Séminaire Mulhousien de Mathématiques
Université de Haute-Alsace

Vendredi 8 février 2008

Valeurs zêta multiples, d'Euler à nos jours.

Michel Waldschmidt

http://www.math.jussieu.fr/~miw/

Mise à jour : 4 Février, 2008

Périodes : Maxime Kontsevich et Don Zagier

Une *période* est un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont les valeurs d'intégrales absolument convergentes de fractions rationnelles à coefficients rationnels sur des domaines de $\mathbf{R}^n$ définis par des (in)égalités polynomiales à coefficients rationnels.

Periods, *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, Springer 2001, 771–808.

Exemples de périodes

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \le 1} dx$$

et tous les nombres algébriques,

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}$$

et tous les logarithmes de nombres algébriques,

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \le 1} dx dy,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \sum_{n \ge 1} \frac{1}{n^2} = \int_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2}.$$

$\zeta(2)$ est une période

$$\begin{aligned}\int_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2} &= \int_0^1 \left(\int_0^{t_1} \frac{dt_2}{1-t_2} \right) \frac{dt_1}{t_1} \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{t_1} \sum_{n \ge 1} t_2^{n-1} dt_2 \right) \frac{dt_1}{t_1} \\ &= \sum_{n \ge 1} \frac{1}{n} \int_0^1 t_1^{n-1} dt_1 \\ &= \sum_{n \ge 1} \frac{1}{n^2} = \zeta(2).\end{aligned}$$

$\zeta(s)$ est une période

Pour s entier ≥ 2,

$$\zeta(s) = \int_{1>t_1>t_2\cdots>t_s>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_{s-1}}{t_{s-1}} \cdot \frac{dt_s}{1-t_s}.$$

Récurrence :

$$\int_{t_1>t_2\cdots>t_s>0} \frac{dt_2}{t_2} \cdots \frac{dt_{s-1}}{t_{s-1}} \cdot \frac{dt_s}{1-t_s} = \sum_{n\geq 1} \frac{t_1^{n-1}}{n^{s-1}}.$$

Relations entre périodes

$\boxed{1}$
Additivité

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$\boxed{2}$
Changement de variables

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)du.$$

Relations entre périodes



$\boxed{3}$
Newton–Leibniz–Stokes

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Conjecture de Kontsevich et Zagier

Periods,
Mathematics unlimited—
2001 and beyond,
Springer 2001, 771–808.

Conjecture (Kontsevich–Zagier). *Si une période a deux représentations, on peut passer de l'une à l'autre en utilisant uniquement les règles* $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ *et* $\boxed{3}$ *dans lesquelles toutes les fonctions et les domaines d'intégration sont algébriques avec des coefficients algébriques.*

Exemples

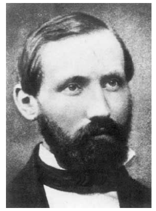
$$
\begin{aligned}
\pi &= \int_{x^2+y^2\le 1} dxdy & &= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\\
&= \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\\
&= \frac{22}{7}-\int_0^1\frac{x^4(1-x^4)dx}{1+x^2} & &= 4\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}.
\end{aligned}
$$

Conséquences spectaculaires :

Il n'y a pas de "nouvelle" relation de dépendance algébrique entre les constantes classiques de l'analyse.

Fonction zêta de Riemann

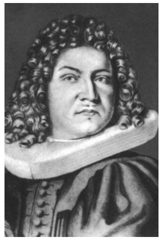
$$
\zeta(s) = \sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}
$$



Euler : $s \in \mathbf{R}$.

Riemann : $s \in \mathbf{C}$.

Valeurs spéciales de la fonction zêta



$s \in \mathbf{Z}$:
Jacques Bernoulli (1654–1705),
Leonard Euler (1739).

$\pi^{-2k}\zeta(2k) \in \mathbf{Q}$ *pour* $k \ge 1$ (Nombres de Bernoulli).

Nombres de Bernoulli

$$
\frac{t}{e^t-1} = 1-\frac{t}{2}+\sum_{n\ge 1}(-1)^{n+1}B_n\frac{t^{2n}}{(2n)!}.
$$

$$
B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{5}{66}\dots
$$

$$
\boxed{\zeta(2n) = 2^{2n-1}\frac{B_n}{(2n)!}\pi^{2n} \quad (n\ge 1).}
$$

$$
\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\quad \zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450}.
$$

Démonstration de $\zeta(2) = \pi^2/6$ à la Euler

La somme des inverses des racines d'un polynôme

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

est $-a_1$.
On écrit

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Posons $z = x^2$. Les zéros de la fonction

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots$$

sont π^2, $4\pi^2$, $9\pi^2$, ... *donc* la somme des inverses de ces nombres est

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{6}.$$

Justification

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Mais si

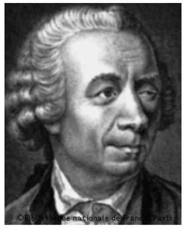
$$f(x) = 1 + a_1 x + \cdots,$$

alors pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ on a

$$e^{\lambda x} f(x) = 1 + (a_1 + \lambda)x + \cdots$$

et les deux fonctions $f(x)$, $e^{\lambda x} f(x)$ ont les mêmes zéros.

Introductio in analysin infinitorum



Leonhard Euler

(1707 – 1783)

Introductio in analysin infinitorum

Séries divergentes

Euler :

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

$$\zeta(0) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = -\frac{1}{2}$$

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

$$\zeta(-2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots = 0.$$

Séries divergentes d'Euler

Pour $-1 < x < 1$ on a

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x}\cdot$$

Le membre de gauche en $x = -1$ vaut $1/2$. D'où la valeur $1/2$ attribuée par Euler à la somme infinie divergente

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

On obtient la même valeur $S = 1/2$ en écrivant

$$S - 1 = -S.$$

$\zeta(0) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -1/12$

On dérive la relation

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}\cdot$$

Donc pour $-1 < x < 1$

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}\cdot$$

Le membre de droite au point $x = -1$ prend la valeur $1/4$. Euler écrit que

$$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \cdots$$

est égal à $1/4$.

$A = \zeta(0) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -1/12$

Rappelons

$$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \cdots = \frac{1}{4}$$

On soustrait A et $4A$

$$\begin{array}{rclllllll}
A & = & 1+ & 2+ & 3+ & 4+ & 5+ & 6+ & 7+ & \cdots \\
4A & = & & 4+ & & 8+ & & 12+ & & \cdots \\
\\
-3A & = & 1- & 2+ & 3- & 4+ & 5- & 6+ & 7- & \cdots & = B
\end{array}$$

Donc

$$A = -\frac{1}{12}\cdot$$

Srinivasa Ramanujan (1887 – 1920)

Lettre de Ramanujan
à M.J.M. Hill le 12 novembre 1912

$$1 + 2 + 3 + \cdots + \infty = -\frac{1}{12}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \infty^2 = 0$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \infty^3 = \frac{1}{240}$$

Réponse de M.J.M. Hill le 3 décembre 1912

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Première lettre de Ramanujan à Hardy

(16 Janvier 1913)

$$1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4}$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+\infty^3=\frac{1}{120}$$
$$1-1!+2!-3!+\cdots=.596\cdots$$

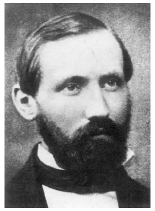
Remarque: (L. Euler, E.N. Laguerre) : $x^2y''+y=x$,

$$x-1!x^2+2!x^3-3!x^4+\cdots=\int_0^\infty \frac{xe^{-t}}{1+xt}dt$$
$$=\frac{x\mid}{\mid 1+}\ \frac{x\mid}{\mid 1+}\ \frac{x\mid}{\mid 1+}\ \frac{2x\mid}{\mid 1+}\ \frac{2x\mid}{\mid 1+}\ \frac{3x\mid}{\mid 1+}\ \frac{3x\mid}{\mid 1+}\ \cdots$$

Réponse de Hardy (8 Février 1913)

I was exceedingly interested by your letter and by the theorems which you state. You will however understand that, before I can judge properly of the value of what you have done, it is essential that I should see proofs of some of your assertions. Your results seem to me to fall into roughly three classes :
(1) there are a number of results that are already known, or easily deducible from known theorems ;
(2) there are results which, so far as I know, are new and interesting, but interesting rather from their curiosity and apparent difficulty than their importance ;
(3) there are results which appear to be new and important...

