J. reine angew. Math. **493** (1997), 61—113

Journal für die reine und angewandte Mathematik

Approximation diophantienne dans les groupes algébriques commutatifs

(I): Une version effective du théorème du sous-groupe algébrique

Par *Michel Waldschmidt* à Paris

Résumé. Le but de ce texte est de démontrer un énoncé général d'approximation diophantienne. Cet énoncé contient de nombreux résultats effectifs de transcendance pour des nombres liés à l'exponentielle d'un groupe algébrique commutatif défini sur le corps des nombres algébriques.

§ 1. Introduction

Soient K un corps de nombres plongé dans $\mathbb{C}$ et G un groupe algébrique commutatif défini sur K et plongé dans un espace projectif sur K. Le groupe $G(K)$ des points de G rationnels sur K est un sous-groupe du groupe de Lie $G(\mathbb{C})$. Nous noterons $T_G(K)$ l'espace tangent à l'origine de $G(K)$, $T_G(\mathbb{C})$ celui de $G(\mathbb{C})$ et $\exp_G: T_G(\mathbb{C}) \to G(\mathbb{C})$ l'application exponentielle de $G(\mathbb{C})$. Soient W un sous-K-espace vectoriel de $T_G(K)$ et Y un sous-groupe de type fini de $T_G(\mathbb{C})$ dont l'image $\Gamma = \exp_G(Y)$ par l'exponentielle est contenue dans $G(K)$. De nombreux problèmes de transcendance se ramènent à la recherche d'une minoration de la dimension r sur $\mathbb{C}$ du sous-espace vectoriel de $T_G(\mathbb{C})$ engendré par W et Y. Si on désigne par d la dimension du groupe algébrique G, par ℓ_0 la dimension de W sur K et par ℓ_1 le rang de Y sur $\mathbb{Z}$, alors l'inégalité

$$(1.1) \qquad r < d(\ell_1 + 2\ell_0)/(\ell_1 + 2d)$$

ne peut être vérifiée que si un sous-groupe algébrique G' de G (avec $G' \neq G$ et $G' \neq 0$), défini sur K, en est responsable: la dimension de $W \cap T_{G'}(\mathbb{C})$ et (ou) le rang de $Y \cap T_{G'}(\mathbb{C})$ peuvent être minorés. C'est l'objet du *théorème du sous-groupe algébrique* (voir [W2] et [R]). L'exemple le plus simple est celui de [Wü], correspondant à $\ell_0 = r = d - 1$ et $\ell_1 = 1$: *si un point* $u \in T_G(\mathbb{C})$ *vérifiant* $\exp_G(u) \in G(K)$ *appartient à un hyperplan* $\mathscr{W}$ *de* $T_G(\mathbb{C})$ *rationnel sur* K, *alors il existe un sous-groupe algébrique* G' *de* G, *défini sur* K *tel que* $u \in T_{G'}(\mathbb{C}) \subset \mathscr{W}$. D'autres corollaires du théorème du sous-groupe algébrique sont présentés dans [R], [RW1], [W2] et [W4].

Le but de ce texte est de donner un raffinement quantitatif: on choisit une norme $|\cdot|$ sur $T_G(\mathbb{C})$, des générateurs $w_1, \ldots, w_{\ell_0}$ du K-espace W ainsi que des générateurs $\eta_1, \ldots, \eta_{\ell_1}$ du sous-groupe Y de $T_G(\mathbb{C})$. On se place dans les hypothèses où le théorème de transcendance permet d'affirmer que la dimension du sous-espace vectoriel engendré par W et Y sur $\mathbb{C}$ est strictement plus grande qu'un entier r. Si $w'_1, \ldots, w'_{\ell_0}$ et $\eta'_1, \ldots, \eta'_{\ell_1}$ sont des éléments de $T_G(\mathbb{C})$ qui engendrent un sous-espace de dimension r, on veut minorer

$$\max\{\max_{1 \leqq k \leqq \ell_0} |w_k - w'_k|, \max_{1 \leqq h \leqq d_0} |\eta_h - \eta'_h|\}.$$

La minoration va dépendre de différents paramètres. D'une part vont apparaître les entiers d, ℓ_0, ℓ_1, r déjà introduits. Pour obtenir des estimations plus fines on écrira le groupe algébrique comme un produit $G = G_0 \times G_1 \times \cdots \times G_n$, avec $G_0 = \mathbb{G}_a^{d_0}$ et $G_1 = \cdots = G_{d_1} = \mathbb{G}_m$, de sorte que la dimension d de G est $d = d_0 + d_1 + d_2$, avec $d_2 \geqq 0$. Cela permet de remplacer la condition (1.1) par la condition plus faible

$$r < (d\ell_1 + d_1\ell_0 + 2d_2\ell_0)/(\ell_1 + d_1 + 2d_2). \tag{1.2}$$

Dans le même ordre d'idées, non seulement la dimension r du sous-espace engendré par $w'_1, \ldots, w'_{\ell_0}$ et $\eta'_1, \ldots, \eta'_{\ell_1}$ jouera un rôle, mais aussi celle de la projection de cet espace sur $T_G(\mathbb{C})/T_{G_0}(\mathbb{C})$. C'est ainsi que seront introduites les lettres r_1, r_2 et r_3. En première lecture on peut remplacer r_3 par r et r_1, r_2 par 0.

D'autre part l'estimation que nous allons donner va dépendre des hauteurs des points $w_k (1 \leqq k \leqq \ell_0)$ de $T_G(K)$ ainsi que des hauteurs des points $\gamma_h = \exp_G(\eta_h)$ $(1 \leqq h \leqq d_0)$ dans $G(K)$. Les lettres $A_1, \ldots, A_n, B_1$ et B_2 désigneront des nombres réels permettant de contrôler ces hauteurs, tandis que le degré du corps de nombres sera désigné par D. Le paramètre supplémentaire noté E peut toujours être pris égal à e, mais d'autres choix permettent parfois de raffiner les estimations.

Le troisième type de paramètres que nous allons introduire fera intervenir les lettres $T_0, \ldots, T_n, S_0, U$ et V. Ces paramètres sont astreints à une série de contraintes, et il convient de les choisir dans chaque cas particulier de manière à optimiser la conclusion. C'est le paramètre V qui commande l'estimation finale, et il ne diffère de U que par une constante ne dépendant que de la dimension d du groupe algébrique. Les T_i correspondent à des degrés et S_0 à une multiplicité. On doit aussi considérer des combinaisons linéaires des η_j; en fait, plutôt que de nous restreindre à des sous-ensembles de la forme $\{s_1\eta_1 + \cdots + s_{\ell_1}\eta_{\ell_1}\}$ pour $(s_1, \ldots, s_{\ell_1})$ décrivant certains sous-ensembles de $\mathbb{Z}^{\ell_1}$, par exemple $0 \leqq s_j < S_j$ $(1 \leqq j \leqq \ell_1)$, nous avons préféré considérer un sous-ensemble fini quelconque $\{\eta_1, \ldots, \eta_M\}$ de $T_G(\mathbb{C})$ (dans le cas particulier indiqué M serait $S_1 \cdots S_{\ell_1}$).

La conclusion du théorème principal est celle que fournit le lemme de zéros: il existe un sous-groupe algébrique G' de G dont on majore la fonction de Hilbert. Dans chaque application, il reste à exploiter cette information, et il n'y a pas encore de procédé uniforme pour le faire.

L'estimation générale que nous proposons permet de regrouper la partie transcendante d'un grand nombre de démonstrations de résultats d'approximation diophantienne. Cela évite de mettre en œuvre à chaque fois les arguments habituels en théorie des nombres transcendants: construction d'une fonction auxiliaire à la Thue-Siegel (ou, plus récemment, d'un déterminant d'interpolation à la Laurent), majoration analytique avec un lemme de Schwarz, minoration arithmétique avec l'inégalité de Liouville, utilisation d'un lemme de zéros. On le fait ici une fois pour toutes.

On pourra comparer cette approche à celle de P. Philippon dans [P3], qui propose un autre type d'axiomatisation. Ici, nous nous restreignons aux groupes algébriques, ce qui nous permet de disposer du lemme de zéros de [P1]. L'absence de lemme de Schwarz convenable en plusieurs variables rend actuellement indispensable ce lemme de zéros. En revanche, en une variable, la portée des résultats de [P3] est plus vaste (les fonctions modulaires, les situations non-archimédiennes et les modules de Drinfeld font partie du cadre général de [P3]).

Le théorème principal (théorème 2.1) est énoncé au paragraphe 2. Le reste du texte est consacrée à sa démonstration. Nous utilisons les déterminants d'interpolation de Michel Laurent, qui remplacent avantageusement les anciennes fonctions auxiliaires, et évitent le recours au principe des tiroirs et au lemme de Thue-Siegel.

Plusieurs lemmes préliminaires à la démonstration sont nécessaires: le paragraphe 3 contient la définition de fonctions de Hilbert-Samuel, le lemme de zéros, la définition de la hauteur logarithmique absolue et l'inégalité de Liouville. Le paragraphe 4 présente les propriétés des groupes algébriques qui nous seront utiles; pour les groupes linéaires et les courbes elliptiques, les énoncés sont entièrement explicites.

La partie principale de la démonstration est de nature analytique (paragraphe 5): il s'agit de majorer des déterminants d'interpolation; la borne que nous donnons est encore totalement explicite.

La démonstration du théorème 2.1 est donnée au paragraphe 6.

Enfin quelques prévisions sont faites au paragraphe 7 sur d'éventuels développements ultérieurs.

Les seuls résultats extérieurs auxquels il est fait appel sont d'une part le lemme de zéros (proposition 3.1; cf. [P1], proposition 3.1, [P2] et [De]), d'autre part les résultats de Sinnou David ([D1], [D2] et [D3]) sur les groupes algébriques (voir le paragraphe 4).

La motivation initiale de ce travail était d'obtenir une estimation contenant des versions effectives des principaux théorèmes de transcendance concernant les groupes algébriques, de manière à fournir par exemple des mesures de transcendance, ou bien des minorations de combinaisons linéaires de logarithmes (aussi bien dans le cas usuel des logarithmes de nombres complexes que pour des logarithmes de points rationnels sur des groupes algébriques commutatifs – cf. [PW]). Entre temps sont apparues deux autres applications: mesure de la répartition des points rationnels sur un groupe algébrique (cf. [W4], Chap. 5), et, plus récemment, résultats d'indépendance algébrique en liaison avec des mesures d'approximation simultanée (travaux en commun avec D. Roy – cf. [RW2] et [RW3]). Toutes ces conséquences du théorème 2.1 seront développées ailleurs.

L'auteur remercie chaleureusement Damien Roy pour sa lecture minutieuse ainsi que pour ses nombreux et pertinents commentaires sur une version antérieure de ce travail.

§ 2. Une version effective du théorème du sous-groupe algébrique

On énonce le théorème du sous-groupe algébrique et on en donne une version effective (théorème 2.1) qui est le résultat principal de ce texte.

(a) Le groupe algébrique *G*. Soient K un corps de nombres, D un entier $\geqq [K:\mathbb{Q}]$ et $G_0, G_1, \dots, G_n$ des groupes algébriques commutatifs connexes définis sur K. On suppose $G_0 = \mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{d_0}$ (avec $d_0 \geqq 0$) et $G_1 = \cdots = G_{d_1} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ (avec $0 \leqq d_1 \leqq n$). On pose $G = G_0 \times G_1 \times \cdots \times G_n$, et on désigne par

$$\pi_0 : G \to G_0 \quad \text{et} \quad \pi_1 : G \to G_1 \times \cdots \times G_{d_1} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{d_1}$$

les surjections canoniques.

La dimension de G est $d = d_0 + d_1 + d_2$ avec $d_2 = \dim(G_{d_1+1} \times \cdots \times G_n)$. On pose $\delta_i = \dim G_i$ $(0 \leqq i \leqq n)$, de sorte que

$$\delta_0 = d_0\,, \quad \delta_i = 1 \quad (1 \leqq i \leqq d_1)\,, \quad \text{et} \quad \delta_0 + \cdots + \delta_n = d\,.$$

On suppose $\delta_i \geqq 1$ pour $d_1 + 1 \leqq i \leqq n$, de sorte que $d_2 = 0$ si et seulement si $n = d_1$. On suppose aussi $d \geqq 2$.

Pour $0 \leqq i \leqq n$, on se donne d'une part une base, rationnelle sur K, de l'espace tangent $T_{G_i}(\mathbb{C})$ de G_i à l'origine, et d'autre part un plongement, défini sur K, de G_i dans un espace projectif $\mathbb{P}_{N_i}$. On suppose que

– pour $i = 0$, on a $N_0 = d_0$ et l'exponentielle de G_0 s'écrit

$$\exp_{G_0}(z_1, \dots, z_{d_0}) = (1 : z_1 : \cdots : z_{d_0})\,, \quad (z_1, \dots, z_{d_0}) \in \mathbb{C}^{d_0}\,;$$

– pour $1 \leqq i \leqq d_1$, on a $N_i = 1$ et

$$\exp_{G_i}(z) = (1 : e^z) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})\,;$$

– pour $d_1 < i \leqq n$, les propriétés 4.4, 4.5 et 4.6 du paragraphe 4 sont satisfaites. On écrira l'exponentielle de G_i sous la forme

$$\exp_{G_i}(z) = \big(\varphi_0^{(i)}(z) : \cdots : \varphi_{N_i}^{(i)}(z)\big) \in \mathbb{P}_{N_i}(\mathbb{C}) \quad (z \in \mathbb{C}^{\delta_i})\,,$$

où les $N_i + 1$ fonctions $\varphi_0^{(i)}, \dots, \varphi_{N_i}^{(i)}$ sont entières sans zéros communs dans $\mathbb{C}^{\delta_i}$. On désigne par $\mathrm{h}(G_i)$, H_i^+ et H_i^- les quantités introduites dans le paragraphe 4 et associées au groupe G_i, dont la dimension est δ_i. Le nombre $\mathrm{h}(G_i)$ est $\geqq 1$, tandis que H_i^+, H_i^- sont deux fonctions réelles de variable réelle qui contrôlent la croissance des fonctions entières $\varphi_\nu^{(i)}$ (voir (4.3)).

Quand z est un élément de $\mathbb{C}^d$ ou de $\mathbb{C}^{\delta_i}$, on désigne par $|z|$ le maximum des modules des composantes de z, et par $\|z\|$ la somme de ces modules. On utilisera en particulier ces normes pour des éléments de $\mathbb{Z}^d$ et donc pour des éléments de $\mathbb{N}^d$.

On identifie $T_G(\mathbb{C})$ d'abord au produit $T_{G_0}(\mathbb{C}) \times \cdots \times T_{G_n}(\mathbb{C})$, puis à $\mathbb{C}^d$, la deuxième identification étant faite grâce au choix de bases précédent. En particulier $T_G(K)$ est identifié à K^d. Le groupe algébrique G est plongé dans l'espace projectif $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{N_0} \times \cdots \times \mathbb{P}_{N_n}$ et on écrit ainsi l'exponentielle de $G(\mathbb{C})$ comme une application $\exp_G$ de $\mathbb{C}^d$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ dont le noyau $\Omega = \exp_G^{-1}(0)$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{C}^d$.

(b) Les données arithmétiques. Soient $\ell_0 \geqq 0$ et $M \geqq 1$ des entiers, $w_1, \ldots, w_{\ell_0}$ des éléments de K^d, $\eta_1, \ldots, \eta_M$ des éléments de $\mathbb{C}^d$ avec $\gamma_j = \exp_G(\eta_j) \in G(K)$ pour $1 \leqq j \leqq M$, et $\gamma_1 = 0$ (élément neutre de $G(K)$). On désigne par $W = Kw_1 + \cdots + Kw_{\ell_0}$ le sous-espace de K^d engendré par les w_k $(1 \leqq k \leqq \ell_0)$. On définit un sous-ensemble Σ de $G(K)$ par $\Sigma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_M\}$.

