jacobi de première espèce

$$K(z) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-z^2x^2)}},$$

P_n le n-ième polynôme de Legendre et T_n le n-ième polynôme de Chebyshev:

$$P_n(z) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dz}\right)^n (1-z^2)^n, \qquad T_n(\cos z) = \cos(nz).$$

Pour $c > b > 0$

$$ {}_2F_1\left(a,\ b\ ;\ c \;\middle|\; z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt $$

et

$$ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \in \frac{1}{\pi}\mathcal{P}. $$

Remarque: pour a, b, c réels avec $c > a + b$ et $c \not\in \mathbf{Z}_{\le 0}$, on a

$$ {}_2F_1\left(a,\ b\ ;\ c \;\middle|\; 1\right) = \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}. $$

Transcendance

J. Wolfart: Transcendance de ${}_2F_1\left(a,\ b\ ;\ c\ \middle|\ z\right)$ quand a, b, c, z sont rationnels.

Transcendance

J. Wolfart: Transcendance de ${}_2F_1\left(a,\ b\ ;\ c\ \middle|\ z\right)$ quand a, b, c, z sont rationnels.

F. Beukers et J. Wolfart:

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}\ ;\ \frac{1}{2}\ \middle|\ \frac{1323}{1331}\right) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{11} $$

Fonctions hypergéométriques généralisées

Pour p entier ≥ 2 et $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_{p-1}$ et z nombres complexes avec $b_i \notin \mathbf{Z}_{\leq 0}$ et $|z| < 1$, on définit

$$ {}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} a_1 \; , \; \ldots \; , \; a_p \\ b_1, \ldots, b_{p-1} \end{matrix} \;\middle|\; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_{p-1})_n} \cdot \frac{z^n}{n!}. $$

Fonctions hypergéométriques généralisées

Pour p entier ≥ 2 et $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_{p-1}$ et z nombres complexes avec $b_i \notin \mathbf{Z}_{\leq 0}$ et $|z| < 1$, on définit

$$ {}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} a_1 \;,\; \ldots \;,\; a_p \\ b_1, \ldots, b_{p-1} \end{matrix} \;\middle|\; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_{p-1})_n} \cdot \frac{z^n}{n!}. $$

Exemple:

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1/4, 1/2, 3/4 \\ 1/3, 2/3 \end{matrix} \;\middle|\; \frac{256z}{27}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{4k}{k} z^k $$

est une fonction algébrique.

Fait: pour $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_{p-1}$ rationnels avec $b_i \notin \mathbf{Z}_{\le 0}$ et $z \in \overline{\mathbf{Q}}$ avec $|z| < 1$,

$$
{}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} a_1 \ , \ \ldots \ , \ a_p \\ b_1, \ldots, b_{p-1} \end{matrix} \,\middle|\, z \right) \in \frac{1}{\pi^{p-1}} \mathcal{P}.
$$

Démonstration: par récurrence sur p à partir de $p = 2$.

Mesure de Mahler de polynômes en plusieurs variables

Soit $P \in \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n, z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]$ un polynôme de Laurent non nul en n variables. On définit $\mathrm{M}(P)$ par

$$\log \mathrm{M}(P) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \log \left| P(e^{2i\pi t_1}, \ldots, e^{2i\pi t_n}) \right| dt_1 \cdots dt_n.$$

Exemple: $(n = 1)$ quand $P(z) = a_0 \prod_{i=1}^{d} (z - \alpha_i) \in \mathbf{C}[z]$ on a

$$\mathrm{M}(P) = |a_0| \prod_{i=1}^{d} \max\{1, |\alpha_i|\}$$

et donc $\log \mathrm{M}(P) \in \mathcal{P}$.

Fait: pour $P \in \overline{\mathbf{Q}}[z_1, \ldots, z_n, z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]$ on a

$$\log \mathrm{M}(P) \in \frac{1}{\pi^n} \mathcal{P}.$$

Exemple:

$$\log \mathrm{M}(1 + z_1 + z_2 + z_3) = \frac{7}{2\pi^2} \zeta(3).$$

Conjecture *(Kontsevich et Zagier). Les nombres*

$$1/\pi, \quad e, \quad e^{\pi}, \quad e^{\pi^2}$$

ne sont pas des périodes.

On connaît la transcendance de e^{π} (A.O. Gel'fond, 1929).

On ne connaît pas la transcendance de e^{π^2}.

Conjecture. *Soient* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *des nombres algébriques non nuls. Pour* $j = 1, 2, 3$ *soit* $\lambda_j \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *vérifiant* $e^{\lambda_j} = \alpha_j$. *Alors*

$$(\log \alpha_1) \log \alpha_2) \neq \log \alpha_3.$$

Exemple: avec $\log \alpha_1 = \log \alpha_2 = i\pi$ on déduit la transcendance du nombre e^{π^2}.

Autre exemple: transcendance du nombre $2^{\log 2}$.

Indépendance algébrique de logarithmes de nombres algébriques

Conjecture. *Soient* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *des nombres algébriques non nuls. Pour* $1 \le j \le n$ *soit* $\log \alpha_j \in \mathbf{C}$ *vérifiant* $e^{\log \alpha_j} = \alpha_j$. *On suppose* $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ $\mathbf{Q}$*-linéairement indépendants. Alors* $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ *sont algébriquement indépendants.*

Conjecture de Schanuel. *Soient* $x_1,\ldots,x_n$ *des nombres complexes linéairement indépendants sur* $\mathbf{Q}$. *Alors au moins* n *parmi les* $2n$ *nombres*

$$x_1,\ldots,x_n,e^{x_1},\ldots,e^{x_n}$$

sont algébriquement indépendants.

Périodes exponentielles

Définition. Une *période exponentielle* est une intégrale absolument convergente du produit d'une fonction algébrique avec l'exponentielle d'une fonction algébrique, sur un ensemble semi-algébrique, où tous les polynômes intervenant dans la définition ont des coefficients algébriques.

Exemples: S. Bloch and H. Esnault, –
Homology for irregular connections.

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^s \cdot \frac{dt}{t}.$$

Bessel: $$J_n(z) = \int_{|u|=1} \exp\left(\frac{z}{2}\Big(u - \frac{1}{u}\Big)\right) \frac{du}{u^{n+1}}.$$

Dans l'algèbre des périodes exponentielles, on trouve les périodes, les nombres e^{β} avec β algébrique, les valeurs de la fonction Gamma aux points rationnels, les valeurs des fonctions de Bessel, mais probablement pas la constante d'Euler.