Prolongement analytique de la fonction zêta



La fonction complexe définie pour $\Re s>1$ par la série de Dirichlet

$$\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$$

admet un prolongement méromorphe dans $\mathbf{C}$ *avec un unique pôle en $s=1$ de résidu 1.*

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\gamma.$$

Constante d'Euler :

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$
$$=0.577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,090\,082\ldots$$

Équation fonctionnelle de la fonction zêta

Lien entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s/2) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1/n)^s}{1+s/n} = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Zéros triviaux de zêta : -2, -4, $-6 \ldots$

Hypothèse de Riemann :

Les zéros non triviaux sont de partie réelle $1/2$.

Valeurs de la fonction zêta aux entiers négatifs

$$\boxed{\zeta(-2n-1) = (-1)^{n+1} \frac{B_{n+1}}{2n+2} \quad (n \geq 0).}$$

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \quad \zeta(-3) = \frac{1}{120}, \quad \zeta(-5) = -\frac{1}{252}, \quad \zeta(-7) = \frac{1}{240}.$$

$$\boxed{\zeta(-2n) = 0 \quad (n \geq 1),} \qquad \zeta'(-2n) = (-1)^n \frac{(2n)!\zeta(2n+1)}{2^{2n+1}\pi^{2n}}.$$

$$\zeta'(-2) = -\frac{\zeta(3)}{4\pi^2}, \quad \zeta'(-4) = \frac{3\zeta(5)}{4\pi^4}, \quad \zeta'(-6) = -\frac{45\zeta(7)}{8\pi^6},$$

et

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi).$$

Valeurs de la fonction zêta aux entiers positifs

Entiers positifs pairs :

$$\boxed{\zeta(2n) = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n} \quad (n \geq 1).}$$

Entiers positifs impairs : $\zeta(2n+1)$, $n \geq 1$?

Question : *pour* $n \geq 1$, *le nombre*

$$\frac{\zeta(2n+1)}{\pi^{2n+1}}$$

est-il rationnel ?

Question diophantienne

Décrire toutes les relations algébriques entre les nombres

$$\zeta(2), \quad \zeta(3), \quad \zeta(5), \quad \zeta(7), \ldots$$

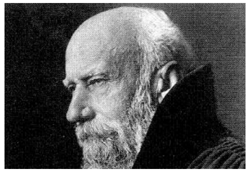
Conjecture. *Il n'y en a aucune : les nombres*

$$\zeta(2), \quad \zeta(3), \quad \zeta(5), \quad \zeta(7), \ldots$$

sont algébriquement indépendants.

En particulier les nombres $\zeta(2n+1)$ et $\zeta(2n+1)/\pi^{2n+1}$ pour $n \geq 1$ devraient être transcendants.

Valeurs de ζ aux entiers positifs pairs

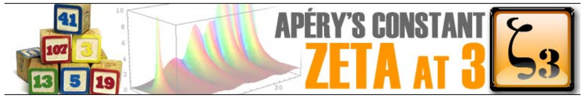


• F. Lindemann : *π est un nombre transcendant, donc les $\zeta(2k)$ aussi pour $k \geq 1$.*

Théorème (Hermite–Lindemann)
Pour tout nombre complexe non nul z, un au moins des deux nombres z et e^z est transcendant.

Corollaires : transcendance de $\log \alpha$ et de e^β pour α et β nombres algébriques non nuls avec $\log \alpha \neq 0$.

Valeurs de ζ aux entiers positifs impairs



• Apéry (1978) : *Le nombre*

$$\zeta(3) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} = 1,202\,056\,903\,159\,594\,285\,399\,738\,161\,511\,\ldots$$

est irrationnel.

• Rivoal (2000) + Ball, Zudilin... *Une infinité de nombres parmi les $\zeta(2k+1)$ sont irrationnels + minoration de la dimension du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel qu'ils engendrent.*

Tanguy Rivoal

Soit $\epsilon > 0$. Pour tout entier impair suffisamment grand a, la dimension du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par les nombres $1,\ \zeta(3),\ \zeta(5),\ \cdots, \zeta(a)$ est au moins

$$\frac{1-\epsilon}{1+\log 2} \log a.$$

Wadim Zudilin

• *Un au moins des quatre nombres*
$\zeta(5),\quad \zeta(7),\quad \zeta(9),\quad \zeta(11)$
est irrationnel.

• *Il existe un nombre impair j dans l'intervalle $[5, 69]$ tel que les trois nombres*
$1,\ \zeta(3),\ \zeta(j)$
soient linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Références

S. Fischler
Irrationalité de valeurs de zêta, (d'après Apéry, Rivoal, ...),
Sém. Nicolas Bourbaki, 2002-2003,
N° 910 (Novembre 2002).
http://www.math.u-psud.fr/~fischler/publi.html

C. Krattenthaler et T. Rivoal, *Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann,* Mem. Amer. Math. Soc. **186** (2007), 93 p.
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rivoal/articles.html

Linéarisation du problème *(Euler)*

Le produit de deux valeurs spéciales de la fonction zêta est une somme de *nombres multizêta.*

$$\sum_{n_1\ge 1} n_1^{-s_1} \sum_{n_2\ge 1} n_2^{-s_2} = \sum_{n_1>n_2\ge 1} n_1^{-s_1} n_2^{-s_2} + \sum_{n_2>n_1\ge 1} n_2^{-s_2} n_1^{-s_1} + \sum_{n\ge 1} n^{-s_1-s_2}$$

Linéarisation du problème *(Euler)*

On déduit, pour $s_1 \ge 2$ et $s_2 \ge 2$,

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2)$$

avec

$$\zeta(s_1, s_2) = \sum_{n_1>n_2\ge 1} n_1^{-s_1} n_2^{-s_2}.$$

$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2)$

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2,3) + \zeta(3,2) + \zeta(5)$$
$$\zeta(2)^2 = 2\zeta(2,2) + \zeta(4)$$

Relation entre séries divergentes :

$$\zeta(1)\zeta(2) = \zeta(1,2) + \zeta(2,1) + \zeta(3).$$

$\zeta(1)$ et $\zeta(1,2)$ sont des séries divergentes

$$\zeta(1) = \sum_{n\ge 1} \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \zeta(1,2) = \sum_{n_1>n_2\ge 1} \frac{1}{n_1 n_2^2}.$$

Nombres multizêta

Pour k, $s_1, \ldots, s_k$ entiers positifs satisfaisant $s_1 \geq 2$, on pose $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ et

$$\zeta(\underline{s}) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}}.$$

Pour $k = 1$ on retrouve les valeurs spéciales de la fonction ζ.

k est la *profondeur* et $p = s_1 + \cdots + s_k$ le *poids*.