(c) Les données analytiques. Soient $w'_1, \ldots, w'_{\ell_0}, \eta'_1, \ldots, \eta'_M$ des éléments de $\mathbb{C}^d$. On désigne par $\mathscr{W}'$ le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $T_G(\mathbb{C})$ engendré par $w'_1, \ldots, w'_{\ell_0}$, par $\mathscr{V}'$ celui engendré par $\eta'_1, \ldots, \eta'_M$:

$$\mathscr{W}' = \mathbb{C}w'_1 + \cdots + \mathbb{C}w'_{\ell_0} \quad \text{et} \quad \mathscr{V}' = \mathbb{C}\eta'_1 + \cdots + \mathbb{C}\eta'_M .$$

On définit des entiers r, r_1, r_2 et r_3 par

$$r = \dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{W}' + \mathscr{V}'), \quad r_3 = \dim_{\mathbb{C}} \pi(\mathscr{V}'),$$

$$r_1 + r_3 = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{V}', \quad r_2 = r - r_1 - r_3,$$

où π est la surjection de $\mathbb{C}^d$ sur $\mathbb{C}^d/T_{G_0}(\mathbb{C})$. On a donc $r_1 = \dim_{\mathbb{C}}\big(\mathscr{V}' \cap T_{G_0}(\mathbb{C})\big)$ et

$$r_2 = \dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{W}'/\mathscr{W}' \cap \mathscr{V}') \geqq \dim_{\mathbb{C}} \pi(\mathscr{W}' + \mathscr{V}') - r_3 .$$

(d) Le théorème du sous-groupe algébrique. Avant de poursuivre, notons que le théorème du sous-groupe algébrique (théorème 4.1 de [W2]) peut être formulé de la manière suivante:

On suppose $w'_k = w_k$ $(1 \leqq k \leqq \ell_0)$, $\eta'_j = \eta_j$ $(1 \leqq j \leqq M)$ et $d > r$. Soit Y le sous-groupe de $T_G(\mathbb{C})$ engendré par $\eta_1, \ldots, \eta_M$, et soit $\Gamma = \exp_G(Y)$ le sous-groupe de $G(K)$ engendré par Σ. On pose

$$\kappa = \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} Y - \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} \Gamma = \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}}(Y \cap \ker \exp_G) .$$

Il existe un sous-groupe algébrique connexe G^* de G, rationnel sur $K, G^* \neq G$, ayant la propriété suivante; posons

$$d^* = \dim G/G^*, \quad d_0^* = \dim G_0/\pi_0(G^*),$$

$$d_1^* = \dim(G_1 \times \cdots \times G_{d_1})/\pi_1(G^*), \quad d_2^* = d^* - d_0^* - d_1^*,$$

$$\ell_0^* = \dim_K\big((W + T_{G^*}(K))/T_{G^*}(K)\big) \quad \textit{et} \quad \ell_1^* = \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}}\big((\Gamma + G^*(K))/G^*(K)\big);$$

alors $d^* > \ell_0^*$ *et*

$$(\ell_1^* + d_1^* + 2d_2^*)(d-r) \leqq (d_1 + 2d_2 - \kappa)(d^* - \ell_0^*).$$

Pour des variantes de cet énoncé, voir [R].

Notre but est d'établir une version quantitative de cet énoncé: on remplace les hypothèses $w_k' = w_k$ et $\eta_j' = \eta_j$ par une majoration de leur distance.

(e) Les paramètres B_1, B_2, A_i et E. Pour majorer la hauteur des points w_k et γ_j, on va expliciter leurs coordonnées. On écrit

$$w_k = (\beta_{1k}, \dots, \beta_{dk}) \quad (1 \leqq k \leqq \ell_0)$$

et

$$\eta_j = (\beta_{1,\ell_0+j}, \dots, \beta_{d_0,\ell_0+j}, u_{1j}, \dots, u_{nj}) \quad (1 \leqq j \leqq M),$$

avec $u_{ij} \in \mathbb{C}^{\delta_i}$ pour $1 \leqq i \leqq n$ et $1 \leqq j \leqq M$. On pose aussi $\gamma_{ij} = \exp_{G_i}(u_{ij}) \in G_i(K)$ $(1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq M)$ et

$$\gamma_{0j} = (1 : \beta_{1,\ell_0+j} : \cdots : \beta_{d_0,\ell_0+j}) \in \mathbb{P}_{d_0}(K) \quad (1 \leqq j \leqq M),$$

de telle sorte que $\gamma_j = (\gamma_{0j}, \gamma_{1j}, \dots, \gamma_{nj})$. En particulier on a $\beta_{h,\ell_0+j} \in K$ et $\gamma_{ij} \in K^*$ pour $1 \leqq h \leqq d_0$, $1 \leqq i \leqq d_1$ et $1 \leqq j \leqq M$.

Soient B_1 et B_2 des nombres réels avec $B_1 \geqq 2d$ et $B_2 \geqq 2d$ vérifiant

- ou bien les deux conditions

$$\max_{1 \leqq h \leqq d_0} \mathrm{h}(1 : \beta_{h1} : \cdots : \beta_{h,\ell_0+M}) \leqq \log B_1 \quad \text{et} \quad \max_{1 \leqq k \leqq \ell_0} \mathrm{h}(1 : \beta_{d_0+1,k} : \cdots : \beta_{dk}) \leqq \log B_2,$$

- ou bien les deux conditions

$$\max_{1 \leqq h \leqq d_0} \mathrm{h}(1 : \beta_{h,\ell_0+1} : \cdots : \beta_{h,\ell_0+M}) \leqq \log B_1 \quad \text{et} \quad \max_{1 \leqq k \leqq \ell_0} \mathrm{h}(1 : \beta_{1,k} : \cdots : \beta_{dk}) \leqq \log B_2.$$

De plus soient $A_i > 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$ et $E \geqq e$ des nombres réels vérifiant

$$\log A_i \geqq \max_{1 \leqq j \leqq M} \max\{\mathrm{h}(\gamma_{ij}), 2/D, E|u_{ij}|/D\} \quad (1 \leqq i \leqq d_1)$$

et, pour $d_1 < i \leqq n$,

$$\log A_i \geqq \max_{1 \leqq j \leqq M} \max\{\mathrm{h}(\gamma_{ij}), \mathrm{h}(G_i), H_i^+(Ed|u_i| + 2)/D, H_i^-(d|u_i|)/D\},$$

où $|u_i|$ désigne $\max_{1 \leqq j \leqq M} |u_{ij}|$ $(1 \leqq i \leqq n)$.

Avertissement. Souvent, les nombres η_j $(1 \leqq j \leqq M)$ seront des combinaisons linéaires des ℓ_1 premiers:

$$\eta_j = s_1^{(j)} \eta_1 + \cdots + s_{\ell_1}^{(j)} \eta_{\ell_1},$$

avec des entiers $s_1^{(j)}, \ldots, s_{\ell_1}^{(j)}$. Les paramètres $A_1, \ldots, A_n$ dépendront alors non seulement des hauteurs des composantes de $\eta_1, \ldots, \eta_{\ell_1}$, mais aussi des nombres

$$|s_\nu^{(j)}| \quad (1 \leqq j \leqq M, 1 \leqq \nu \leqq \ell_1).$$

(f) Les paramètres U, V, T_i et S_0. On se donne ensuite deux nombres réels positifs U, V et des entiers $T_0, T_1, \ldots, T_n, S_0$, tous $\geqq 0$ vérifiant

$$DT_0 \log B_1 \leqq U, \quad DS_0 \log B_2 \leqq U \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} DT_i \log A_i \leqq U.$$

On suppose aussi

$$D \log B_1 \geqq \log E, \quad D \log B_2 \geqq \log E, \quad U \geqq \log E,$$

$$B_2 \geqq T_0 + T_1 + \cdots + T_n + dS_0 \quad \text{et} \quad \log B_2 \geqq \max_{d_1 < i \leqq n} \mathrm{h}(G_i).$$

Enfin on suppose $V \geqq CU$, où C est une constante ne dépendant que de d (voir la remarque après l'énoncé du théorème 2.1).

On peut noter que la contrainte $U \geqq \log E$ résulte des autres si $(T_0, S_0) \neq (0, 0)$.

(g) L'hypothèse principale. On désigne par $H(G; \underline{T})$ la fonction de Hilbert-Samuel associée à l'idéal de G (pour le plongement de G dans $\mathbb{P}$) et aux paramètres $T_0, T_1, \ldots, T_n$, tandis que $\mathscr{H}(G; \underline{T})$ est le produit par $d!$ de la partie homogène de degré d du polynôme de Hilbert-Samuel du même idéal (les définitions de H et $\mathscr{H}$ sont rappelées dans la section (a) du paragraphe 3).

On suppose

$$\frac{1}{8} e^{U/(2D)} > H(G; \underline{T}) \geqq 4 \binom{T_0 + r_1}{r_1} \binom{dS_0 + r_2}{r_2} (V/\log E)^{\max\{r_3, 1\}}.$$

L'hypothèse importante est la minoration de $H(G; \underline{T})$. La condition

$$H(G; \underline{T}) < (1/8) e^{U/(2D)}$$

est satisfaite dès que $U \geqq 8ND \log(ND)$ avec $N = \max\{6, N_0 + \cdots + N_n\}$, car la majoration $\max_{0 \leqq i \leqq n} T_i \leqq U$ implique $H(G; \underline{T}) \leqq (U+1)^N$.

(h) Enoncé du théorème du sous-groupe algébrique effectif.

Théorème 2.1. *Supposons*

$$\max_{1 \leqq k \leqq \ell_0} |w_k' - w_k| \leqq e^{-V} \quad \textit{et} \quad \max_{1 \leqq j \leqq M} |\eta_j' - \eta_j| \leqq e^{-V}.$$

Alors il existe un sous-groupe algébrique connexe G^* de G, $G^* \neq G$, défini sur K, incomplètement défini dans G par des équations de multidegrés

$$\leqq (T_0, T_1, \ldots, T_{d_1}, 2\,T_{d_1+1}, \ldots, 2\,T_n)\,,$$

tel que, si on pose

$$W^* = (W + T_{G^*}(K))/T_{G^*}(K)\,, \quad \Sigma^* = (\Sigma + G^*(K))/G^*(K)\,,$$

$$\ell_0^* = \dim_K W^*\,, \quad M^* = \operatorname{Card} \Sigma^*\,,$$

on ait

$$S_0^{\ell_0^*} M^* \cdot \mathscr{H}(G^*; \underline{T}) \leqq 2^{d_2} \frac{d!}{\delta_0! \cdots \delta_n!} (\deg G_{d_1+1}) \cdots (\deg G_n)\, T_0^{\delta_0} \cdots T_n^{\delta_n}\,.$$

Remarque sur la constante *C*. La minoration $V \geqq CU$ fait intervenir une constante C ne dépendant que de d; quand d est fixé il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour les paramètres $d_0, d_1, n, \delta_0, \ldots, \delta_n$; on précisera une valeur permise de C en fonction de ces paramètres; par exemple dans le cas linéaire, c'est-à-dire $n = d_1$, on peut prendre $C = 12d + 13$. Quand G est le produit d'un groupe linéaire par des courbes elliptiques (c'est-à-dire quand $\delta_{d_1+1} = \cdots = \delta_n = 1$), on peut prendre $C = 400\,d^2$. Dans le cas général, C dépend des constantes C_1, C_2, C_3 et C_4 du § 4.

Convention. Si $S_0 = 0$, on convient que $S_0^{\ell_0^*}$ vaut 1 quand $\ell_0^* = 0$. De même, si $T_0 = 0$ et $\delta_0 = 0$, on remplace $T_0^{\delta_0}$ par 1.

(i) Les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}'$. Le théorème 2.1 concerne la matrice «arithmétique» $\mathbb{L}$, de format $d \times (\ell_0 + M)$, dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées de $w_1, \ldots, w_{\ell_0}$, $\eta_1, \ldots, \eta_M$ dans $\mathbb{C}^d$; on écrit

$$\mathbb{L} = (w_1 \cdots w_{\ell_0} \quad \eta_1 \cdots \eta_M) = \begin{pmatrix} \mathbb{L}_0 & \mathbb{L}_1 \\ \mathbb{L}_2 & \mathbb{L}_3 \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathbb{L}_0 = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1\ell_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{d_0 1} & \cdots & \beta_{d_0 \ell_0} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{L}_1 = \begin{pmatrix} \beta_{1,\ell_0+1} & \cdots & \beta_{1,\ell_0+M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{d_0,\ell_0+1} & \cdots & \beta_{d_0,\ell_0+M} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{L}_2 = \begin{pmatrix} \beta_{d_0+1,1} & \cdots & \beta_{d_0+1,\ell_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{d1} & \cdots & \beta_{d\ell_0} \end{pmatrix},$$

tandis que la matrice $\mathbb{L}_3$, de format $(d_1 + d_2) \times M$, est définie par blocs comme ceci:

$$\mathbb{L}_3 = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nM} \end{pmatrix};$$

dans cette écriture, u_{ij} est un vecteur colonne dans $\mathbb{C}^{\delta_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Pour $1 \leqq i \leqq d_1$ et $1 \leqq j \leqq M$, u_{ij} est un logarithme (complexe usuel) du nombre algébrique $\gamma_{ij} \in K^*$, tandis que les matrices $\mathbb{L}_0, \mathbb{L}_1$ et $\mathbb{L}_2$ ont leurs coefficients dans K.

Les données analytiques permettent d'écrire une matrice $\mathbb{L}'$, de même format que $\mathbb{L}$, à coefficients complexes:

$$\mathbb{L}' = \begin{pmatrix} \mathbb{L}'_0 & \mathbb{L}'_1 \\ \mathbb{L}'_2 & \mathbb{L}'_3 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs colonnes de $\mathbb{L}'$ dans $\mathbb{C}^d$ sont $w'_1, \dots, w'_{\ell_0}, \eta'_1, \dots, \eta'_M$, ce qui s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{L}'_0 \\ \mathbb{L}'_2 \end{pmatrix} = (w'_1 \cdots w'_{\ell_0}), \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathbb{L}'_1 \\ \mathbb{L}'_3 \end{pmatrix} = (\eta'_1 \cdots \eta'_M).$$

On a donc

$$r = \operatorname{rang}(\mathbb{L}'), \quad r_3 = \operatorname{rang}(\mathbb{L}'_3),$$

$$r_1 + r_3 = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \mathbb{L}'_1 \\ \mathbb{L}'_3 \end{pmatrix}, \quad r_2 + r_3 \geqq \operatorname{rang}(\mathbb{L}'_2 \ \mathbb{L}'_3).$$

Le paramètre B_1 (resp. B_2) tient compte des lignes de la matrice $\mathbb{L}_1$ (resp. des colonnes de la matrice $\mathbb{L}_2$), tandis que la hauteur des coefficients de la matrice $\mathbb{L}_0$ est controlée au choix soit par B_1, soit par B_2.

Le théorème du sous-groupe algébrique concerne le cas où les deux matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}'$ coïncident. Le théorème 2.1 remplace cette hypothèse par une majoration de leur distance: si on définit la *distance entre deux matrices de même format* par

$$\operatorname{dist}\big((a_{ij}), (a'_{ij})\big) = \max_{i,j} |a_{ij} - a'_{ij}|$$

alors l'hypothèse du théorème 2.1 s'écrit

$$\operatorname{dist}(\mathbb{L}, \mathbb{L}') \leqq e^{-V}.$$

§ 3. Résultats auxiliaires

Nous donnons la définition des fonctions de Hilbert H et $\mathscr{H}$ qui sont intervenues dans le paragraphe 2, puis nous énonçons le lemme de zéros. Ensuite nous rappelons la définition et les propriétés élémentaires de la hauteur logarithmique absolue de Weil; nous terminons par l'inégalité de Liouville.

(a) Fonctions de Hilbert-Samuel. Soient K un sous-corps de $\mathbb{C}$, $N_1, \dots, N_k$ des entiers positifs. On désigne par $\mathbb{P}$ le produit $\mathbb{P}_{N_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_{N_k}$; on va donc travailler avec des polynômes en $N_1 + \cdots + N_k + k$ variables $X_{\nu i}$ ($0 \leqq \nu \leqq N_i$, $1 \leqq i \leqq k$), homogènes par rapport à chaque groupe de variables $X_{0i}, \dots, X_{N_i i}$ ($1 \leqq i \leqq k$); s'il n'est pas nul, un tel polynôme a un multidegré $D = (D_1, \dots, D_k)$. On désignera par $K[\underline{\mathbf{X}}]$ l'anneau des polynômes en $N_1 + \cdots + N_k + k$ variables et par $K[\underline{\mathbf{X}}]_D$ le sous-K-espace formé des polynômes de multidegrés D et du polynôme nul.

Soit I un idéal multihomogène de $\mathbb{C}[\underline{\mathbf{X}}]$; on considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $(\mathbb{C}[\underline{\mathbf{X}}]/I)_D$ des éléments de $\mathbb{C}[\underline{\mathbf{X}}]/I$ de multidegrés D; la *fonction de Hilbert-Samuel* $H(I; D_1, \dots, D_k)$

de I est la dimension de l'espace $(\mathbb{C}[\underline{X}]/I)_D$; le *polynôme de Hilbert-Samuel* de I est le polynôme en k variables à coefficients rationnels dont les valeurs en $(D_1, \dots, D_k)$, pour $\min_{1 \leq i \leq k} D_i$ suffisamment grand, coïncident avec $H(I; D_1, \dots, D_k)$. Soit d la dimension de I; on définit ensuite $\mathscr{H}(I; D_1, \dots, D_k)$ comme le produit par $d!$ de la partie homogène de degré d du polynôme de Hilbert-Samuel de I. Dans le cas $k = 1$ on a $\mathscr{H}(I; D) = (\deg I) D^d$.

Quand E est un sous-ensemble de $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, on note encore

$$H(E; D_1, \dots, D_k) = H(I; D_1, \dots, D_k) \quad \text{et} \quad \mathscr{H}(E; D_1, \dots, D_k) = \mathscr{H}(I; D_1, \dots, D_k)\,,$$

où I est l'idéal de définition, dans $\mathbb{C}[\underline{X}]$, de l'adhérence de E dans $\mathbb{P}(\mathbb{C})$.

(b) Lemme de zéros. On travaille ici, comme dans le paragraphe 2, avec un groupe algébrique G de dimension d, défini sur K, décomposé en produit direct $G = G_0 \times G_1 \times \cdots \times G_n$, avec

$$G_0 = \mathbb{G}_a^{d_0}\,, \quad G_1 = \cdots = G_{d_1} = \mathbb{G}_m\,, \quad \dim G_i = \delta_i \quad (0 \leqq i \leqq n)$$

et $d = d_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_n$. Chacun des groupes G_i $(0 \leqq i \leqq n)$ est plongé dans un espace projectif $\mathbb{P}_{N_i}$ et G est plongé dans $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{N_0} \times \cdots \times \mathbb{P}_{N_k}$.

On fixe des entiers $T_0, \dots, T_n$, tous $\geqq 0$ et on considère l'espace $K[\underline{X}]_{\underline{T}}$ formé du polynôme nul et des polynômes de multidegré $(T_0, \dots, T_n)$. On écrira $H(E; \underline{T})$ et $\mathscr{H}(E; \underline{T})$ au lieu de $H(E; T_0, \dots, T_n)$ et $\mathscr{H}(E; T_0, \dots, T_n)$ respectivement.

On a

$$H(G; \underline{T}) = \prod_{i=0}^{n} H(G_i; T_i) \quad \text{et} \quad \mathscr{H}(G; \underline{T}) = d! \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{\delta_i!} \mathscr{H}(G_i; T_i)$$

(cf. lemme 3.4 de [P1]), avec

$$H(G_0; T_0) = \binom{T_0 + d_0}{d_0}, \quad \mathscr{H}(G_0; T_0) = T_0^{d_0}, \quad \deg G_0 = 1\,,$$

$$H(G_i; T_i) = T_i + 1\,, \quad \mathscr{H}(G_i; T_i) = T_i\,, \quad \deg G_i = 1 \quad (1 \leqq i \leqq d_1)$$

et

$$\mathscr{H}(G_i; T_i) = (\deg G_i)\, T_i^{\delta_i} \quad (0 \leqq i \leqq n)\,.$$

Soit Σ un sous-ensemble fini de $G(K)$ contenant l'élément neutre 0. On définit

$$\Sigma[d] = \{x_1 + \cdots + x_d;\, x_i \in \Sigma\ (1 \leqq i \leqq d)\}\,.$$

D'autre part soient $\mathscr{W}$ un sous-espace vectoriel de $T_G(\mathbb{C})$, x un point de $T_G(\mathbb{C})$ et S un entier $\geqq 0$; on dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[\underline{X}]$ *s'annule au point* $\exp_G(x)$ *avec une multiplicité* $\geqq S$ *le long de* $\mathscr{W}$ s'il existe une base $(w_1, \dots, w_\ell)$ de $\mathscr{W}$ telle que

$$D_w^\sigma(P \circ \exp_G)(x) = 0 \quad \text{pour tout } \sigma \in \mathbb{N}^\ell \text{ vérifiant } \|\sigma\| \leqq S\,;$$

cette condition ne dépend pas du choix de la base de $\mathscr{W}$. Rappelons les notations: pour $u = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{C}^d$, D_u désigne la dérivation $u_1(\partial/\partial z_1) + \cdots + u_d(\partial/\partial z_d)$; pour $w = (w_1, \ldots, w_\ell) \in (\mathbb{C}^d)^\ell$ et $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$, D_w^σ désigne la dérivation $D_{w_1}^{\sigma_1} \cdots D_{w_\ell}^{\sigma_\ell}$, qui est d'ordre $\|\sigma\| = \sigma_1 + \cdots + \sigma_\ell$.

Voici maintenant l'énoncé du lemme de zéros de P. Philippon.

Proposition 3.1. *On suppose qu'il existe un polynôme de $K[\underline{X}]_{\underline{T}}$, qui ne s'annule pas identiquement sur $G(K)$, mais qui s'annule en chaque point de $\Sigma[d]$, avec une multiplicité $\geqq dS + 1$ le long de $\mathscr{W}$. Alors il existe un sous-groupe algébrique connexe G^* de G, $G^* \neq G$, défini sur K, incomplètement défini dans G par des équations de multidegrés $\leqq (T_0, T_1, \ldots, T_{d_1}, 2T_{d_1+1}, \ldots, 2T_n)$, tel que, si on pose*

$$\lambda = \dim_{\mathbb{C}}\left((\mathscr{W} + T_{G^*}(\mathbb{C}))/T_{G^*}(\mathbb{C})\right),$$

on ait

$$S^\lambda \operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma + G^*(K)}{G^*(K)}\right) \cdot \mathscr{H}(G^*; \underline{T}) \leqq 2^{d_2} \mathscr{H}(G; \underline{T}).$$

La proposition 3.1 est un cas particulier du théorème de [P2]. Le théorème principal de [P1] fournit ce résultat avec le facteur S^λ remplacé par $\binom{S+\lambda}{\lambda}$. En combinant la méthode de [P2] (en caractéristique nulle) avec celle de [De], on devrait pouvoir remplacer le facteur 2^{d_2} par 1.

(c) Hauteurs. Nous rappelons brièvement quelques notions relatives aux polynômes et aux nombres algébriques. On trouvera plus d'informations par exemple dans le Chapitre 3 de [W3].

Soit $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_k]$ un polynôme à coefficients complexes; on note $\deg_{X_i} f$ le degré partiel de f en la variable X_i $(1 \leqq i \leqq k)$ et $\mathrm{L}(f)$ la *longueur* de f, c'est-à-dire la somme des modules de ses coefficients. On a

$$\mathrm{L}(f_1 + f_2) \leqq \mathrm{L}(f_1) + \mathrm{L}(f_2) \quad \text{et} \quad \mathrm{L}(f_1 f_2) \leqq \mathrm{L}(f_1)\mathrm{L}(f_2).$$

Si f est à coefficients réels $\geqq 0$, $\mathrm{L}(f)$ est la valeur $f(1, \ldots, 1)$ de f quand on substitue 1 à toutes les variables.

On garde la notation $A[\underline{X}]$ pour désigner l'anneau des polynômes à coefficients dans un anneau A en $N_1 + \cdots + N_k + k$ variables $X_{\nu i}$ $(0 \leqq \nu \leqq N_i, 1 \leqq i \leqq k)$. On notera aussi $A[\mathbf{X}]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans A en $N_1 + \cdots + N_k$ variables $X_{\nu i}$ $(1 \leqq \nu \leqq N_i, 1 \leqq i \leqq k)$. Pour $F \in \mathbb{C}[\underline{X}]$ homogène de degré L_i en les $N_i + 1$ variables $X_{0i}, \ldots, X_{N_i i}$ $(1 \leqq i \leqq k)$ et pour $\underline{\gamma} = (\gamma_{\nu i})_{0 \leqq \nu \leqq N_i, 1 \leqq i \leqq k} \in \mathbb{C}^{N_1 + \cdots + N_k + k}$ on a

$$|F(\underline{\gamma})| \leqq \mathrm{L}(F) \prod_{i=1}^{k} \max_{0 \leqq \nu \leqq N_i} |\gamma_{\nu i}|^{L_i},$$

tandis que pour $f \in \mathbb{C}[\underline{X}]$ de degré $\leqq L_i$ en les N_i variables $X_{1i}, \ldots, X_{N_i i}$ $(1 \leqq i \leqq k)$ et pour $\underline{\alpha} = (\alpha_{vi})_{1 \leqq v \leqq N_i, 1 \leqq i \leqq k} \in \mathbb{C}^{N_1 + \cdots + N_k}$ on a

$$|f(\underline{\alpha})| \leqq \mathrm{L}(f) \prod_{i=1}^{k} \max\{1, \max_{1 \leqq v \leqq N_i} |\alpha_{vi}|^{L_i}\}.$$

Soient K un corps de nombres et D un entier $\geqq [K:\mathbb{Q}]$; on note M_K l'ensemble des valeurs absolues de K, normalisées de telle sorte que $|\cdot|_v$ restreinte à $\mathbb{Q}$ soit

– la valeur absolue ordinaire sur $\mathbb{Q}$ si v est archimédienne,

– la valeur absolue p-adique sur $\mathbb{Q}$, avec $|p|_v = 1/p$ si $v \mid p$.

On désigne par $D_v = [K_v : \mathbb{Q}_v]$ le degré local en v; la formule du produit s'écrit:

$$\prod_{v \in M_K} |\alpha|_v^{D_v} = 1 \quad \text{pour } \alpha \in K^*.$$

Soient $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_N$ des éléments de K, non tous nuls; on définit la *hauteur logarithmique absolue* du point $\vartheta = (\vartheta_0 : \cdots : \vartheta_N) \in \mathbb{P}_N(K)$ par

$$\mathrm{h}(\vartheta) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K} D_v \log \max\{|\vartheta_0|_v, \ldots, |\vartheta_N|_v\}.$$

La *hauteur logarithmique absolue* d'un nombre algébrique α est la hauteur du point projectif $(1:\alpha) \in \mathbb{P}_1(\bar{\mathbb{Q}})$:

$$\mathrm{h}(\alpha) = \mathrm{h}(1:\alpha).$$

Pour N et M entiers positifs et pour $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_N, \theta_1, \ldots, \theta_M$ nombres algébriques, la hauteur du point $(1:\vartheta_1:\cdots:\vartheta_N:\theta_1:\cdots:\theta_M) \in \mathbb{P}_{N+M}(\bar{\mathbb{Q}})$ est majorée par

$$\mathrm{h}(1:\vartheta_1:\cdots:\vartheta_N:\theta_1:\cdots:\theta_M) \leqq \mathrm{h}(1:\vartheta_1:\cdots:\vartheta_N) + \mathrm{h}(1:\theta_1:\cdots:\theta_M).$$

La borne triviale suivante sera utile: pour $\vartheta = (1:\vartheta_1:\cdots:\vartheta_N) \in \mathbb{P}_N(K)$ et $v \in M_K$,

$$\max\{1, |\vartheta_1|_v, \ldots, |\vartheta_N|_v\} \leqq e^{D\,\mathrm{h}(\vartheta)}.$$

(d) Inégalité de Liouville. Le seul endroit de la démonstration où intervient l'hypothèse que certains nombres sont algébriques est dans la minoration fournie par l'inégalité de Liouville (voir [F], Lemma 9.2 et [W3], Chapitre 3).

Lemme 3.3 (Inégalité de Liouville). *Soient K un corps de nombres de degré $\leqq D$, v une valeur absolue archimédienne de K et $N_1, \ldots, N_k$ des entiers positifs. Pour $1 \leqq i \leqq k$, soient $\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{N_i i}$ des éléments de K. De plus, soit f un polynôme en $N_1 + \cdots + N_k$ variables, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, qui ne s'annule pas au point $\underline{\alpha} = (\alpha_{vi})_{1 \leqq v \leqq N_i, 1 \leqq i \leqq k}$. On suppose que f a un degré total $\leqq L_i$ en les N_i variables $X_{1i}, \ldots, X_{N_i i}$. Alors*

$$\log|f(\underline{\alpha})|_v \geqq -(D-1)\log \mathrm{L}(f) - D \sum_{i=1}^{k} L_i \mathrm{h}(1:\alpha_{1i}:\cdots:\alpha_{N_i i}).$$

Démonstration. Il n'y a pas de restriction à supposer $D = [K : \mathbb{Q}]$. On écrit la formule du produit pour $f(\underline{\alpha}) \neq 0$:

$$D_v \log|f(\underline{\alpha})|_v = - \sum_{w \neq v} D_w \log|f(\underline{\alpha})|_w ,$$

où w décrit l'ensemble des valeurs absolues de K distinctes de v. Si w est archimédienne on a

$$\log|f(\underline{\alpha})|_w \leqq \sum_{i=1}^{k} L_i \log\max\{1, |\alpha_{1i}|_w, \dots, |\alpha_{N_i i}|_w\} + \log \mathrm{L}(f) ;$$

la somme des D_w pour w archimédienne distincte de v est $D - D_v \leqq D - 1$. Si w est ultramétrique, le même majoration est encore vraie sans le terme $\log \mathrm{L}(f)$. La conclusion provient de l'inégalité

$$\sum_{w \neq v} D_w \sum_{i=1}^{k} L_i \log\max\{1, |\alpha_{1i}|_w, \dots, |\alpha_{N_i i}|_w\} \leqq D \sum_{i=1}^{k} L_i \mathrm{h}(1 : \alpha_{1i} : \cdots : \alpha_{N_i i}) . \quad \square$$

§ 4. Préliminaires sur les groupes algébriques

Nous aurons besoin de deux types d'estimations: analytiques et arithmétiques. Nous donnons en premier lieu l'énoncé concernant les groupes linéaires, où tout est explicite. Nous considérons ensuite un groupe algébrique commutatif, plongé dans un espace projectif, et muni d'une base de son espace tangent à l'origine; nous énonçons les propriétés que nous supposons satisfaites. Pour les courbes elliptiques de nouveau tout sera explicite, grâce aux résultats de S. David [D3].