L'algèbre des nombres multizêta

Le produit de deux nombres multizêta est encore un nombre multizêta.

Donc le $\mathbf{Q}$–espace vectoriel engendré par les $\zeta(\underline{s})$ est aussi une $\mathbf{Q}$–algèbre.

Le problème d'indépendance algébrique est ramené à un problème d'indépendance linéaire.

Question : quelles sont les relations linéaires entre ces nombres ?

Réponse : *il y en a beaucoup !*

$\zeta(2, 2, \ldots, 2)$

Pour $k \geq 1$ posons $\{2\}_k = (2, 2, \ldots, 2)$ (avec k termes). On a

$$\zeta(\{2\}_k) = \frac{\pi^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Donc $\zeta(\{2\}_k)/\zeta(2k) \in \mathbf{Q}$.

Exemples. :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(2,2) = \frac{\pi^4}{120}, \quad \zeta(2,2,2) = \frac{\pi^8}{5\,040}.$$

Démonstration :

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \sum_{k \geq 0} \zeta(\{2\}_k)(-z^2)^k.$$

Les nombres multizêta sont des périodes

$$\zeta(2,1) = \int_{1 > t_1 > t_2 > t_3 > 0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1 - t_2} \cdot \frac{dt_3}{1 - t_3}.$$

Démonstration.
On a

$$\int_0^{t_2} \frac{dt_3}{1 - t_3} = \sum_{n \geq 1} \frac{t_2^{n-1}}{n}, \quad \text{puis} \quad \int_0^{t_1} \frac{t_2^{n-1} dt_2}{t_2 - 1} = \sum_{m > n} \frac{t_1^m}{m},$$

et

$$\int_0^1 t_1^{m-1} dt_1 = \frac{1}{m},$$

donc

$$\int_{1 > t_1 > t_2 > t_3 > 0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1 - t_2} \cdot \frac{dt_3}{1 - t_3} = \sum_{m > n \geq 1} \frac{1}{m^2 n} = \zeta(2,1)$$

Notation

On pose

$$\omega_0 = \frac{dt}{t}, \qquad \omega_1 = \frac{dt}{1-t}.$$

Pour $s \geq 2$ on écrit la relation

$$\zeta(s) = \int_{1>t_1>\cdots>t_s>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_{s-1}}{t_{s-1}} \cdot \frac{dt_s}{1-t_s}$$

sous la forme

$$\zeta(s) = \int_0^1 \omega_0^{s-1}\omega_1.$$

Ceci conduit à définir un produit non commutatif de formes différentielles.

Intégrales itérées de Chen

Quand φ est une 1-forme holomorphe,

$$\int_0^z \varphi$$

est la primitive de φ qui s'annule en $z = 0$.
Quand $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ sont des 1-formes holomorphes, on définit par récurrence

$$\int_0^z \varphi_1 \cdots \varphi_k := \int_0^z \varphi_1(t) \int_0^t \varphi_2 \cdots \varphi_k.$$

Intégrales itérées de Chen

$$\int_0^z \varphi_1 \cdots \varphi_k := \int_0^z \varphi_1(t) \int_0^t \varphi_2 \cdots \varphi_k.$$

Si $\varphi_1(t) = \psi_1(t)dt$, alors

$$\frac{d}{dz} \int_0^z \varphi_1 \cdots \varphi_k = \psi_1(z) \int_0^z \varphi_2 \cdots \varphi_k.$$

Pour $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$, on pose

$$\omega_{\underline{s}} = \omega_{s_1} \cdots \omega_{s_k} = \omega_0^{s_1-1}\omega_1 \cdots \omega_0^{s_k-1}\omega_1.$$

Alors

$$\zeta(\underline{s}) = \int_0^1 \omega_{\underline{s}}.$$

Codage des nombres multizêta

$$\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k) \qquad \omega_{\underline{s}} = \omega_0^{s_1-1}\omega_1 \cdots \omega_0^{s_k-1}\omega_1$$

- termine par ω_1
- commence par ω_0 $\quad (s_1 \geq 2)$.

Poids : $p = s_1 + \cdots + s_k$ est le nombre de facteurs
Profondeur : k est le nombre de ω_1

Profondeur 1 : pour $s \geq 2$, $\omega_s = \omega_0^{s-1}\omega_1$
Exemple en profondeur 2 : $\omega_{2,1} = \omega_0\omega_1^2$

Les nombres multizêta sont des périodes

$\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$, $p = s_1 + \cdots + s_k$

$$\boxed{\zeta(\underline{s}) = \int_{1>t_1>t_2>\cdots>t_p>0} \omega_0^{s_1-1}\omega_1 \cdots \omega_0^{s_k-1}\omega_1}$$

Exemple.

$$\zeta(2,1) = \int_{1>t_1>t_2>t_3>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2} \cdot \frac{dt_3}{1-t_3} = \int_0^1 \omega_0\omega_1^2.$$

Relations quadratiques

Le produit de deux nombres multizêta est une combinaison linéaire, à coefficients entiers positifs, de nombres multizêta.

De plus il y a deux manières essentiellement différentes d'écrire ce produit comme une combinaison linéaire de nombres multizêta : l'une provient de l'écriture par des séries :

$$\zeta(\underline{s}) = \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_k\geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}},$$

l'autre de l'expression intégrale

$$\zeta(\underline{s}) = \int_0^1 \omega_{\underline{s}}.$$

Produits d'intégrales

$$\zeta(2) = \int_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2}.$$

$$\zeta(2)^2 = \int_{\substack{1>t_1>t_2>0\\ 1>u_1>u_2>0}} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2} \cdot \frac{du_1}{u_1} \cdot \frac{du_2}{1-u_2}.$$

On décompose le produit cartésien de simplex

$$\{1>t_1>t_2>0\} \times \{1>u_1>u_2>0\}$$

en réunion essentiellement disjointe de 6 simplex, ce qui donne

$$\zeta(2)^2 = 4\zeta(3,1) + 2\zeta(2,2).$$

$\{1>t_1>t_2>0\} \times \{1>u_1>u_2>0\}$

$1>t_1>t_2>u_1>u_2>0$	$\frac{1}{t_1} \cdot \frac{1}{1-t_2} \cdot \frac{1}{u_1} \cdot \frac{1}{1-u_2}$	$\zeta(2,2)$
$1>t_1>u_1>t_2>u_2>0$	$\frac{1}{t_1} \cdot \frac{1}{u_1} \cdot \frac{1}{1-t_2} \cdot \frac{1}{1-u_2}$	$\zeta(3,1)$
$1>t_1>u_1>u_2>t_2>0$	$\frac{1}{t_1} \cdot \frac{1}{u_1} \cdot \frac{1}{1-u_2} \cdot \frac{1}{1-t_2}$	$\zeta(3,1)$
$1>u_1>t_1>t_2>u_2>0$	$\frac{1}{u_1} \cdot \frac{1}{t_1} \cdot \frac{1}{1-t_2} \cdot \frac{1}{1-u_2}$	$\zeta(3,1)$
$1>u_1>t_1>u_2>t_2>0$	$\frac{1}{u_1} \cdot \frac{1}{t_1} \cdot \frac{1}{1-u_2} \cdot \frac{1}{1-t_2}$	$\zeta(3,1)$
$1>u_1>u_2>t_1>t_2>0$	$\frac{1}{u_1} \cdot \frac{1}{1-u_2} \cdot \frac{1}{t_1} \cdot \frac{1}{1-t_2}$	$\zeta(2,2)$

Relations linéaires entre nombres multizêta

Il en résulte que les nombres multizêta satisfont beaucoup de relations linéaires à coefficients rationnels.