(a) Polynômes exponentiels. Nous considérons d'abord le cas $d_2 = 0$. Soient d_0, d_1, ℓ_0 trois entiers $\geqq 0$ avec $d = d_0 + d_1 > 0$ et soient T_0, S_0, T trois entiers $\geqq 0$. Soient $w = (w_1, \dots, w_{\ell_0}) \in (\mathbb{C}^d)^{\ell_0}$ et $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{\ell_0}) \in \mathbb{N}^{\ell_0}$; de plus soit

$$(\tau, t) = (\tau_1, \dots, \tau_{d_0}, t_1, \dots, t_{d_1}) \in \mathbb{N}^d ,$$

où $\tau_1, \dots, \tau_{d_0}, t_1, \dots, t_{d_1}$ satisfont

$$\tau_1 + \cdots + \tau_{d_0} \leqq T_0 , \quad t_1 + \cdots + t_{d_1} \leqq T , \quad \sigma_1 + \cdots + \sigma_{\ell_0} \leqq S_0 .$$

On considère la fonction $\varphi_{\tau t}$ suivante:

$$\varphi_{\tau t}(z) = \prod_{h=1}^{d_0} z_h^{\tau_h} \prod_{i=1}^{d_1} e^{t_i z_{d_0+i}}$$

avec $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d$; on l'écrit plus brièvement

$$\varphi_{\tau t}(z) = z^\tau e^{tz} .$$

Nous allons exprimer $D_w^\sigma(z^\tau e^{tz})$ comme un polynôme exponentiel: on introduit pour cela $d\ell_0 + d_0$ variables W_{ik}, Z_h ($1 \leqq i \leqq d$, $1 \leqq k \leqq \ell_0$, $1 \leqq h \leqq d_0$); on désignera par $\mathbb{Z}[\mathbf{W}, \mathbf{Z}]$ l'anneau des polynômes en ces variables à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Lemme 4.1. *Il existe un polynôme $P_{\tau t \sigma}$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[\mathbf{W}, \mathbf{Z}]$ qui satisfait les propriétés suivantes*:

– *quand on substitue, pour $1 \leqq i \leqq d$, $1 \leqq k \leqq \ell_0$ et $1 \leqq h \leqq d_0$, la i-ème coordonnée w_{ik} de w_k à la variable W_{ik} et z_h à la variable Z_h, on a*

$$D_w^{\sigma}(z^{\tau} e^{tz}) = P_{\tau t \sigma}(w, z) e^{tz};$$

– *pour $1 \leqq k \leqq \ell_0$, $P_{\tau t \sigma}$ est homogène de degré σ_k en les d variables $W_{1k}, \ldots, W_{dk}$;*

– *pour $1 \leqq h \leqq d_0$, $P_{\tau t \sigma}$ est homogène de degré τ_h en les $\ell_0 + 1$ variables $W_{h1}, \ldots, W_{h\ell_0}, Z_h$;*

– *le degré total de P en les variables $Z_1, \ldots, Z_{d_0}$ est $\leqq \|\tau\|$;*

– *de plus la longueur de $P_{\tau t \sigma}$ est majorée par*

$$\mathrm{L}(P_{\tau t \sigma}) \leqq \sum_{m=0}^{\min\{T_0, S_0\}} m! \binom{T_0}{m} \binom{S_0}{m} T^{S_0 - m}.$$

Pour ne pas exclure les cas $T_0 = 0$ et $S_0 = 0$, on convient que le coefficient du binôme $\binom{n}{k}$ vaut 1 pour $n = k = 0$. Ainsi quand $\ell_0 = 0$ ou bien $\sigma = 0$, le polynôme cherché est $Z_1^{\tau_1} \cdots Z_{d_0}^{\tau_{d_0}}$, qui est de longueur 1. De même, quand $d_0 = 0$ ou bien $\tau = 0$, la solution est donnée par le polynôme

$$\prod_{k=1}^{\ell_0} \left(\sum_{i=1}^{d_1} t_i W_{d_0 + i, k} \right)^{\sigma_k},$$

dont la longueur est T^{S_0}. Bien entendu, on convient que T^{S_0} vaut 1 si $T = S_0 = 0$.

Démonstration. Quand $\ell_0 = 1$ et $\sigma = 1$, on trouve:

$$P_{\tau t 1} = \sum_{h=1}^{d_0} \tau_h W_{h1} Z_h^{\tau_h - 1} \prod_{\substack{1 \leqq j \leqq d_0 \\ j \neq h}} Z_j^{\tau_j} + \sum_{i=1}^{d_1} t_i W_{d_0 + i, 1} \prod_{h=1}^{d_0} Z_h^{\tau_h}.$$

Le résultat annoncé s'en déduit par récurrence sur $\|\sigma\|$. □

Remarques. 1. On peut donner une formule explicite pour les polynômes $P_{\tau t \sigma}$:

$$P_{\tau t \sigma} = \tau! \sigma! \sum_{\kappa, \nu} \left(\prod_{h=1}^{d_0} \prod_{k=1}^{\ell_0} \frac{W_{hk}^{\kappa_{hk}}}{\kappa_{hk}!} \right) \left(\prod_{i=1}^{d_1} \prod_{k=1}^{\ell_0} \frac{(t_i W_{d_0 + i, k})^{\kappa_{d_0 + i, k}}}{\kappa_{d_0 + i, k}!} \right) \left(\prod_{h=1}^{d_0} \frac{Z_h^{\nu_h}}{\nu_h!} \right),$$

où κ, ν décrit les éléments $((\kappa_{ik}), (\nu_h))$ de $\mathbb{N}^{d\ell_0} \times \mathbb{N}^{d_0}$ qui satisfont

$$\sum_{k=1}^{\ell_0} \kappa_{hk} + \nu_h = \tau_h \quad (1 \leqq h \leqq d_0) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{d} \kappa_{ik} = \sigma_k \quad (1 \leqq k \leqq \ell_0).$$

2. On déduit du lemme 4.1 la majoration

$$\mathrm{L}(P_{\tau t\sigma}) \leqq \min\{T^{S_0 - T_0}(T+S_0)^{T_0}, (T+T_0)^{S_0}\}\,. \tag{4.2}$$

(b) Groupes algébriques. Soit d un entier positif. Les constantes c_1, c_2, c_3, c_4 ci-dessous sont des nombres réels $\geqq 1$ et m un entier $\geqq 1$, qui dépendent seulement de d.

Soient K un corps de nombres, D un entier $\geqq [K:\mathbb{Q}]$, G un groupe algébrique commutatif de dimension d défini sur K et plongé dans un espace projectif $\mathbb{P}_N$ sur K; on se donne aussi une base de l'espace tangent $T_G(\mathbb{C})$ définie sur K, et une application analytique $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_N)$ de $\mathbb{C}^d$ dans $\mathbb{C}^{N+1}$, représentant l'application exponentielle de $G(\mathbb{C})$:

$$\exp_G(z) = \big(\varphi_0(z) : \cdots : \varphi_N(z)\big)\,.$$

Quand on sera dans la situation des paragraphes 1 et 2, on appliquera ce qui va suivre à chacun des facteurs G_i ($d_1 < i \leqq n$).

On désigne par $\mathrm{h}(G)$ un nombre réel $\geqq 1$ tel que les propriétés qui suivent soient vérifiées.

(1) *Croissance analytique.* On commence par contrôler la croissance des fonctions entières $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$. On désigne par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Définition. On désigne par H^+ et H^- deux applications $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $R \geqq 0$ et tout $z \in \mathbb{C}^d$ vérifiant $|z| \leqq R$, on ait

$$-H^-(R) \leqq \log\max\{|\varphi_0(z)|, \ldots, |\varphi_N(z)|\} \leqq H^+(R)\,. \tag{4.3}$$

L'existence de H^+ est banale, celle de H^- provient du fait que les fonctions $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$ n'ont pas de zéros communs dans $\mathbb{C}^d$, puisque leurs valeurs en un point $z \in \mathbb{C}^d$ sont des coordonnées projectives du point $\exp_G(z)$.

On déduit des propriétés 4.2 et 4.3 de [D2] que pour une variété abélienne principalement polarisée munie d'un plongement 4Θ, il existe deux constantes positives c^+ et c^-, ne dépendant que de d, telles que l'on puisse choisir

$$H^+(R) = c^+\big(R^2 + D\,\mathrm{h}(G)\big) \quad \text{et} \quad H^-(R) = c^- D\,\mathrm{h}(G)\,.$$

Pour une extension d'une telle variété abélienne on peut donc encore prendre pour H^- une fonction constante (ne dépendant pas de R).

(2) *Formules d'addition.* On suppose de plus qu'il existe une constante $c_1 = c_1(d) \geqq 1$, un entier $m = m(d)$ et des éléments $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)$ de K^m, avec

$$\mathrm{h}(1 : \vartheta_1 : \cdots : \vartheta_m) \leqq c_1\,\mathrm{h}(G)\,,$$

tels que les propriétés suivantes soient vérifiées.

Propriété 4.4. Il existe une constante $c_2 = c_2(d) \geqq 1$ vérifiant l'assertion suivante. Pour tout $u \in \mathbb{C}^d$, il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de 0 dans $\mathbb{C}^d$ et il existe $N+1$ polynômes $A_0, \ldots, A_N$ dans l'anneau

$$\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N, Y_0, \ldots, Y_N, Z_1, \ldots, Z_m]$$

satisfaisant:

(1) le degré total de chacun des polynômes A_ν $(0 \leqq \nu \leqq N)$ est $\leqq c_2$ et sa longueur est $\leqq e^{c_2}$;

(2) les A_ν sont homogènes en $X_0, \ldots, X_N$, tous de même degré; ils sont aussi homogènes de même degré en les variables $Y_0, \ldots, Y_N$;

(3) pour tout z dans $\mathscr{V}$, les valeurs de ces polynômes au point

$$\big(\varphi_0(z), \ldots, \varphi_N(z), \varphi_0(u), \ldots, \varphi_N(u), \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m\big),$$

ne sont pas toutes nulles et forment des coordonnées projectives du point

$$\big(\varphi_0(z+u) : \cdots : \varphi_N(z+u)\big).$$

Dans [D1], la proposition 2.3.6 donne les propriétés des formules d'addition pour les variétés abéliennes, tandis que la proposition 2.3.8 concerne les extensions par $\mathbb{G}_a$ et $\mathbb{G}_m$.

Cette propriété 4.4 permet de majorer $\mathrm{h}(\gamma_1 + \gamma_2)$ pour $\gamma_1 \in G(\bar{\mathbb{Q}})$ et pour $\gamma_2 \in G(\bar{\mathbb{Q}})$ dans un voisinage de 0 (dépendant de γ_1):

$$\mathrm{h}(\gamma_1 + \gamma_2) \leqq c_2\big(1 + c_1 \mathrm{h}(G) + \mathrm{h}(\gamma_1) + \mathrm{h}(\gamma_2)\big).$$

On peut majorer plus efficacement $\mathrm{h}(\gamma_1 + \cdots + \gamma_n)$ pour $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ dans $G(\bar{\mathbb{Q}})$. Pour cela, sur une variété abélienne, on utilise d'une part la quadraticité de la hauteur de Néron-Tate et d'autre part le théorème de Manin-Zarhin comparant les hauteurs de Weil et de Néron-Tate (cf. lemme 4.6 de [D2]). Sur un groupe algébrique commutatif quelconque, on utilise en plus la proposition 5 de [Se].

Propriété 4.5. Il existe une constante $c_3 = c_3(d) \geqq 1$ telle que, pour tout $n \geqq 1$ et toute famille $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ de n éléments de $G(\bar{\mathbb{Q}})$, on ait

$$\mathrm{h}(\gamma_1 + \cdots + \gamma_n) \leqq c_3 n^2 \max\{\mathrm{h}(G), \mathrm{h}(\gamma_1), \ldots, \mathrm{h}(\gamma_n)\}.$$

(3) *Equations différentielles.* La K-structure de l'espace tangent de G à l'origine fournit des équations différentielles satisfaites par les composantes de l'application exponentielle de $G(\mathbb{C})$ (cf. [D2], th. 4.1 pour les variétés abéliennes principalement polarisées munies d'un plongement 4Θ, [D1], propositions 2.3.13 et 2.3.17 pour les extensions d'une telle variété par $\mathbb{G}_m$ et $\mathbb{G}_a$ respectivement).

Propriété 4.6. Il existe une constante $c_4 = c_4(d) \geqq 1$ et un entier rationnel Δ avec $1 \leqq \Delta \leqq e^{c_4}$ tels que, pour tout triplet (k, ν, ι) d'entiers avec $1 \leqq k \leqq d$, $0 \leqq \nu \leqq N$ et

$0 \leqq \iota \leqq N$, il existe un polynôme $C_{k\nu\iota}$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[X_0, \dots, X_N, Z_1, \dots, Z_m]$, de degré total $\leqq c_4$ et de longueur $\leqq e^{c_4}$, tel que la fonction méromorphe de d variables $\Delta(\partial/\partial z_k)(\varphi_\nu(z)/\varphi_\iota(z))$ soit égale à

$$C_{k\nu\iota}(\varphi_0(z)/\varphi_\iota(z), \dots, \varphi_N(z)/\varphi_\iota(z), \vartheta_1, \dots, \vartheta_m).$$

On désignera, pour $0 \leqq \nu, \iota \leqq N$, par $\psi_{\nu\iota}$ la fonction méromorphe $\varphi_\nu/\varphi_\iota$ (aucune des fonctions φ_ι n'est identiquement nulle). On écrira aussi

$$\psi_\iota = (\psi_{0\iota}, \dots, \psi_{N\iota}),$$

considérée comme application méromorphe de $\mathbb{C}^d$ dans $\mathbb{C}^{N+1}$.

Quand $t_0, \dots, t_N$ sont des entiers $\geqq 0$ de somme T, on a, pour $w = (w_1, \dots, w_d) \in \mathbb{C}^d$ et $0 \leqq \iota \leqq N$,

$$\Delta D_w\left(\prod_{\nu=0}^{N} \psi_{\nu\iota}^{t_\nu}\right) = \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{k=1}^{d} t_\nu w_k \psi_{\nu\iota}^{t_\nu - 1}\left(\prod_{\mu \neq \nu} \psi_{\mu\iota}^{t_\mu}\right) C_{k\nu\iota}(\psi_\iota, \vartheta).$$

On en déduit, quand $w_1, \dots, w_{\ell_0}$ sont des éléments de $\mathbb{C}^d$, S_0 un entier $\geqq 0$ et σ un élément de $\mathbb{N}^{\ell_0}$ avec $\|\sigma\| \leqq S_0$, que la fonction

$$\Delta^{\|\sigma\|} D_w^\sigma\left(\prod_{\nu=0}^{N} \psi_{\nu\iota}^{t_\nu}\right)$$

s'exprime comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$,

– homogène de degré σ_k en $w_{1k}, \dots, w_{dk}$ $(1 \leqq k \leqq \ell_0)$,

– en $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m, \psi_{0\iota}, \dots, \psi_{N\iota}$, de degré total $\leqq T + (c_4 - 1)S_0$,

– de longueur

$$\leqq d^{\|\sigma\|} e^{c_4\|\sigma\|} \prod_{i=0}^{\|\sigma\|-1} (T + (c_4 - 1)i) \leqq d^{S_0} e^{c_4 S_0}(T + c_4 S_0)^{S_0}.$$

Dans le cas trivial $S_0 = T = 0$, cette longueur vaut 1 (par convention un produit vide est égal à 1).

(c) Exemple: courbes elliptiques. Voici un choix admissible de valeurs dans le cas $d = 1$ pour les nombres $m, c_1, \dots, c_4$ et Δ des trois dernieres propriétés:

$$m = 2, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 7, \quad c_3 = 12, \quad c_4 = 3, \quad \Delta = 2.$$

Les cas $G = \mathbb{G}_a$ et $G = \mathbb{G}_m$ étant triviaux, il suffit de le vérifier quand G est une courbe elliptique. C'est l'objet de ce qui suit.

Soit E une courbe elliptique définie sur un corps de nombres K avec $[K:\mathbb{Q}] \leqq D$. On choisit un modèle de Weierstraß de E:

$$E(\mathbb{C}) = \{(1 : \wp(z) : \wp'(z)); z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C}).$$

On désigne par g_2 et g_3 les invariants de $\wp$ et par j l'invariant modulaire:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \quad j = \frac{1728 g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}.$$

On prend $m = 2$ et $\vartheta_1 = g_2$, $\vartheta_2 = g_3$. On définit

$$\mathrm{h}(E) = \max\{1, \mathrm{h}(1 : g_2 : g_3), \mathrm{h}(j)\},$$

ce qui permet de choisir $c_1 = 1$.

On choisit une base (ω_1, ω_2) du réseau $\Omega = \ker \exp_E$ des périodes de $\wp$ avec $\tau = \omega_2/\omega_1 \in \mathscr{F}$, où $\mathscr{F}$ est le domaine fondamental habituel pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré.

On désigne par $\wp_\tau$ et σ_τ les fonctions de Weierstraß associées au réseau $\Omega_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$; elles sont reliées aux fonctions $\wp$ et σ (associées au réseau Ω) par

$$\sigma(z) = \omega_1 \sigma_\tau(z/\omega_1), \quad \wp(z) = \omega_1^{-2} \wp_\tau(z/\omega_1).$$

On pose ensuite $\eta_1 = 2\zeta(\omega_1/2)$,

$$\varphi_\tau(z) = e^{-(\eta_1 z^2/2) + i\pi z} \sigma_\tau(z), \quad \varphi(z) = \omega_1 \varphi_\tau(z/\omega_1)$$

et

$$\varphi_0(z) = \varphi^3(z), \quad \varphi_1(z) = \varphi_3(z)\wp(z), \quad \varphi_2(z) = \varphi^3(z)\wp'(z).$$

(1) *Estimations analytiques.* D'après la Proposition 3.1 de [D3] on a pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 7 \cdot 10^{-4} \exp\{-2.51\pi \operatorname{Im}(\tau) - 3\pi|\operatorname{Im}(z)| + 3\pi|\operatorname{Im}(z)|^2/\operatorname{Im}(\tau)\} \\ \leqq \max\{|\varphi_\tau^3(z)|, |\varphi_\tau^3(z)\wp_\tau(z)|, |\varphi_\tau^3(z)\wp_\tau'(z)|\} \\ \leqq 3.33 \exp\{3\pi((1/4)\operatorname{Im}(\tau) + |\operatorname{Im}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|^2/\operatorname{Im}(\tau))\}; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 7 \cdot 10^{-4} \min\{1, |\omega_1|^3\} \exp\{-2.51\pi \operatorname{Im}(\tau) - 3\pi|\operatorname{Im}(z/\omega_1)| + 3\pi|\operatorname{Im}(z/\omega_1)|^2/\operatorname{Im}(\tau)\} \\ \leqq \max\{|\varphi^3(z)|, |\varphi^3(z)\wp(z)|, |\varphi^3(z)\wp'(z)|\} \\ \leqq 3.33 \max\{1, |\omega_1|^3\} \exp\{(3\pi/4)\operatorname{Im}(\tau) + 3\pi|\operatorname{Im}(z/\omega_1)| + 3\pi|\operatorname{Im}(z/\omega_1)|^2/\operatorname{Im}(\tau)\}. \end{aligned}$$

Pour estimer $|\omega_1|$, on utilise le lemme 3.2 de [D3] (voir aussi le Δ-lemme de [FP]):

$$\frac{1}{(12|g_2|)^{1/4}} e^{1.825 - (\pi/6)\operatorname{Im}(\tau)} |j|^{1/12} \leqq |\omega_1| \leqq \frac{1}{(12|g_2|)^{1/4}} e^{1.85 - (\pi/6)\operatorname{Im}(\tau)} |j|^{1/12}$$

si $j \neq 0$, et

$$\frac{1}{(27|g_3|^2)^{1/12}}\, e^{1.825-(\pi/6)\mathrm{Im}(\tau)} \leqq |\omega_1| \leqq \frac{1}{(27|g_3|^2)^{1/12}}\, e^{1.85-(\pi/6)\mathrm{Im}(\tau)}$$

si $j = 0$ (le cas $j = 0$ se déduit du cas $j \neq 0$ en passant à la limite quand $g_2 \to 0$). D'un autre côté on a aussi

$$-D\,\mathrm{h}(E) \leqq -D\,\mathrm{h}(j) \leqq \log|j| \leqq D\,\mathrm{h}(j) \leqq D\,\mathrm{h}(E)$$

et

$$-D\,\mathrm{h}(E) \leqq -D\,\mathrm{h}(g_2) \leqq \log|g_2| \leqq D\,\mathrm{h}(g_2) \leqq D\,\mathrm{h}(E)$$

si $j \neq 0$, et

$$-D\,\mathrm{h}(E) \leqq -D\,\mathrm{h}(g_3) \leqq \log|g_3| \leqq D\,\mathrm{h}(g_3) \leqq D\,\mathrm{h}(E)$$

si $j = 0$ (car alors $g_3 \neq 0$). En utilisant le lemme 1 de [FP] on obtient l'encadrement suivant de $\mathrm{Im}(\tau)$, pour $\tau \in \mathscr{F}$ et $j = j(\tau)$:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \mathrm{Im}(\tau) \leqq \frac{3}{2}\max\{1, \log|j|\} \leqq \frac{3}{2}\, D\,\mathrm{h}(E).$$

Ainsi on trouve

$$-\frac{3\pi+4}{12}\, D\,\mathrm{h}(E) + 1.20 \leqq \log|\omega_1| \leqq 0.8 + \frac{1}{3}\, D\,\mathrm{h}(E)$$

si $j \neq 0$, et

$$-\frac{3\pi+2}{12}\, D\,\mathrm{h}(E) + 1.55 \leqq \log|\omega_1| \leqq 1.13 + \frac{1}{6}\, D\,\mathrm{h}(E)$$

si $j = 0$. Dans tous les cas on obtient

$$-\frac{3\pi+4}{12}\, D\,\mathrm{h}(E) + 1.20 \leqq \log\min\{1, |\omega_1|\} \quad \text{et} \quad \log\max\{1, |\omega_1|\} < \frac{1}{3}\, D\,\mathrm{h}(E) + 1\,.$$

On minore finalement $-|\mathrm{Im}(z/\omega_1)| + |\mathrm{Im}(z/\omega_1)|^2/\mathrm{Im}(\tau)$ par $-(1/4)\mathrm{Im}(\tau)$, ce qui permet de poser

$$H^+(R) = 5 + 5D\,\mathrm{h}(E) + 3\pi\frac{R}{|\omega_1|} + 3\pi\frac{R^2}{|\omega_1|^2\,\mathrm{Im}(\tau)} \quad \text{et} \quad H^-(R) = 19D\,\mathrm{h}(E) + 4\,.$$

Remarque. Le nombre $|\omega_1|^2\,\mathrm{Im}(\tau) = \mathrm{Im}(\omega_2\bar{\omega}_1)$ est l'aire d'un domaine fondamental du réseau Ω.

(2) *Formules d'addition.* Pour $u \in \Omega$ la proposition 4.4 est trivialement vérifiée avec $A_0 = X_0$, $A_1 = X_1$ et $A_2 = X_2$. Supposons $u \notin \Omega$. Si on utilise les formules d'addition bien connues

$$\wp(z+u) = -\wp(z) - \wp(u) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(u)}{\wp(z) - \wp(u)}\right)^2,$$

et

$$\wp'(z+u) = -\frac{\wp'(z)-\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}\,\wp(z+u) + \frac{\wp(u)\wp'(z)-\wp(z)\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)},$$

on obtient les polynômes

$$A_0 = 4(X_1Y_0 - X_0Y_1)^3 X_0 Y_0,$$

$$A_1 = -4(X_1Y_0 - X_0Y_1)^3(X_1Y_0 + X_0Y_1) + (X_1Y_0 - X_0Y_1)(X_2Y_0 - X_0Y_2)^2 X_0Y_0,$$

$$A_2 = 4(X_2Y_0 - X_0Y_2)(X_1Y_0 + X_0Y_1)(X_1Y_0 - X_0Y_1)^2$$
$$-(X_2Y_0 - X_0Y_2)^3 X_0Y_0 + 4(X_2Y_1 - X_1Y_2)(X_1Y_0 - X_0Y_1)^2 X_0Y_0,$$

qui sont de degré total 8 et de bidegrés (4, 4) en (X_0, X_1, X_2) et (Y_0, Y_1, Y_2). La solution n'est pas unique: on peut changer de représentant dans une classe modulo l'idéal engendré par les polynômes

$$X_0X_2^2 - 4X_1^3 + Z_1X_0^2X_1 + Z_2X_0^3 \quad \text{et} \quad Y_0Y_2^2 - 4Y_1^3 + Z_1Y_0^2Y_1 + Z_2Y_0^3.$$

Lange et Ruppert ([LR], §3) ont écrit des formules d'addition de bidegrés (2, 2) en (X_0, X_1, X_2) et (Y_0, Y_1, Y_2) qui sont associées à un recouvrement de $\mathbb{C}^2$: il s'agit d'un «système complet de lois d'additions» (c'est plus précis que ce que demande la proposition 4.4). Parmi les polynômes qui interviennent dans ces formules, celui qui a à la fois le plus grand degré et la plus grande longueur est

$$4X_2^2Y_2^2 - 48X_1^2Y_1^2Z_1 + X_0^2Y_0^2(Z_1^3 - 36Z_2^2) - 4(X_0Y_1 + X_1Y_0)^2Z_1^2$$
$$-8X_0X_1Y_0Y_1Z_1^2 - (X_0Y_1 + X_1Y_0)(144X_1Y_1Z_2 + 12X_0Y_0Z_1Z_2).$$

Son degré total est 7 et sa longueur $425 \leqq e^7$. On peut donc prendre $c_2 = 7$.

(3) *Hauteur de Néron-Tate.* La différence entre la hauteur quadratique de Néron-Tate et la hauteur h sur $E(\bar{\mathbb{Q}})$ a été majorée explicitement par H. Zimmer (lemme 3.4 de [D3]). On en déduit

$$\mathrm{h}(\gamma_1 + \cdots + \gamma_n) \leqq \frac{3}{4}(n^2+2)\mathrm{h}(E) + \frac{\log 2}{3}(14n^2+23) + n^2\max\{\mathrm{h}(\gamma_1), \ldots, \mathrm{h}(\gamma_n)\}.$$

On majore $(9/4) + (37/3)\log 2$ par 11, ce qui autorise à prendre $c_3 = 12$.

(4) *Equation différentielle.* On définit six fonctions méromorphes $\psi_{ij} = \varphi_i/\varphi_j$ pour $0 \leqq i \leqq 2$ et $0 \leqq j \leqq 2$ avec $i \neq j$:

$$\psi_{10} = \wp, \quad \psi_{20} = \wp', \quad \psi_{21} = \wp'/\wp,$$
$$\psi_{01} = 1/\wp, \quad \psi_{02} = 1/\wp', \quad \psi_{12} = \wp/\wp'.$$

On vérifie alors, à partir de l'équation différentielle

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

que l'on a

$$2\psi'_{10} = 2\psi_{20}\,, \quad 2\psi'_{20} = 12\psi_{10}^2 - g_2\,, \quad 2\psi'_{21} = \psi_{21}^2 + 2g_2\psi_{01} + 3g_3\psi_{01}^2\,,$$

$$2\psi'_{01} = -2\psi_{01}\psi_{21}\,, \quad 2\psi'_{02} = -12\psi_{12}^2 + g_2\psi_{02}^2\,, \quad 2\psi'_{12} = -1 - 2g_2\psi_{02}\psi_{12} - 3g_3\psi_{02}^2\,.$$

Chacun des 6 polynômes du second membre a un degré total $\leqq 2$ et une longueur $\leqq 13 < e^3$, ce qui justifie les valeurs $\Delta = 2$ et $c_4 = 3$.

Remarque. On aurait aussi pu prendre $\Delta = 1$ si on avait choisi $\vartheta_1 = g_2/2$; mais il faudrait alors soit remplacer g_2 par $g_2/2$ dans la définition de $\mathrm{h}(E)$, soit remplacer c_1 par $1 + \log 2$.

(d) L'astuce de Baker-Coates-Anderson. Voici comment seront utilisées les propriétés (4.3), 4.4, 4.5 et 4.6. *On supposera dans la suite, d'abord que le nombre $\varphi_0(0)$ n'est pas nul, ensuite que l'ensemble $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m\}$ contient les nombres $\psi_{\nu 0}(0) = \varphi_\nu(0)/\varphi_0(0)$* $(1 \leqq \nu \leqq N)$. Noter que cela peut demander une permutation des φ_ν; par exemple, dans le cas elliptique, il convient maintenant de numéroter $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ de telle sorte que

$$\varphi_0(z) = \varphi^3(z)\wp'(z)\,.$$

Soit u un élément de $\mathbb{C}^d$; soit ι un indice, $0 \leqq \iota \leqq N$, tel que $\varphi_\iota(u) \neq 0$. De plus, soient $w_1, \ldots, w_{\ell_0}$ des éléments de $\mathbb{C}^d$, $\sigma \in \mathbb{N}^{\ell_0}$ et $t = (t_0, \ldots, t_{\iota-1}, t_{\iota+1}, \ldots, t_N) \in \mathbb{N}^N$. On considère la fonction méromorphe dans $\mathbb{C}^d$:

$$\psi_\iota^t = \prod_{\substack{0 \leqq \nu \leqq N \\ \nu \neq \iota}} (\varphi_\nu/\varphi_\iota)^{t_\nu}$$

et on s'intéresse au nombre $D_w^\sigma \psi_\iota^t(u)$. On introduit encore deux entiers $T > 0$ et $S_0 \geqq 0$ tels que $\|t\| \leqq T$ et $\|\sigma\| \leqq S_0$.