Exemple.

Produit de séries :

$$\zeta(2)^2 = 2\zeta(2,2) + \zeta(4)$$

Produit d'intégrales :

$$\zeta(2)^2 = 2\zeta(2,2) + 4\zeta(3,1)$$

Donc

$$\zeta(4) = 4\zeta(3,1).$$

But

Une description complète de ces relations linéaires résoudrait en principe le problème de la détermination des relations algébriques entre les nombres

$$\pi, \quad \zeta(3), \quad \zeta(5), \dots, \quad \zeta(2k+1).$$

But : *Décrire toutes les relations linéaires entre les nombres multizêta.*

Shuffle et Stuffle devraient suffire

Première conjecture : *les relations de mélange (séries et intégrales) fournissent un système de générateurs de l'idéal des relations sur* $\mathbf{Q}$.

Conséquence : *Il n'y a pas de relation linéaire entre des nombres multizêta de poids* $s_1 + \cdots + s_k$ *distincts.*

Donc l'algèbre des nombres multizêta serait graduée par le poids.

Mais les relations de mélanges ne conservent pas la profondeur k

Autres relations linéaires.

Euler :

$$\zeta(2,1) = \zeta(3).$$

$$\zeta(2,1) = \int_{1>t_1>t_2>t_3>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2} \cdot \frac{dt_3}{1-t_3} \cdot$$

$$\zeta(3) = \int_{1>u_1>u_2>u_3>0} \frac{du_1}{u_1} \cdot \frac{du_2}{u_2} \cdot \frac{du_3}{1-u_3} \cdot$$

La relation d'Euler résulte de

$$(t_1, t_2, t_3) \mapsto (1-t_3, 1-t_2, 1-t_1) = (u_1, u_2, u_3)$$

$$1 > t_1 > t_2 > t_3 > 0 \iff 1 > u_1 > u_2 > u_3 > 0$$

Démonstration divergente de $\zeta(2,1) = \zeta(3)$

Produit de séries :

$$\zeta(1)\zeta(2) = \zeta(1,2) + \zeta(2,1) + \zeta(3).$$

Produit d'intégrales : Le produit cartésien de simplex $\{1 > t_1 > 0\} \times \{1 > u_1 > u_2 > 0\}$ se décompose en trois simplex $\{1 > t_1 > u_1 > u_2 > 0\} \cup \{1 > u_1 > t_1 > u_2 > 0\}$ $\cup \{1 > u_1 > u_2 > t_1 > 0\}$. D'où

$$\zeta(1)\zeta(2) = \zeta(1,2) + 2\zeta(2,1).$$

La différence fait disparaître les termes divergents :

$$\zeta(2,1) = \zeta(3)$$

Conjecture de Zagier

Notons $\mathfrak{Z}_p$ le $\mathbf{Q}$-sous–espace vectoriel de $\mathbf{R}$ engendré par les nombres réels $\zeta(\underline{s})$ où $\underline{s}$ est de poids $s_1 + \cdots + s_k = p$, avec $\mathfrak{Z}_0 = \mathbf{Q}$ et $\mathfrak{Z}_1 = \{0\}$.
Notons d_p la dimension de $\mathfrak{Z}_p$.

Conjecture (Zagier). *Pour $p \geq 3$, on a*

$$d_p = d_{p-2} + d_{p-3}.$$

$$(d_0,\ d_1,\ d_2, \ldots) = (1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, \ldots).$$

Petits poids : $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

Poids 0 $\quad d_0 = 1 \quad \zeta(s_1, \ldots, s_k) = 1$ pour $k = 0$.

Poids 1 $\quad d_1 = 0 \quad \{(s_1, \ldots, s_k)\ ;\ k = 1,\ s_1 + \cdots + s_k = 1,\ s_1 \geq 2\} = \emptyset$.

Poids 2 $\quad d_2 = 1 \quad \zeta(2) \neq 0$

Poids 3 $\quad d_3 = 1 \quad \zeta(2,1) = \zeta(3) \neq 0$

Poids 4 $\quad d_4 = 1 \quad \zeta(3,1) = \frac{1}{4}\zeta(4), \qquad \zeta(2,2) = \frac{3}{4}\zeta(4),$

$$\zeta(2,1,1) = \zeta(4) = \frac{2}{5}\zeta(2)^2$$

Poids 5

$d_5 = 2$?
On montre par les relations de mélange :

$$\begin{aligned}
\zeta(2,1,1,1) &= \zeta(5), \\
\zeta(3,1,1) &= \zeta(4,1) = 2\zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3), \\
\zeta(2,1,2) &= \zeta(2,3) = \frac{9}{2}\zeta(5) - 2\zeta(2)\zeta(3), \\
\zeta(2,2,1) &= \zeta(3,2) = 3\zeta(2)\zeta(3) - \frac{11}{2}\zeta(5),
\end{aligned}$$

Donc $d_5 \in \{1, 2\}$. De plus, $d_5 = 2$ si et seulement si le nombre

$$\zeta(2)\zeta(3)/\zeta(5)$$

est irrationnel.

Conjecture de Hoffman

La conjecture de Zagier peut être écrite

$$\sum_{p\ge 0} d_p X^p = \frac{1}{1-X^2-X^3}.$$

M. Hoffman conjecture : *une base de $\mathfrak{Z}_p$ sur $\mathbf{Q}$ est donnée par les nombres $\zeta(s_1,\dots,s_k)$, $s_1+\cdots+s_k=p$, où chaque s_i est 2 ou 3.*

Vrai pour $p\le 20$:

M. Kaneko, M. Noro and K. Tsurumaki. – *On a conjecture for the dimension of the space of the multiple zeta values*, Software for Algebraic Geometry, IMA **148** (2008), 47–58.

Majoration de la dimension

A.B. Goncharov – *Multiple ζ-values, Galois groups and Geometry of Modular Varieties.* Birkhäuser. Prog. Math. **201**, 361-392 (2001).
T. Terasoma – *Mixed Tate motives and Multiple Zeta Values.* Invent. Math. **149**, No.2, 339-369 (2002).

Théorème. Les nombres définis par la relation de récurrence de la conjecture de Zagier $d_p=d_{p-2}+d_{p-3}$ avec les conditions initiales $d_0=1$, $d_1=0$ sont des *majorants* de la dimension de $\mathfrak{Z}_p$.

Problème : minoration de la dimension

La conjecture diophantienne principale consiste à établir la minoration.

On ne sait rien, même pas $d_p\ge 2$ pour au moins un p !

On souhaite montrer qu'il n'y a pas d'autre relation algébrique que celles qui sont connues. On va les décrire de façon algébrique : elles recèlent des structures riches.

Description algébrique des relations quadratiques

$\boxed{1}$ Intégrales :
Produit de mélange de formes différentielles (*shuffle*)

Le *mélange* de $\varphi_1\cdots\varphi_n$ et $\psi_1\cdots\psi_k$ est la somme de tous les produits de $\varphi_1,\dots,\varphi_n,\psi_1,\dots,\psi_k$ dans lesquels l'ordre de $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ et celui de $\psi_1,\dots,\psi_k$ sont préservés.
Définition inductive :

$$\begin{aligned}\varphi_1\cdots\varphi_n ш \psi_1\cdots\psi_k &= \varphi_1(\varphi_2\cdots\varphi_n ш \psi_1\cdots\psi_k)\\ &\quad+\psi_1(\varphi_1\cdots\varphi_n ш \psi_2\cdots\psi_k).\end{aligned}$$

Exemples.

$$\begin{aligned}\varphi_1 ш \psi_1 &= \varphi_1\psi_1+\psi_1\varphi_1,\\ \varphi_1 ш \psi_1\psi_2 &= \varphi_1\psi_1\psi_2+\psi_1\varphi_1\psi_2+\psi_1\psi_2\varphi_1.\end{aligned}$$

Produit d'intégrales itérées

Soient $\varphi_1,\dots,\varphi_n$, $\psi_1,\dots,\psi_k$ des formes différentielles avec $n\ge 0$ et $k\ge 0$. alors

$$\int_0^z \varphi_1\cdots\varphi_n \int_0^z \psi_1\cdots\psi_k = \int_0^z \varphi_1\cdots\varphi_n ш \psi_1\cdots\psi_k.$$

Démonstration. Supposons $z>0$. On décompose le produit cartésien

$$\{\underline{t}\in\mathbf{R}^n\ ;\ z\ge t_1\ge\cdots\ge t_n\ge 0\}\times\{\underline{u}\in\mathbf{R}^k\ ;\ z\ge u_1\ge\cdots\ge u_k\ge 0\}$$

en une réunion disjointe de simplex (à des ensembles de mesures vide près) de la forme

$$\{\underline{v}\in\mathbf{R}^{n+k}\ ;\ z\ge v_1\ge\cdots\ge v_{n+k}\ge 0\}.$$

Exemple

$$ab ш cd = abcd + acbd + acdb + cabd + cadb + cdab$$

$$\omega_0\omega_1 ш \omega_0\omega_1 = 4\omega_0^2\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1\omega_0\omega_1$$

$$\int_0^1 \omega_0\omega_1 \cdot \int_0^1 \omega_0\omega_1 = 4\int_0^1 \omega_0^2\omega_1^2 + 2\int_0^1 \omega_0\omega_1\omega_0\omega_1$$

$$\zeta(2)^2 = 4\zeta(3,1)+2\zeta(2,2).$$

Étape suivante

Étendre la définition des nombres multizêta aux combinaisons linéaires des $\omega_{\underline{s}}$, de telle sorte que le produit de deux nombres multizêta soit encore un nombre multizêta.
On écrit $\widehat{\zeta}(\omega_{\underline{s}})$ au lieu de $\zeta(\underline{s})$ et on définit plus généralement

$$\widehat{\zeta}\left(\sum c_{\underline{s}}\omega_{\underline{s}}\right) = \sum c_{\underline{s}}\zeta(\underline{s}),$$

de sorte que

$$\zeta(\underline{s})\zeta(\underline{s}') = \widehat{\zeta}(\omega_{\underline{s}} ш \omega_{\underline{s}'}).$$

Outil : Algèbre libre sur $\{\omega_0,\omega_1\}$.

Le monoïde libre sur X^*

Désignons par $X=\{x_0,x_1\}$ l'*alphabet* à deux lettres x_0,x_1 et par X^* le monoïde libre sur X. Les éléments de X^* sont les *mots*. Un mot peut être écrit

$$x_{\epsilon_1}\cdots x_{\epsilon_k}$$

avec $k\ge 0$ et chaque ϵ_j est 0 ou 1.
L'entier k est la *longueur* du mot.
La loi de ce monoïde est appelée *concaténation.* Elle n'est pas commutative :

$$x_0x_1\ne x_1x_0.$$

L'élément neutre est le *mot vide* $e\in X^*$: c'est l'unique mot de longueur $k=0$.

L'algèbre $\mathfrak{H} = \mathbf{Q}\langle x_0, x_1\rangle$

Le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel libre de base X^* est l'algèbre libre sur X, que l'on désigne par $\mathfrak{H} = \mathbf{Q}\langle X\rangle$. Ses éléments sont les polynômes non commutatifs en les deux variables x_0, x_1.
L'élément unité est le mot *vide* e.
Les mots qui terminent par x_1 sont les éléments de X^*x_1.
Soit $w \in X^*x_1$. Écrivons $w = x_{\epsilon_1} \cdots x_{\epsilon_p}$ où chaque ϵ_i est 0 ou 1 et $\epsilon_p = 1$.

L'algèbre $\mathfrak{H} = \mathbf{Q}\langle x_0, x_1\rangle$

En notant k le nombre de x_1, on définit des entiers positifs $s_1, \ldots, s_k$ par

$$w = x_0^{s_1-1}x_1 \cdots x_0^{s_k-1}x_1.$$

Pour $s \geq 1$ on pose $y_s = x_0^{s-1}x_1$. À $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ avec $s_i \geq 1$ on associe

$$y_{\underline{s}} = y_{s_1} \cdots y_{s_k} = x_0^{s_1-1}x_1 \cdots x_0^{s_k-1}x_1.$$

Tout message peut être codé sur deux lettres

Ainsi $y_{\underline{s}}$ est un mot sur l'alphabet

$$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_s, \ldots\}.$$

Le monoïde libre Y^* sur Y

$$Y^* = \{y_{\underline{s}}\ ;\ \underline{s} = (s_1, \ldots, s_k),\ k \geq 0,\ s_j \geq 1\ (1 \leq j \leq k)\}$$

est l'ensemble $\{e\} \cup X^*x_1$ des mots qui ne terminent pas par x_0, donc Y^* est un sous-monoïde de X^*.

La sous-algèbre $\mathfrak{H}^1 = \mathbf{Q}e + \mathfrak{H}x_1$ de $\mathfrak{H}$

Le $\mathbf{Q}$–espace vectoriel de base Y^* est l'algèbre libre

$$\mathfrak{H}^1 = \mathbf{Q}\langle Y\rangle$$

sur Y.
Ses éléments sont les polynômes non commutatifs en les variables $\{y_1, \ldots, y_s, \ldots\}$. C'est une sous-algèbre de $\mathfrak{H}$.

La sous-algèbre $\mathfrak{H}^0 = \mathbf{Q}e + x_0\mathfrak{H}x_1$ de $\mathfrak{H}$

L'ensemble des mots de X^* qui commencent par x_0 et terminent par x_1 est $x_0X^*x_1$.
L'ensemble des mots de X^* qui ne commencent pas par x_1 et qui ne terminent pas par x_0 est $\{e\} \cup x_0X^*x_1$.