On commence par utiliser les formules d'addition: d'après la propriété 4.4, il existe des polynômes $A_0, \ldots, A_N$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, qui dépendent du point u, dont les valeurs au point

$$\big(\varphi_0(z), \ldots, \varphi_N(z), \varphi_0(u), \ldots, \varphi_N(u), \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m\big)\,,$$

pour z dans un voisinage de 0, soient des coordonnées projectives du point

$$\big(\varphi_0(z+u) : \cdots : \varphi_N(z+u)\big)\,.$$

Comme $\varphi_\iota(u) \neq 0$, on a aussi $A_\iota\big(\varphi(0), \varphi(u)\big) \neq 0$. Dans la suite, z décrira un voisinage $\mathscr{V}$ de 0 dans $\mathbb{C}^d$ dans lequel $A_\iota\big(\varphi(z), \varphi(u)\big) \neq 0$ et

$$\Big(A_0\big(\varphi(z), \varphi(u)\big) : \cdots : A_N\big(\varphi(z), \varphi(u)\big)\Big) = \big(\varphi_0(z+u) : \cdots : \varphi_N(z+u)\big)\,.$$

Ainsi, pour $z \in \mathscr{V}$,

$$\psi_\iota^t(z+u) = \prod_{\substack{0 \leqq \nu \leqq N \\ \nu \neq \iota}} \left(\frac{A_\nu\big(\varphi(z), \varphi(u)\big)}{A_\iota\big(\varphi(z), \varphi(u)\big)}\right)^{t_\nu} = \prod_{\substack{0 \leqq \nu \leqq N \\ \nu \neq \iota}} \left(\frac{A_\nu\big(\varphi_0(z), \psi_\iota(u)\big)}{A_\iota\big(\psi_0(z), \psi_\iota(u)\big)}\right)^{t_\nu}.$$

On multiplie par $A_\iota^T(\psi_0(z), \psi_\iota(u))$, on dérive σ fois et on obtient, en posant $t_\iota = T - \|t\|$,

$$D_w^\sigma\big(A_\iota^T(\psi_0(z), \psi_\iota(u))\,\psi_\iota^t(z+u)\big) = D_w^\sigma\left(\prod_{\nu=0}^{N} A_\nu^{t_\nu}(\psi_0(z), \psi_\iota(u))\right).$$

On peut écrire le membre de gauche sous la forme

$$A_\iota^T(\psi_0(z), \psi_\iota(u))\,D_w^\sigma(\psi_\iota^t(z+u)) + \sum_{\|\sigma'\| < \|\sigma\|} q_{\sigma'}(z, u)\,D_w^{\sigma'}(\psi_\iota^t(z+u)),$$

où, dans la somme, σ' décrit l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}^{\ell_0}$ qui satisfont $\|\sigma'\| < \|\sigma\|$, tandis que $q_{\sigma'}(z, u)$ sont des nombres complexes qui ne dépendent pas de t, mais seulement de T.

On considère maintenant le membre de droite. D'après la propriété 4.4,

$$\prod_{\nu=0}^{N} A_\nu^{t_\nu}(\psi_0(z), \psi_\iota(u))$$

est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ en

$$\psi_0(z) = (\psi_{00}(z), \ldots, \psi_{N0}(z)), \quad \psi_\iota(u) = (\psi_{0\iota}(u), \ldots, \psi_{N\iota}(u)), \quad \vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m),$$

de degré total $\leqq c_2 T$ et de longueur $\leqq e^{c_2 T}$. On utilise ensuite la propriété 4.6 et la remarque qui la suit:

$$\Delta^{\|\sigma\|} D_w^\sigma\left(\prod_{\nu=0}^{N} A_\nu^{t_\nu}(\psi_0(z), \psi_\iota(u))\right)$$

peut s'exprimer comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$,

- homogène de degré σ_k en $w_{1k}, \ldots, w_{dk}$ $(1 \leqq k \leqq \ell_0)$,
- en $\psi_\iota(u)$, de degré $\leqq c_2 T$,
- en $\psi_0(z)$ et ϑ, de degré total $\leqq c_2 T + (c_4 - 1) S_0$,
- de longueur

$$\leqq e^{c_2 T} d^{S_0} e^{c_4 S_0} (c_2 T + c_4 S_0)^{S_0}.$$

On prendra finalement la valeur en $z = 0$; on a supposé que les nombres $\psi_{\nu 0}(0)$ appartenaient à l'ensemble $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m\}$ pour pouvoir omettre la dépendance en $\psi_0(0) = (\psi_{00}(0), \ldots, \psi_{N0}(0))$.

Remarque. Cela corrige l'argument de la section 4 c de [PW], p. 292: il y est affirmé qu'il existe des *polynômes* $P_{ts}^{(\alpha)}$ qui représentent le composé de dérivations D^t et d'opérateurs de translation $\tau_{sv}^{(\alpha)}$; si les dérivations font en effet intervenir des polynômes, les translations en revanche nécessitent des *fractions rationnelles*; prenons par exemple $t = 0$ (on ne dérive pas), $s = 1$, $\psi_1 = \wp$, $\psi_2 = \wp'$ et $P = X_1$, la fonction $\wp(v + z)$, dont les pôles sont $-v + \Omega$, ne peut pas s'exprimer comme *polynôme* en $\wp(z)$ et $\wp'(z)$.

(e) Conclusion. On considère maintenant la situation générale du paragraphe 2, pour un produit $G = G_0 \times G_1 \times \cdots \times G_n$, avec $G_0 = \mathbb{G}_a^{d_0}$, $G_1 = \cdots = G_{d_1} = \mathbb{G}_m$; comme on l'a dit au début de ce paragraphe, on va appliquer ce qui précède à chacun des facteurs G_i $(d_1 \leqq i \leqq n)$, dont la dimension est δ_i. Ces groupes algébriques sont tous définis sur le même corps de nombres K. On supposera que chacun des groupes $G_{d_1+1}, \ldots, G_n$ vérifie les propriétés (4.3), 4.4, 4.5 et 4.6.

On dispose, pour chaque $i = d_1 + 1, \ldots, n$, de constantes $c_1(\delta_i), \ldots, c_4(\delta_i)$, toutes $\geqq 1$, de deux applications H_i^+ et H_i^- de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, de deux entiers positifs $m(\delta_i)$ et $\Delta(\delta_i)$, avec $\Delta(\delta_i) \leqq \exp\{c_4(\delta_i)\}$, et enfin d'un élément

$$\vartheta^{(i)} = (\vartheta_1^{(i)}, \ldots, \vartheta_{m(\delta_i)}^{(i)})$$

de $K^{m(\delta_i)}$, tout ceci ayant été défini dans la section (b) ci-dessus (où d est maintenant remplacé par $\delta_{d_1+1}, \ldots, \delta_n$ respectivement). On pose:

$$C_j = \max_{d_1 < i \leqq n} c_j(\delta_i) \quad \text{pour } j = 1, 2, 3, \quad C_4 = \sum_{i = d_1 + 1}^{n} c_4(\delta_i)$$

et

$$\Delta = \prod_{i = d_1 + 1}^{n} \Delta(\delta_i).$$

On a donc

$$\mathrm{h}(1 : \vartheta_1^{(i)} : \cdots : \vartheta_{m(\delta_i)}^{(i)}) \leqq C_1 \mathrm{h}(G_i) \quad \text{et} \quad \Delta \leqq e^{C_4}.$$

Ces paramètres C_j, Δ ne dépendent que de $d_1, n, \delta_{d_1+1}, \ldots, \delta_n$. Ils sont donc majorés par des fonctions de $d = \dim G$.

Enfin, pour $d_1 < i \leqq n$, on considère une famille de polynômes $(A_0^{(i)}, \ldots, A_{N_i}^{(i)})$ donnant, d'après la propriété 4.4, des formules d'addition au voisinage du point $u^{(i)}$ sur le groupe G_i. Pour alléger les notations on écrira $A_\nu^{(i)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ au lieu de

$$A_\nu^{(i)}(X_1, \ldots, X_{N_i}, Y_1, \ldots, Y_{N_i}, \theta_1^{(i)}, \ldots, \theta_{m(\delta_i)}^{(i)}).$$

Remarque sur le cas $d_2 = 0$. Pour que le résultat que nous allons démontrer (proposition 4.7) soit encore vrai dans le cas $d_2 = 0$ (c'est-à-dire $n = d_1$; cf. lemme 4.1), on posera, dans ce cas particulier, $C_j = 0$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ et $\Delta = 1$.

On va travailler avec des fonctions de d variables complexes $z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d$. On écrira aussi $z = (z^{(0)}, \ldots, z^{(n)})$, avec

$$z^{(i)} = \begin{cases} (z_1, \ldots, z_{d_0}) \in \mathbb{C}^{d_0} & \text{pour } i = 0, \\ z_{d_0 + i} \in \mathbb{C} & \text{pour } 1 \leqq i \leqq d_1, \\ (z_{\delta_0 + \cdots + \delta_{i-1} + j})_{1 \leqq j \leqq \delta_i} \in \mathbb{C}^{\delta_i} & \text{pour } d_1 < i \leqq n. \end{cases}$$

En utilisant (4.3), on déduit, pour $d_1 < i \leqq n$ et $|z^{(i)}| \leqq R_i$,

$$H_i^-(R_i) \leqq \log \max\{|\varphi_0^{(i)}(z^{(i)})|, \ldots, |\varphi_{N_i}^{(i)}(z^{(i)})|\} \leqq H_i^+(R_i)\,.$$

Soit $u \in \mathbb{C}^d$; pour chaque indice i dans l'intervalle $d_1 < i \leqq n$, on choisit un indice ι_i avec $0 \leqq \iota_i \leqq N_i$ tel que

$$\varphi_{\iota_i}^{(i)}(u^{(i)}) \neq 0\,.$$

On note encore, pour $d_1 < i \leqq n$ et $0 \leqq \nu, \iota \leqq N_i$:

$$\psi_{\nu\iota}^{(i)} = \varphi_\nu^{(i)}/\varphi_\iota^{(i)} \quad \text{et} \quad \psi_\iota^{(i)} = (\psi_{0\iota}^{(i)}, \ldots, \psi_{N_i\iota}^{(i)})\,.$$

Pour $d_1 < i \leqq n$, chacune des fonctions $\psi_{\nu\iota_i}^{(i)}$ $(0 \leqq \nu \leqq N_i)$ est analytique au voisinage du point $u^{(i)}$. Rappelons aussi que l'on a supposé $\varphi_0^{(i)}(0) \neq 0$ $(d_1 < i \leqq n)$.

Soient $T_0, \ldots, T_n$ des entiers positifs; on définit

$$T = T_1 + \cdots + T_n \quad \text{et} \quad T^* = T_{d_1+1} + \cdots + T_n\,.$$

Pour chaque (τ, t) dans $\mathbb{N}^{d_0+n+N_{d_1+1}+\cdots+N_n}$ dont les composantes

$$(\tau_h)_{1 \leqq h \leqq d_0} \in \mathbb{N}^{d_0}, \quad (t_i)_{1 \leqq i \leqq d_1} \in \mathbb{N}^{d_1}$$

et

$$t_i = (t_{\nu i})_{0 \leqq \nu \leqq N_i} \in \mathbb{N}^{N_i+1} \quad (d_1 < i \leqq n)$$

satisfont:

$$\tau_1 + \cdots + \tau_{d_0} \leqq T_0\,,$$

$$t_i \leqq T_i \quad (1 \leqq i \leqq d_1) \quad \text{et} \quad \sum_{\nu=0}^{N_i} t_{\nu i} = T_i \quad (d_1 < i \leqq n)\,,$$

on définit une fonction $\Psi_{\tau t}$, méromorphe dans $\mathbb{C}^d$, par

$$\Psi_{\tau t}(z) = \prod_{h=1}^{d_0} z_h^{\tau_h} \prod_{i=1}^{d_1} e^{t_i z_{d_0+i}} \prod_{i=d_1+1}^{n} \prod_{\nu=0}^{N_i} (\psi_{\nu\iota_i}^{(i)}(z^{(i)}))^{t_{\nu i}}\,.$$

Voici le résultat principal de ce paragraphe.

Proposition 4.7. *Etant donné des éléments $w_1, \ldots, w_{\ell_0}$ dans $\mathbb{C}^d$, un élément σ dans $\mathbb{N}^{\ell_0}$ avec $\|\sigma\| \leqq S_0$, et un point u dans $\mathbb{C}^d$, quand on choisit $(\iota_{d_1+1}, \ldots, \iota_n)$ de sorte que $\varphi_{\iota_i}^{(i)}(u^{(i)}) \neq 0$ $(d_1 + 1 \leqq i \leqq n)$, il existe des nombres complexes $q_{\sigma'}$ (indexés par σ' qui décrit l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}^{\ell_0}$ satisfaisant $\|\sigma'\| < \|\sigma\|$), tels que, pour tout (τ, t) comme ci-dessus, le nombre*

$$\Delta^{S_0}(D_w^\sigma \Psi_{\tau t}(u)) \prod_{i=d_1+1}^{n} (A_{\iota_i}^{(i)}(\psi_0^{(i)}(0), \psi_{\iota_i}^{(i)}(u^{(i)})))^{T_i} + \sum_{\|\sigma'\| < \|\sigma\|} q_{\sigma'} D_w^{\sigma'} \Psi_{\tau t}(u)$$

soit la valeur d'un polynôme, à coefficients dans $\mathbb{Z}$,

– *en* $w_{1k}, \ldots, w_{dk}$, *homogène de degré* σ_k $(1 \leqq k \leqq \ell_0)$,

– *en* $w_{h1}, \ldots, w_{h\ell_0}, u_h$, *homogène de degré* τ_h $(1 \leqq h \leqq d_0)$,

– *en* $e^{u_{d_0+i}}$, *de degré* $\leqq T_i$ $(1 \leqq i \leqq d_1)$,

– *en* $\psi^{(i)}_{\iota_i}(u^{(i)}) = \left(\psi^{(i)}_{0\iota_i}(u^{(i)}), \ldots, \psi^{(i)}_{N_i\iota_i}(u^{(i)})\right)$, *de degré* $\leqq C_2 T_i$ $(d_1 < i \leqq n)$,

– *en* $\vartheta^{(i)} = (\vartheta^{(i)}_1, \ldots, \vartheta^{(i)}_{m(\delta_i)})$, *de degré* $\leqq C_2 T_i + c_4(\delta_i) S_0$ $(d_1 < i \leqq n)$,

– *de longueur*

$$\leqq e^{C_5 S_0 + C_2 T^*}(T_0 + T + S_0)^{S_0},$$

avec

$$C_5 = 2C_4 + \log\left(\delta^*(C_2 + C_4)\right), \quad \delta^* = \max\{\delta_{d_1+1}, \ldots, \delta_n\}.$$

Remarque. Les nombres $q_{\sigma'}$ dépendent de $\sigma, w, u, T_0, \ldots, T_n$, mais pas de (τ, t).

Démonstration. Pour simplifier l'écriture on introduit des fonctions de d variables complexes:

$$F_0(z) = \prod_{h=1}^{d_0} z_h^{\tau_h} \prod_{i=1}^{d_1} e^{t_i z_{d_0+i}}$$

et

$$\left(\psi^{(i)}(z)\right)^{t_i} = \prod_{\nu=0}^{N_i} \left(\psi^{(i)}_{\nu\iota_i}(z^{(i)})\right)^{t_{\nu i}} \quad (d_1 < i \leqq n),$$

pour pouvoir écrire

$$\Psi_{\tau t}(z) = F_0(z) \prod_{i=d_1+1}^{n} \left(\psi^{(i)}(z)\right)^{t_i}.$$

On utilise la propriété 4.4: pour $d_1 < i \leqq n$ on a

$$\left(\psi^{(i)}(z+u)\right)^{t_i} = \prod_{\nu=0}^{N_i} \left(\frac{A^{(i)}_\nu\left(\psi^{(i)}_0(z^{(i)}), \psi^{(i)}_{\iota_i}(u^{(i)})\right)}{A^{(i)}_{\iota_i}\left(\psi^{(i)}_0(z^{(i)}), \psi^{(i)}_{\iota_i}(u^{(i)})\right)}\right)^{t_{\nu i}}.$$

On pose encore

$$A(z) = \prod_{i=d_1+1}^{n} \left(A^{(i)}_{\iota_i}\left(\psi^{(i)}_0(z^{(i)}), \psi^{(i)}_{\iota_i}(u^{(i)})\right)\right)^{T_i}$$

et

$$\begin{aligned} F_{i-d_1}(z) &= \left(A^{(i)}_{\iota_i}\left(\psi^{(i)}_0(z^{(i)}), \psi^{(i)}_{\iota_i}(u^{(i)})\right)\right)^{T_i}\left(\psi^{(i)}(z+u)\right)^{t_i} \\ &= \prod_{\nu=0}^{N_i} \left(A^{(i)}_\nu\left(\psi^{(i)}_0(z^{(i)}), \psi^{(i)}_{\iota_i}(u^{(i)})\right)\right)^{t_{\nu i}} \quad (d_1 < i \leqq n), \end{aligned}$$

de sorte que

$$A(z)\Psi_{\tau t}(z+u) = F_0(z+u) F_1(z) \cdots F_{n-d_1}(z).$$

On multiplie les deux membres de cette dernière relation par Δ^{S_0}, on applique l'opérateur D_w^σ, puis on remplace z par 0. A gauche on trouve

$$\Delta^{S_0} A(0) D_w^\sigma \Psi_{\tau t}(u) + \sum_{\|\sigma'\| < \|\sigma\|} q_{\sigma'} D_w^{\sigma'} \Psi_{\tau t}(u) .$$

A droite on obtient

$$\Delta^{S_0 - \|\sigma\|} \sum_{\kappa_0 + \kappa_1 + \cdots + \kappa_{n-d_1} = 0} \frac{\sigma!}{\kappa_0! \cdots \kappa_{n-d_1}!} \prod_{i=0}^{n-d_1} (\Delta/\Delta_i)^{\|\kappa_i\|} \Delta_i^{\|\kappa_i\|} D_w^{\kappa_i} F_i(u^*) ,$$

avec $\Delta_0 = 1$, $\Delta_i = \Delta(\delta_i)$ $(1 \leqq i \leqq n - d_1)$ et

$$u^* = (u^{(0)}, \ldots, u^{(d_1)}, 0, \ldots, 0) ,$$

ce qui fournit le polynôme désiré en appliquant le lemme 4.1 et la section (d) ci-dessus; la longueur de ce polynôme est majorée, d'après (4.2), par

$$\Delta^{S_0} \sum_\kappa \frac{\sigma!}{\kappa!} (T_0 + \cdots + T_{d_1})^{\|\kappa_0\|} \prod_{i=1}^{n-d_1} e^{C_2 T_{d_1+i}} \delta_{d_1+i}^{\|\kappa_i\|} (C_2 T_{d_1+i} + c_4(\delta_i) \|\kappa_i\|)^{\|\kappa_i\|} e^{c_4(\delta_i)\|\kappa_i\|}$$

$$\leqq \Delta^{S_0} (T_0 + T_1 + \cdots + T_{d_1} + C_2 T^* + C_4 S_0)^{S_0} e^{C_2 T^*} e^{C_4 S_0} \max_{d_1 + 1 \leqq i \leqq n} \delta_i^{S_0} . \quad \square$$

Remarque. Dans l'application que nous avons en vue il faudra *majorer* le facteur

$$A(0) = \prod_{i=d_1+1}^{n} (A_{t_i}^{(i)}(\psi_0^{(i)}(0), \psi_{t_i}^{(i)}(u^{(i)})))^{T_i} ;$$

c'est la valeur, au point

$$(\psi_0^{(d_1+1)}(0), \ldots, \psi_0^{(n)}(0), \psi_{t_{d_1+1}}^{(d_1+1)}(u^{(d_1+1)}), \ldots, \psi_{t_n}^{(n)}(u^{(n)}), \vartheta^{(d_1+1)}, \ldots, \vartheta^{(n)}) ,$$

d'un polynôme de degré $\leqq C_2 T_i$ en les variables correspondant à $\psi_0^{(i)}(0)$, $\psi_{t_i}^{(i)}(u^{(i)})$ et $\vartheta^{(i)}$ $(d_1 < i \leqq n)$, et de longueur majorée par $e^{C_2 T^*}$. Comme chacun des nombres $\psi_0^{(i)}(0)$ appartient à l'ensemble $\{\vartheta_1^{(i)}, \ldots, \vartheta_{m(\delta_i)}^{(i)}\}$, on a

$$\log |A(0)| \leqq C_2 \sum_{i=d_1+1}^{n} T_i \big(1 + C_1 D \mathrm{h}(G_i) + \log \max\{1, \max_{0 \leqq v \leqq N_i} |\psi_{v t_i}^{(i)}(u^{(i)})|\}\big) .$$

§ 5. Majoration analytique d'un déterminant

La démonstration du théorème 2.1 pourrait être faite à l'aide de la méthode transcendante classique remontant à Thue et Siegel, utilisant une fonction auxiliaire construite par application du principe des tiroirs de Dirichlet. Nous préférons l'approche plus moderne qui repose sur l'étude de déterminants d'interpolation; cette dernière méthode a deux avantages: la démonstration est un peu plus simple, et les constantes, plus faciles à calculer, sont légèrement meilleures.

On doit à Michel Laurent [L1] l'observation que des déterminants de la forme $(\varphi_\lambda(\eta_\mu))_{1 \leqq \lambda, \mu \leqq L}$ (où $\varphi_1, \ldots, \varphi_L$ sont des fonctions analytiques, disons dans $\mathbb{C}^d$, et $\eta_1, \ldots, \eta_L$ des points de $\mathbb{C}^d$) peuvent être majorés non trivialement grâce au lemme de Schwarz. Comme me l'a signalé Jonathan Pila, ces déterminants apparaissent dans la littérature sous le nom d'«alternants». Noux développons ici de telles majorations, en introduisant plusieurs ingrédients. D'abord nous prenons des dérivées le long d'un sous-espace $\mathscr{W}'$ de $\mathbb{C}^d$; non seulement la dimension de $\mathscr{W}'$, mais aussi celle de l'espace $\mathscr{V}'$ engendré par les points η_μ, et celle de $\mathscr{V}' + \mathscr{W}'$, interviendront. Par exemple, dans la situation qui apparaît dans la méthode de Baker, $\mathscr{W}'$ est un hyperplan de $\mathbb{C}^d$, tandis que $\mathscr{V}'$ est une droite contenue dans $\mathscr{W}'$. Dans la méthode de Schneider (quand il n'y a pas de dérivées), $\mathscr{W}' = 0$.

On introduit un autre raffinement: si les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_L$ dépendent polynomialement des d_0 premières variables $z_1, \ldots, z_{d_0}$, la dimension des projections sur $\mathbb{C}^{d-d_0} = \mathbb{C}^d/(\mathbb{C}^{d_0} \times 0)$ des espaces $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{W}'$ joue également un rôle. Par exemple, dans la démonstration du théorème de Baker par la méthode de Schneider en plusieurs variables, $\mathscr{V}'$ est un hyperplan de $\mathbb{C}^d$, $\mathscr{W}'$ est soit réduit à 0, soit une droite contenue dans $\mathscr{V}'$, et on a $d_0 = d - 1$, donc $\pi(\mathscr{V}')$ a pour dimension 1.

Ainsi le nombre total de variables qui apparaissent est la dimension r de $\mathscr{V}' + \mathscr{W}'$, mais pour obtenir de bonnes estimations on fait intervenir la dimension r_3 de $\pi(\mathscr{V}')$.

Enfin le nombre dont nous voulons majorer la valeur absolue n'est pas le déterminant d'interpolation lui-même, mais le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont proches du précédent: ses coefficients sont bien de la forme $D_w \varphi_\lambda(\eta_\mu)$, mais les points η_μ ne sont pas dans $\mathscr{V}'$, ils sont seulement proches de points η'_μ de $\mathscr{V}'$; de même les composantes de w servant à dériver ne sont pas dans $\mathscr{W}'$, mais w est proche d'un $w' \in (\mathscr{W}')^{\ell_0}$.

Dans un premier temps on estime un déterminant $\left(D_{w'}^{\sigma_\mu} \varphi_\lambda(\eta'_\mu) + \varepsilon \delta_{\lambda\mu}\right)_{1 \leqq \lambda, \mu \leqq L}$ avec $\eta'_\mu \in \mathscr{V}'$ et $w'_k \in \mathscr{W}'$, puis on considère plus précisément la situation qui nous intéresse avec un déterminant $\left(D_w^{\sigma_\mu} \varphi_\lambda(\eta_\mu)\right)_{1 \leqq \lambda, \mu \leqq L}$ pour η_μ proche de $\eta'_\mu \in \mathscr{V}'$ et w_k proche de $w'_k \in \mathscr{W}'$.

(a) Enoncé de la proposition principale. On fixe trois entiers $d > 0$, $d_0 \geqq 0$ et $\ell_0 \geqq 0$, avec $d \geqq d_0$. On désigne par π la projection $\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^{d-d_0}$ sur les dernières composantes, de noyau $\mathbb{C}^{d_0} \times \{0\}$. Soient $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{W}'$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^d$; on pose

$$r = \dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{V}' + \mathscr{W}'), \quad r_1 = \dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{V}' \cap \ker \pi), \quad r_3 = \dim_{\mathbb{C}} \pi(\mathscr{V}'), \quad r_2 = r - r_1 - r_3 .$$

Soient $L > 0$, $T_0 \geqq 0$ et $S_0 \geqq 0$ des nombres entiers; on se donne

- pour $1 \leqq \lambda \leqq L$, une fonction φ_λ, entière dans $\mathbb{C}^d$, et un nombre réel $M_\lambda > 0$;
- pour $1 \leqq \mu \leqq L$, un élément η'_μ de $\mathscr{V}'$ et un élément σ_μ de $\mathbb{N}^{\ell_0}$ avec $\|\sigma_\mu\| \leqq S_0$;
- pour $1 \leqq \lambda \leqq L$ et $1 \leqq \mu \leqq L$, un nombre complexe $\delta_{\lambda\mu}$;
- pour $1 \leqq \lambda \leqq L$ et $\tau \in \mathbb{N}^{d_0}$ avec $\|\tau\| \leqq T_0$, une fonction $\psi_{\lambda\tau}$ entière dans $\mathbb{C}^{d-d_0}$;
- pour $1 \leqq k \leqq \ell_0$, un élément w'_k de $\mathscr{W}'$. On pose $w' = (w'_1, \ldots, w'_{\ell_0}) \in (\mathscr{W}')^{\ell_0}$.

Enfin V et E sont deux nombres réel positifs et ε un nombre complexe. On suppose

$$|\varepsilon| \leqq e^{-V}, \quad E \geqq e,$$

$$\varphi_\lambda(z) = \sum_{\|\tau\| \leqq T_0} z_1^{\tau_1} \cdots z_{d_0}^{\tau_{d_0}} \psi_{\lambda\tau}(z_{d_0+1}, \ldots, z_d) \quad (1 \leqq \lambda \leqq L)$$

et, pour $1 \leqq \lambda, \mu \leqq L$,

$$\log|\delta_{\lambda\mu}| \leqq M_\lambda \quad \text{et} \quad \log \sup_{|\zeta|=E} |(D_{w'}^{\sigma_\mu} \varphi_\lambda)(\zeta\eta'_\mu)| \leqq M_\lambda .$$

On pose $\tilde{r}_3 = \max\{r_3, 1\}$ et

$$\tilde{V} = V + \tilde{r}_3 T_0 \log E + (\tilde{r}_3 + 1) S_0 \log E + \tilde{r}_3(\tilde{r}_3 + 1) \log E .$$

On suppose enfin

$$L \geqq \frac{2}{(\tilde{r}_3 + 1)!} \binom{T_0 + r_1}{r_1} \binom{S_0 + r_2}{r_2} \left(\frac{\tilde{V}}{\log E} \right)^{\tilde{r}_3} \cdot \frac{\tilde{V}}{V} .$$

Proposition 5.1. *Le déterminant Δ de la matrice $L \times L$*

$$(D_{w'}^{\sigma_\mu} \varphi_\lambda(\eta'_\mu) + \varepsilon\delta_{\lambda\mu})_{1 \leqq \lambda, \mu \leqq L}$$

est majoré par

$$\log|\Delta| \leqq -\frac{1}{2} LV + L \log(2L) + M_1 + \cdots + M_L .$$

La démonstration de cette proposition va utiliser d'abord un lemme combinatoire, ensuite une variante d'un lemme de M. Laurent, enfin le lemme de Schwarz le plus simple: *pour une fonction entière f d'une variable complexe ayant à l'origine un zéro de multiplicité $\geqq \Theta$, et pour $E \geqq 1$, on a*

$$|f(1)| \leqq E^{-\Theta} \sup_{|\zeta|=E} |f(\zeta)| .$$

Nous montrons ensuite comment utiliser les inégalités de Cauchy pour vérifier les hypothèses.

(b) Un lemme combinatoire. Le lemme 5.2 ci-dessous est une variante du lemme 3 de [L2] (voir aussi les lemmes 4.3 et 9.2 de [W3]).

Lemme 5.2. *Soient $s, K_1, \ldots, K_s$ des entiers $\geqq 0$, d et L deux entiers positifs et $I_0, I_1, \ldots, I_s$ une partition de l'ensemble $\{1, \ldots, d\}$, avec* $\operatorname{Card} I_\sigma = i_\sigma$ $(0 \leqq \sigma \leqq s)$. *On définit un nombre Θ_L comme le minimum des $\|\kappa_1\| + \cdots + \|\kappa_L\|$ pour $\kappa_1, \ldots, \kappa_L$ éléments deux-à-deux distincts de $\mathbb{N}^d$ satisfaisant*

$$\sum_{i \in I_\sigma} \kappa_\lambda^{(i)} \leqq K_\sigma \quad (1 \leqq \sigma \leqq s, 1 \leqq \lambda \leqq L) .$$

On définit un nombre réel M par

$$M^m = \frac{m!L}{\prod_{\sigma=1}^{s} \binom{K_\sigma + i_\sigma}{i_\sigma}},$$

avec $m = \max\{i_0, 1\}$, *et on pose* $K = K_1 + \cdots + K_s$. *Alors*

$$\Theta_L \geqq \frac{m}{m+1} LM - mL(K+m+1).$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer $i_\sigma \geqq 1$ pour $1 \leqq \sigma \leqq s$. Pour chaque entier $a \geqq 0$, on définit

$$N_a = \operatorname{Card}\{\kappa \in \mathbb{N}^d;\ \|\kappa\| = a \text{ et } \sum_{i \in I_\sigma} \kappa^{(i)} \leqq K_\sigma\ (1 \leqq \sigma \leqq s)\}.$$

Si A est un entier positif tel que

$$\sum_{a=0}^{A} N_a \leqq L, \quad \text{alors} \quad \Theta_L \geqq \sum_{a=0}^{A} aN_a.$$

Nous allons vérifier que pour tout $a \geqq 0$,

$$N_a \leqq \binom{a+m-1}{m-1} \cdot \prod_{\sigma=1}^{s} \binom{K_\sigma + i_\sigma}{i_\sigma}.$$

En effet, une fois les composantes $\kappa^{(i)}$ de κ pour $i \in I_\sigma$ $(1 \leqq \sigma \leqq s)$ choisies, le nombre de $(\kappa^{(i)})_{i \in I_0}$ qui donnent lieu à un $\kappa \in \mathbb{N}^d$ avec $\|\kappa\| = a$ est

$$\binom{a - \sum_{i \notin I_0} \kappa^{(i)} + m - 1}{m-1}.$$

Donc

$$N_a = \sum_{c_0, \ldots, c_s} \prod_{\sigma=0}^{s} \binom{c_\sigma + i_\sigma - 1}{i_\sigma - 1},$$

où $(c_0, c_1, \ldots, c_s)$ décrit les $(s+1)$-uplets d'entiers $\geqq 0$ vérifiant

$$c_\sigma \leqq K_\sigma \quad (1 \leqq \sigma \leqq s) \quad \text{et} \quad c_0 + \cdots + c_s = a.$$

Pour $0 \leqq c_0 \leqq a$ on a

$$\binom{c_0 + m - 1}{m-1} \leqq \binom{a+m-1}{m-1},$$

tandis que pour $1 \leqq \sigma \leqq s$,

$$\sum_{c_\sigma = 0}^{K_\sigma} \binom{c_\sigma + i_\sigma - 1}{i_\sigma - 1} = \binom{K_\sigma + i_\sigma}{i_\sigma}.$$

La majoration annoncée pour N_a en résulte.