Exemple. $y_2y_1 \in x_0X^*x_1$.
Le $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathfrak{H}^1$ engendré par

$$\{e\} \cup x_0X^*x_1$$

est la sous-algèbre $\mathfrak{H}^0 = \mathbf{Q}e + x_0\mathfrak{H}x_1$:

$$\mathfrak{H}^0 \subset \mathfrak{H}^1 \subset \mathfrak{H}.$$

Nombres multizêta associées à des mots

Pour $w \in x_0X^*x_1$, on écrit $w = y_{\underline{s}}$ avec $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ et $s_1 \geq 1$. On définit ensuite

$$\widehat{\zeta}(w) = \zeta(\underline{s}).$$

On pose aussi $\widehat{\zeta}(e) = 1$ et on étend par $\mathbf{Q}$-linearité la définition de $\widehat{\zeta}$ à $\mathfrak{H}^0$.
C'est compatible avec les notations précédentes.
On obtient ainsi une application

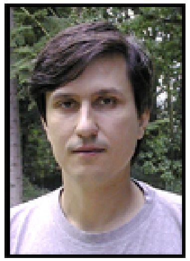
$$\widehat{\zeta} : \mathfrak{H}^0 \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Relations de mélanges entre nombres multizêta

Pour w et w' dans $\mathfrak{H}^0$, le produit de mélange $w ш w'$ appartient à $\mathfrak{H}^0$.
De plus

$$\widehat{\zeta}(w)\widehat{\zeta}(w') = \widehat{\zeta}(w ш w')$$

pour tout w et w' dans $\mathfrak{H}^0$.



Proposition (*M. Kontsevich*). *L'application $\widehat{\zeta} : \mathfrak{H}^0 \to \mathbf{R}$ est un morphisme d'algèbres de $\mathfrak{H}^0_{ш}$ dans $\mathbf{R}$.*

L'algèbre harmonique de Hoffman

$\boxed{2}$ **Séries :**
Le produit $\zeta(\underline{s}) \cdot \zeta(\underline{s}')$:

$$\sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}} \cdot \sum_{n'_1 > n'_2 > \cdots > n'_{k'} \geq 1} \frac{1}{{n'}_1^{s'_1} \cdots {n'}_{k'}^{s'_{k'}}}$$

est une combinaison linéaire de nombres multizêta.
(*Stuffle*) sur l'alphabet Y.

L'algèbre harmonique de Hoffman

L'application $\star : Y^* \times Y^* \to \mathfrak{H}$ est définie récursivement par

$$y_s u \star y_t v = y_s(u \star y_t v) + y_t(y_s u \star v) + y_{s+t}(u \star v)$$

pour u et v dans Y^*, s et t entiers positifs.
Ceci définit l'*algèbre harmonique de Hoffman* que nous noterons $\mathfrak{H}_\star$.

Exemple.

$$y_2^{\star 2} = y_2 \star y_2 = 2y_2^2 + y_4$$

et

$$y_2^{\star 3} = y_2 \star y_2 \star y_2 = 6y_2^3 + 3y_2y_4 + 3y_4y_2 + y_6.$$

Relations quadratiques provenant des séries

L'application $\widehat{\zeta} : \mathfrak{H}^0 \to \mathbf{R}$ est un morphisme d'algèbres de $\mathfrak{H}^0_\star$ dans $\mathbf{R}$:

$$\widehat{\zeta}(u \star v) = \widehat{\zeta}(u)\widehat{\zeta}(v)$$

pour u et v dans $\mathfrak{H}^0$.
Conséquence de l'existence de deux familles de relations quadratiques :

$$\widehat{\zeta}(u ш v - u \star v) = 0$$

pour u et v dans $\mathfrak{H}^0$.

Kentaro Ihara et Masanobu Kaneko

Désignons par $\mathrm{reg}_ш$ l'application $\mathbf{Q}$-linéaire $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}^0$ qui envoie $w \in \mathfrak{H}$ sur le terme constant quand w est écrit comme un polynôme en x_0, x_1 dans l'algèbre de mélange $\mathfrak{H}^0[x_0, x_1]_ш$. Alors $\mathrm{reg}_ш$ est un morphisme d'algèbres $\mathfrak{H}_ш \to \mathfrak{H}^0_ш$.
Théorème.(Relations de mélange doubles régularisées – Ihara et Kaneko). *Pour $w \in \mathfrak{H}^1$ et $w_0 \in \mathfrak{H}^0$,*

$$\mathrm{reg}_ш(w ш w_0 - w \star w_0) \in \ker \widehat{\zeta}.$$

Exemple. Prenons $w = x_1$. Comme $x_1 ш w_0 - x_1 \star w_0 \in \mathfrak{H}^0$ pour tout $w_0 \in \mathfrak{H}^0$, on retrouve la troisième famille de relations standard de Hoffman.

Conjecture diophantienne

Conjecture (Zagier, Cartier, Ihara-Kaneko,...). *Toutes les relations algébriques entre les nombres réels $\zeta(\underline{s})$ sont dans l'idéal engendré par celles que nous venons de décrire.*
Petitot et Hoang Ngoc Minh : jusqu'en poids $p = s_1 + \cdots s_k \leq 16$, les trois relations standard pour u, v et w dans $x_0 X^* x_1$

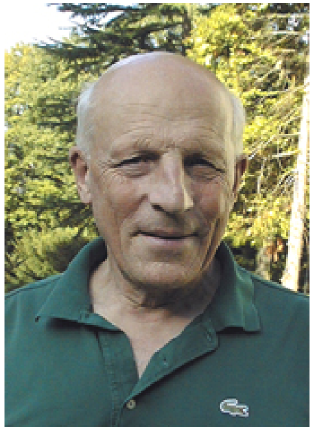
$$\widehat{\zeta}(u)\widehat{\zeta}(v) = \widehat{\zeta}(u ш v), \quad \widehat{\zeta}(u)\widehat{\zeta}(v) = \widehat{\zeta}(u \star v),$$

$$\widehat{\zeta}(x_1 ш w - x_1 \star w) = 0$$

suffisent.

Nombres polyzêta de Cartier

P. Cartier. –
Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents.
Sém. Bourbaki no. 885
Astérisque **282** (2002), 137-173.



Conjecture de Goncharov

Soit $\mathfrak{Z}$ le $\mathbf{Q}$- sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}$ engendré par les nombres

$$(2i\pi)^{-|s|}\zeta(\underline{s})$$

$\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbf{N}^k$ with $k \geq 1$, $s_1 \geq 2$, $s_i \geq 1$ $(2 \leq i \leq k)$.
Ainsi $\mathfrak{Z}$ est une sous–$\mathbf{Q}$– algèbre de $\mathbf{C}$ ayant une double filtration par le poids p et la profondeur k.
Étant donnée une algèbre de Lie graduée $C_\bullet$, on désigne par $\mathfrak{U}C_\bullet$ son algèbre enveloppante universelle et par

$$\mathfrak{U}C_\bullet^\vee = \bigoplus_{n\geq 0}(\mathfrak{U}C)_n^\vee$$

son dual gradué, qui est une algèbre de Hopf commutative.

Troisième famille de relations standard de Hoffman

Pour tout $w \in \mathfrak{H}^0$, on a $x_1 ш w - x_1 \star w \in \mathfrak{H}^0$ et

$$\widehat{\zeta}(x_1 ш w - x_1 \star w) = 0.$$

Exemple. Pour $w = x_0x_1$,

$$x_1 ш x_0x_1 = x_1x_0x_1 + 2x_0x_1^2 = y_1y_2 + 2y_2y_1,$$

$$x_1 \star x_0x_1 = y_1 \star y_2 = y_1y_2 + y_2y_1 + y_3,$$

donc

$$y_2y_1 - y_3 \in \ker \widehat{\zeta}$$

et (Euler)

$$\zeta(2,1) = \zeta(3).$$

Conjecture diophantienne (forme simplifiée)

Conjecture (Petitot, Hoang Ngoc Minh. . .). *Le noyau de $\widehat{\zeta}$ est engendré par les relations standard*

$$\widehat{\zeta}(u ш v - u \star v) = 0 \quad \textit{et} \quad \widehat{\zeta}(x_1 ш w - x_1 \star w) = 0$$

pour u, v et w dans $x_0X^*x_1$.

Minh, H.N, Jacob, G., Oussous, N. E., Petitot, M. –
Aspects combinatoires des polylogarithmes et des sommes d'Euler-Zagier.
J. Électr. Sém. Lothar. Combin. **43** (2000), Art. B43e, 29 pp.

Relations de mélange doubles généralisées

L'application $\widehat{\zeta} : \mathfrak{H}^0 \to \mathbf{R}$ est un morphisme d'algèbres pour $\shuffle$ et $\star$:

$$\widehat{\zeta}(u \shuffle v) = \widehat{\zeta}(u)\widehat{\zeta}(v) \quad \text{and} \quad \widehat{\zeta}(u \star v) = \widehat{\zeta}(u)\widehat{\zeta}(v).$$

Question: Peut-on étendre $\widehat{\zeta}$ à $\mathfrak{H}^1$ en un morphisme d'algèbre pour les deux lois $\shuffle$ et $\star$?

Réponse: NON !

$$x_1 \shuffle x_1 = 2x_1^2, \qquad x_1 \star x_1 = y_1 \star y_1 = 2x_1^2 + y_2$$

$$\widehat{\zeta}(y_2) = \zeta(2) \neq 0.$$

Théorèmes de Radford et Hoffman

Théorème (Radford) :

$$\mathfrak{H}_{\shuffle} = \mathfrak{H}^1_{\shuffle}[x_0]_{\shuffle} = \mathfrak{H}^0_{\shuffle}[x_0, x_1]_{\shuffle} \quad \textit{et} \quad \mathfrak{H}^1_{\shuffle} = \mathfrak{H}^0_{\shuffle}[x_1]_{\shuffle}.$$

Théorème (Hoffman) :

$$\mathfrak{H}_{\star} = \mathfrak{H}^1_{\star}[x_0]_{\star} = \mathfrak{H}^0_{\star}[x_0, x_1]_{\star} \quad \textit{et} \quad \mathfrak{H}^1_{\star} = \mathfrak{H}^0_{\star}[x_1]_{\star}.$$

Théorèmes de Radford et Hoffman

De $\mathfrak{H}^1_{\shuffle} = \mathfrak{H}^0_{\shuffle}[x_1]_{\shuffle}$ et $\mathfrak{H}^1_{\star} = \mathfrak{H}^0_{\star}[x_1]_{\star}$ on déduit qu'il existe un unique couple de morphismes d'algèbres

$$\widehat{Z}_{\shuffle} : \mathfrak{H}^1_{\shuffle} \longrightarrow \mathbf{R}[T] \quad \text{et} \quad \widehat{Z}_{\star} : \mathfrak{H}^1_{\star} \longrightarrow \mathbf{R}[T]$$

qui étendent $\widehat{\zeta}$ et envoient x_1 sur T.

Théorème de Boutet de Monvel et Zagier

Théorème. *Il y a un unique isomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire $\varrho : \mathbf{R}[T] \to \mathbf{R}[X]$ qui rende commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R}[X] \\ \mathfrak{H}^1 \arrow[ur, "\widehat{Z}_{\shuffle}"] \arrow[dr, "\widehat{Z}_{\star}"'] & \\ & \mathbf{R}[T] \arrow[uu, "\varrho"'] \end{tikzcd}$$

Formule explicite

Une formule explicite pour ϱ est donnée par la série génératrice

$$\sum_{\ell\geq 0} \varrho(T^\ell)\frac{t^\ell}{\ell!} = \exp\left(Xt + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)}{n}t^n\right).$$

Comparer avec le logarithme de la fonction Gamma d'Euler

$$\Gamma(1+t) = \exp\left(-\gamma t + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)}{n}t^n\right).$$

On peut voir ϱ comme l'opérateur différentiel d'ordre infini

$$\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)}{n}\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^n\right)$$

(il suffit de considérer l'image de e^{tT}).

Conjecture de Goncharov

Conjecture (A.B. Goncharov). *Il existe une algèbre de Lie libre graduée $C_\bullet$ et un morphisme d'algèbres*

$$\mathfrak{Z} \simeq \mathfrak{U}C_\bullet^\vee$$

filtrée par le poids à gauche et par le degré à droite.

Référence :

Goncharov A.B. – *Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes.* Math. Research Letter **5** (1998), 497–516.

Dualité

Désignons par τ l'anti-automorphisme de $\mathfrak{H}$ qui échange x_0 et x_1. Noter que $\mathfrak{H}^0$ et $\mathfrak{H}^1$ sont stables sous τ. Alors pour $w \in \mathfrak{H}^0$,

$$\widehat{\zeta}(\tau w) = \widehat{\zeta}(w).$$

Démonstration. On a

$$\tau(x_{\epsilon_1}\cdots x_{\epsilon_p}) = x_{1-\epsilon_p}\cdots x_{1-\epsilon_1}$$

et

$$\widehat{\zeta}(x_{\epsilon_1}\cdots x_{\epsilon_p}) = \int_0^1 \omega_{\epsilon_1}\cdots\omega_{\epsilon_p}.$$

Dans l'intégrale, on effectue le changement de variables

$$t_i \longmapsto 1 - t_{p-i}, \qquad (1 \leq i \leq p).$$

Théorème de la somme

Soient $k \geq 1$, $p \geq 2$. Notons $\mathcal{S}_{k,p}$ l'ensemble des $(s_1,\ldots,s_k)$ dans $\mathbf{Z}^k$ avec $s_1 \geq 2$, $s_j \geq 1$ pour $j = 2,\ldots,k$ et $s_1 + \cdots + s_k = p$. Alors

$$\sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}_{k,p}} \zeta(\underline{s}) = \zeta(p).$$

Exemple.

$$k=2, \qquad p=3, \qquad \zeta(2,1)=\zeta(3).$$

$$k=2, \qquad p=4, \qquad \zeta(3,1)+\zeta(2,2)=\zeta(4)$$

$$k=p-1,\ p\geq 3, \qquad \zeta(2,\{1\}_{p-2})=\zeta(p).$$

Théorème de dérivation de Hoffman

Théorème (Hoffman) – Soit D la dérivation sur $\mathfrak{H}$ satisfaisant $Dx_0 = 0$ et $Dx_1 = x_0x_1$. Alors pour $w \in \mathfrak{H}^0$,

$$\widehat{\zeta}(Dw) = \widehat{\zeta}(D\tau w).$$

Énoncé équivalent : Fixons $(s_1, \dots, s_k)$ dans $\mathbf{Z}^k$ avec $s_1 \geq 2$, et $s_j \geq 1$ for $j = 2, \dots, k$. Alors

$$\sum_{h=1}^{k} \zeta(s_1, \dots, s_{h-1}, s_h + 1, s_{h+1}, \dots, s_p) =$$

$$\sum_{\substack{1 \leq h \leq k \\ s_h \geq 2}} \sum_{j=0}^{s_h - 2} \zeta(s_1, \dots, s_{h-1}, s_h - j, j + 1, , s_{h+1}, \dots, s_p).$$

Théorème de dérivation de Hoffman généralisé

Théorème (Y. Ohno, K. Ihara et M. Kaneko) Fixons $n \geq 1$. On introduit une dérivation antisymétrique δ_n sur $\mathfrak{H}$ définie par

$$\delta_n x_0 = -\delta_n x_1 = x_0(x_0 + x_1)^{n-1} x_1.$$

Alors pour tout $w \in \mathfrak{H}^0$,

$$\widehat{\zeta}(\delta_n w) = 0.$$

Remarque: $\delta_1 = \tau D \tau - D$:

$$\delta_1(w) = x_1 ш w - x_1 \star w.$$

Théorème de Y. Ohno

Theorem (Y. Ohno). Soit $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ un k–uplet d'entiers positifs avec $s_1 \geq 2$. On définit $\underline{s}' = (s'_1, \dots, s'_{k'})$ par la relation $y_{\underline{s}'} = \tau y_{\underline{s}}$. De plus, soit $\ell \geq 0$ un entier donné. Alors

$$\sum_{\substack{e_1 + \cdots + e_k = \ell \\ e_i \geq 0}} \zeta(s_1 + e_1, \dots, s_k + e_k)$$

$$= \sum_{\substack{e'_1 + \cdots + e'_{k'} = \ell \\ e_j \geq 0}} \zeta(s'_1 + e'_1, \dots, s'_{k'} + e_{k'}).$$

Dérivation cycliques

On définit encore une dérivation $C : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ par $\tilde{\mu} \circ \widetilde{C}$ où $\tilde{\mu} : \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ est $\mu(a \otimes b) = ba$ et $\widetilde{C} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$ envoie x_0 sur 0 et x_1 sur $x_1 \otimes x_0$.
Théorème (Ohno, conjecturé par Hoffman). Pour tout $w \in \mathfrak{H}^1 \setminus \{x_1, x_1^2, \dots\}$,

$$\widehat{\zeta}(Cw) = \widehat{\zeta}(\tau C \tau w).$$

Exemple.

$$\zeta(4, \{3\}_n) = \zeta(\{3\}_{n+1}, 1) + \zeta(2, \{3\}_n, 2).$$

Formule de Zagier-Broadhurst

Théorème (Broadhurst - Conjecture de Zagier). Pour tout $n \geq 1$,

$$\zeta(\{3,1\}_n) = 4^{-n}\zeta(\{4\}_n).$$

Remarque:

$$\zeta(\{2\}_n) = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$$

et

$$\frac{1}{2n+1}\zeta(\{2\}_{2n}) = \frac{1}{2^{2n}}\zeta(\{4\}_n).$$

donc

$$\zeta(\{3,1\}_n) = 2 \cdot \frac{\pi^{4n}}{(4n+2)!}.$$

Formule de Zagier-Broadhurst

Autre formulation :

$$y_4^n - (4y_3y_1)^n \in \ker \widehat{\zeta}.$$

$$\widehat{\zeta}(y_4^n) = \zeta(\{4\}_n)$$

$$\widehat{\zeta}((y_3y_1)^n) = \zeta(\{3,1\}_n).$$

Identités syntaxiques

Définition : Pour $w \in X^* \setminus \{0\}$,

$$w^* = e + w + w^2 + \cdots$$

Donc

$$(e-w)w^* = w^*(e-w) = e$$

Lemme 1.

$$y_2^\star ш(-y_2)^\star = (-4y_3y_1)^\star.$$

Lemme 2.

$$y_2^* \star (-y_2)^* = (-y_4)^*.$$

Démonstration de $y_4^n - (4y_3y_1)^n \in \ker \widehat{\zeta}$.

De

$$y_2^* \star (-y_2)^* = (-y_4)^* \quad \text{et} \quad y_2^* ш (-y_2)^* = (-4y_3y_1)^*$$

on déduit, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{i+j=2n} (-1)^j y_2^{2i} \star y_2^{2j} = (-y_4)^n$$

et

$$\sum_{i+j=2n} (-1)^j y_2^{2i} ш y_2^{2j} = (-4y_3y_1)^n,$$

donc

$$y_4^n - (4y_3y_1)^n = \sum_{i+j=2n} (-1)^{n-j} (y_2^{2i} \star y_2^{2j} - y_2^{2i} ш y_2^{2j}) \in \ker \widehat{\zeta}.$$

Algèbres de Hopf

Une structure d'algèbre de Hopf co–commutative mais non commutative sur $\mathfrak{H}$ est donnée par le coproduit

$$\Delta P = P(x_0 \otimes 1 + 1 \otimes x_0, x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1)$$

la co-unité $\epsilon(P) = \langle P \mid e \rangle$ et l'antipode

$$S(x_1 \cdots x_n) = (-1)^n x_n \cdots x_1$$

pour $n \geq 1$ et $x_1, \ldots, x_n$ dans X.

Algèbres de Hopf de concaténation

Algèbre de Hopf de concaténation (ou de décomposition) :

$$(\mathfrak{H}, \cdot, e, \Delta, \epsilon, S)$$

En écrivant

$$P = \sum_{u \in X^*} (P|u)u$$

on a

$$\Delta P = \sum_{u,v \in X^*} (P|u ш v) u \otimes v.$$

Critère de Friedrichs

L'ensemble des éléments primitifs de $\mathfrak{H}$ est l'algèbre de Lie libre $\mathrm{Lie}(X)$ on X.
Donc

$$P \in \mathrm{Lie}(X) \Longleftrightarrow (P|u ш v) = 0$$

pour tout u, v dans $X^* \setminus \{e\}$.

Algèbres de Hopf de factorisation

Dual du produit de concaténation : $\Phi : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$ défini par

$$\langle \Phi(w) \mid u \otimes v \rangle = \langle uv \mid w \rangle.$$

Donc

$$\Phi(w) = \sum_{\substack{u,v \in X^* \\ uv = w}} u \otimes v.$$

Algèbre de Hopf de factorisation (mélange) :

$$(\mathfrak{H}, ш, e, \Phi, \epsilon, S).$$

Commutative, non co–commutative.

Algèbres de Hopf de quasi–mélange

$\overline{\mathbf{Q}}\langle Y\rangle$:

$$\Delta(y_i) = y_i \otimes e + e \otimes y_i,$$

$$\epsilon(P) = \langle P \mid e\rangle,$$

$$S(y_{s_1} \cdots y_{s_k}) = (-1)^k y_{s_k} \cdots y_{s_1}.$$

Travaux récents ou en cours

Louis Boutet de Monvel, Francis Brown, Sarah Car,
Pierre Cartier, Jacky Cresson, Pierre Deligne, Jean Ecalle,
Stéphane Fischler, Hidekazu Furusho,
Alexander B. Goncharov, Kentaro Ihara,
Masanobu Kaneko, Pierre Lochak, Hoang Ngoc Minh,
Michel Petitot, Georges Racinet, Tanguy Rivoal,
Leila Schneps, Tomohide Terasoma, Don Zagier,
Wadim Zudilin. . .

Liste de références compilée par Michael Hoffman
http ://www.usna.edu/Users/math/meh/biblio.html