On utilise le même argument pour montrer, pour $a \geqq K$,

$$N_a \geqq \binom{a-K+m-1}{m-1} \cdot \prod_{\sigma=1}^{s} \binom{K_\sigma + i_\sigma}{i_\sigma}.$$

En effet comme $a \geqq K$ on a

$$\binom{c_0+m-1}{m-1} \geqq \binom{a-K+m-1}{m-1},$$

car $c_0 + \cdots + c_s = a$ et $c_1 + \cdots + c_s \leqq K$.

On définit maintenant un entier A par

$$\sum_{a=0}^{A} N_a \leqq L < \sum_{a=0}^{A+1} N_a.$$

En combinant l'égalité

$$\sum_{a=0}^{A+1} \binom{a+m-1}{m-1} = \binom{A+m+1}{m},$$

avec la majoration de N_a, on trouve

$$L < \binom{A+m+1}{m} \cdot \prod_{\sigma=1}^{s} \binom{K_\sigma + i_\sigma}{i_\sigma} \leqq \frac{(A+m+1)^m}{m!} \cdot \prod_{\sigma=1}^{s} \binom{K_\sigma + i_\sigma}{i_\sigma};$$

donc

$$(A+m+1)^m \prod_{\sigma=1}^{s} \binom{K_\sigma + i_\sigma}{i_\sigma} > m!\,L.$$

Grâce à la définition de M, cette dernière inégalité s'écrit

$$A+m+1 > M.$$

D'un autre côté on déduit de la minoration de N_a

$$\Theta_L \geqq \sum_{a=K}^{A} a \binom{a-K+m-1}{m-1} \cdot \prod_{\sigma=1}^{s} \binom{K_\sigma + i_\sigma}{i_\sigma}.$$

On utilise ensuite la formule

$$\sum_{a=K}^{A} a \binom{a-K+m-1}{m-1} = \frac{mA+K}{m+1} \binom{A-K+m}{m}$$

avec la minoration

$$\binom{A-K+m}{m} \geqq \frac{(A-K)^m}{m!}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}\Theta_L &\geqq \frac{1}{(m+1)!}(mA+K)(A-K)^m \cdot \prod_{\sigma=1}^{s} \binom{K_\sigma + i_\sigma}{i_\sigma} \\ &\geqq \frac{mA+K}{m+1} \cdot (A-K)^m \cdot \frac{L}{M^m}.\end{aligned}$$

En minorant brutalement $mA+K$ par $m(A-K)$ et en utilisant l'inégalité $A+m+1>M$ obtenue précédemment, on déduit

$$\Theta_L \geqq \frac{m}{m+1} \cdot LM\left(1-\frac{K+m+1}{M}\right)^{m+1}.$$

Pour terminer, on remarque que le lemme 5.2 est banal si $M \leqq (m+1)(K+m+1)$, et on applique, pour $x=(K+m+1)/M$ et $t=m+1$, l'estimation

$$(1-x)^t \geqq 1-tx$$

qui est vraie pour $t \geqq 1$ et $0 \leqq x \leqq 1$. □

(c) Un lemme de M. Laurent. Le lemme suivant raffine le lemme 9.3 de [W3] qui était basé sur une idée de Michel Laurent [L2].

Lemme 5.3. *Soient*

$$A=(a_{\lambda\mu})_{1 \leqq \lambda,\mu \leqq L} \quad et \quad B=(b_{\lambda\mu})_{1 \leqq \lambda,\mu \leqq L}$$

deux matrices $L \times L$ à coefficients complexes et ε un nombre complexe. On pose

$$\Delta = \det(A+\varepsilon B);$$

pour chaque sous-ensemble I de $\{1, \dots, L\}$, on définit

$$\Delta_I = \det(c_{\lambda\mu}^{(I)})_{1 \leqq \lambda,\mu \leqq L}, \quad avec \quad c_{\lambda\mu}^{(I)} = \begin{cases} a_{\lambda\mu} & si\ \lambda \in I, \\ b_{\lambda\mu} & si\ \lambda \notin I. \end{cases}$$

Soient $m, \chi_0, \chi_1, \chi_2, V$ des nombres réels positifs; on suppose que pour tout I,

$$\log|\Delta_I| \leqq -\chi_0 |I|^{1+1/m} + (\chi_1 - V)|I| + \chi_2,$$

où $|I|$ désigne le nombre d'éléments de I; on suppose aussi

$$|\varepsilon| \leqq e^{-V}.$$

Alors

$$\log|\Delta| \leqq -LV + \left(\frac{m}{\chi_0}\right)^m \left(\frac{\chi_1}{m+1}\right)^{m+1} + \chi_2 + L\log 2\,.$$

Démonstration. Le déterminant étant multilinéaire, on a

$$\Delta = \sum_{I \subset \{1,\ldots,L\}} \varepsilon^{L-|I|} \Delta_I\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\log|\Delta| &\leqq L\log 2 + \max_I \{\log|\Delta_I| - (L-|I|)V\}\\ &\leqq -LV + L\log 2 + \max_I \{\log|\Delta_I| + |I|V\}\,.\end{aligned}$$

La fonction

$$y = x(-\chi_0 x^{1/m} + \chi_1)$$

atteint son maximum au point $x = (m\chi_1/((m+1)\chi_0))^m$, et le maximum est

$$\left(\frac{m}{\chi_0}\right)^m \cdot \left(\frac{\chi_1}{m+1}\right)^{m+1};$$

ceci termine la démonstration du lemme 5.3. □

Remarque. Dans nos applications nous supposerons

$$\frac{m^m \chi_1^{m+1}}{(m+1)^{m+1}\chi_0^m} \leqq \frac{1}{2} LV,$$

de telle sorte que la conclusion puisse s'écrire

$$\log|\Delta| \leqq -\frac{1}{2} LV + \chi_2 + L\log 2\,.$$

(d) Démonstration de la proposition 5.1. Soit I un sous-ensemble de $\{1,\ldots,L\}$; on considère la fonction d'une variable complexe ζ:

$$\Delta_I(\zeta) = \det\left(d_{\lambda\mu}^{(I)}(\zeta)\right)_{1 \leqq \lambda,\mu \leqq L}\,,$$

où, pour $1 \leqq \mu \leqq L$, $d_{\lambda\mu}^{(I)}$ est définie par

$$d_{\lambda\mu}^{(I)}(\zeta) = \begin{cases}(D_{w'}^{\sigma_\mu}\varphi_\lambda)(\zeta\eta'_\mu) & \text{si } \lambda \in I\,,\\ \delta_{\lambda\mu} & \text{si } \lambda \notin I\,.\end{cases}$$

Nous allons déjà minorer l'ordre d'annulation de cette fonction Δ_I à l'origine.

Premier pas. La fonction Δ_I a un zéro à l'origine de multiplicité

$$\geqq \Theta_I - |I| S_0,$$

où le nombre Θ_I vérifie

$$\frac{1}{|I|}\Theta_I \geqq \frac{\tilde r_3}{\tilde r_3+1}\left(\frac{\tilde r_3!\,|I|}{\binom{T_0+r_1}{r_1}\binom{S_0+r_2}{r_2}}\right)^{1/\tilde r_3} - \tilde r_3(T_0+S_0+\tilde r_3+1).$$

Soit $(e_1, \dots, e_{r_1})$ une base de $\mathscr{V}' \cap \ker \pi$. On complète en une base $(e_1, \dots, e_{r_1+r_3})$ de $\mathscr{V}'$, puis en une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\mathscr{V}' + \mathscr{W}'$, et finalement en une base $(e_1, \dots, e_d)$ de $\mathbb{C}^d$.

Partant de deux points w et η dans $\mathbb{C}^d$ et d'une fonction entière φ, si on définit $\tilde w$ et $\tilde\eta$ comme les vecteurs de coordonnées respectifs de w et η dans la base $(e_1, \dots, e_d)$, et si on définit une fonction entière $\tilde\varphi$ sur $\mathbb{C}^d$ en posant

$$\tilde\varphi(z_1, \dots, z_d) = \varphi(z_1 e_1 + \dots + z_d e_d)$$

alors on a

$$D_{\tilde w}\tilde\varphi(\tilde\eta) = D_w \varphi(\eta).$$

Donc, quitte à remplacer chacun des w_k et des η_μ par le vecteur de ses coordonnées en base $(e_1, \dots, e_d)$ et quitte à remplacer chaque fonction φ_λ par $\varphi_\lambda(z_1 e_1 + \dots + z_d e_d)$, on peut se ramener au cas où $(e_1, \dots, e_d)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^d$.

On développe chacune des fonctions φ_λ en série de Taylor à l'origine:

$$\varphi_\lambda(z) = \sum_{\kappa \in \mathbb{N}^d} c_{\lambda\kappa} z^\kappa.$$

Aux fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_L$ on a associé la fonction Δ_I. Notons provisoirement cette dernière $\Delta_{I,\varphi_1,\dots,\varphi_L}$. Alors

$$\Delta_{I,\varphi_1,\dots,\varphi_L} = \sum_{\kappa_1 \in \mathbb{N}^d} \cdots \sum_{\kappa_L \in \mathbb{N}^d} c_{1\kappa_1} \cdots c_{L\kappa_L} \Delta_{I,z^{\kappa_1},\dots,z^{\kappa_L}}.$$

On peut donc supposer, sans perte de généralité, que chacune des fonctions φ_λ est un monôme en z, disons $\varphi_\lambda(z) = z^{\kappa_\lambda}$, où $\kappa_1, \dots, \kappa_L$ sont des éléments de $\mathbb{N}^d$. Pour $\kappa \in \mathbb{N}^d$, $D^\sigma_{w'}(z^\kappa)$ est soit nul, soit un polynôme homogène en $z_1, \dots, z_d$ de degré $\|\kappa\| - \|\sigma\|$; si on multiplie les coefficients des lignes d'indice $\lambda \in I$ par ζ^{S_0}, on peut mettre en facteur $\zeta^{\|\kappa_\lambda\|}$; donc, si la fonction Δ_I n'est pas identiquement nulle, elle a un zéro de multiplicité $\geqq \max\{0, \|\kappa_1\| + \dots + \|\kappa_{|I|}\| - |I| S_0\}$. Il nous reste à minorer $\|\kappa_1\| + \dots + \|\kappa_{|I|}\|$ quand Δ_I n'est pas nulle.

Considérons une ligne d'indice $\lambda \in I$ dans la matrice dont le déterminant est $\Delta_I(\zeta)$:

$$(d^{(I)}_{\lambda 1} \cdots d^{(I)}_{\lambda L}) \quad \text{avec} \quad d^{(I)}_{\lambda\mu} = d^{(I)}_{\lambda\mu}(\zeta) = D^\sigma_{w'}(z^{\kappa_\lambda})(\zeta\eta'_\mu) \quad (1 \leqq \mu \leqq L).$$

Comme $e_1, \dots, e_{r_1}$ appartiennent à $\mathbb{C}^{d_0} \times \{0\}$, la fonction φ_λ dépend polynomialement des variables $(z_1, \dots, z_{r_1})$, avec un degré $\leqq T_0$. Donc

$$\sum_{i=1}^{r_1} \kappa_\lambda^{(i)} \leqq T_0 .$$

Etant donné que $w_k \in \mathscr{W}' \subset \mathbb{C}^r \times 0^{d-r}$ et $\eta'_\mu \in \mathscr{V}' = \mathbb{C}^{r_1+r_3} \times 0^{d-r_1-r_3} \subset \mathbb{C}^r \times 0^{d-r}$, si une composante $\kappa_\lambda^{(i)}$ de κ_λ avec $r < i \leqq d$ ne s'annule pas, alors $d_{\lambda\mu}^{(I)} = 0$ pour $1 \leqq \mu \leqq L$.

Puisque $\eta'_\mu \in \mathscr{V}' = \mathbb{C}^{r_1+r_3} \times 0^{d-r_1-r_3}$ et $\|\sigma\| \leqq S_0$, si

$$\sum_{i=r_1+r_3+1}^{r} \kappa_\lambda^{(i)} > S_0 ,$$

alors de nouveau $d_{\lambda 1}^{(I)} = \cdots = d_{\lambda L}^{(I)} = 0$.

On pose $I_0 = \{r_1+1, \ldots, r_1+r_3\}$, $I_1 = \{1, \ldots, r_1\}$, $I_2 = \{r_1+r_3+1, \ldots, r\}$, $I_3 = \{r+1, \ldots, d\}$. Soit $\mathscr{K}$ l'ensemble des $\kappa \in \mathbb{N}^d$ pour lesquels

$$\sum_{i \in I_1} \kappa^{(i)} \leqq T_0 , \quad \sum_{i \in I_2} \kappa^{(i)} \leqq S_0 , \quad \text{et} \quad \kappa^{(i)} = 0 \quad \text{pour } i \in I_3 .$$

Des remarques précédentes on déduit que Δ_I s'annule si les éléments $\kappa_1, \ldots, \kappa_I$ de $\mathscr{K}$ ne sont pas deux-à-deux distincts. On utilise le lemme 5.2 avec $s = 3$, $K_1 = T_0$, $K_2 = S_0$, $K_3 = 0$, $i_0 = r_3$, $i_1 = r_1$, $i_2 = r_2$, $i_3 = d - r$ et L remplacé par $|I|$. Le résultat annoncé en résulte.

Deuxième pas. On a

$$\log|\Delta_I(1)| \leqq -\Theta_I \log E + |I| S_0 \log E + \log(L!) + M_1 + \cdots + M_L .$$

On utilise le lemme de Schwarz avec le premier pas:

$$\log|\Delta_I(1)| \leqq -(\Theta_I - |I| S_0) \log E + \log \sup_{|\zeta|=E} |\Delta_I(\zeta)| .$$

Pour $1 \leqq \lambda \leqq L$, on a

$$\log \sup_{|\zeta|=E} \max_{1 \leqq \mu \leqq L} |d_{\lambda\mu}^{(I)}(\zeta)| \leqq M_\lambda ;$$

il en résulte, que, pour $|\zeta| = E$ on a

$$\log|\Delta_I(\zeta)| \leqq \log(L!) + M_1 + \cdots + M_L .$$

Troisième pas. De ce qui précède on déduit que les hypothèses du lemme 5.3 sont vérifiées avec $m = \tilde{r}_3$ et χ_0, χ_1, χ_3 définis par

$$\left(\frac{m+1}{m} \cdot \frac{\chi_0}{\log E}\right)^m \binom{T_0 + r_1}{r_1} \binom{S_0 + r_2}{r_2} = m! ,$$

$$\chi_1 = \tilde{V}, \quad \chi_2 = \log(L!) + M_1 + \cdots + M_L .$$

L'hypothèse sur L entraîne

$$\frac{m^m \tilde{V}^{m+1}}{(m+1)^{m+1}\chi_0^m} \leqq \frac{1}{2} LV. \quad \square$$

(e) Inégalités de Cauchy. Soient φ une fonction de d variables complexes, $w_1, \ldots, w_{\ell_0}$ des éléments de $\mathbb{C}^d$, et σ un élément de $\mathbb{N}^{\ell_0}$. On veut majorer le module de la valeur de $D_w^\sigma \varphi$ en un point η de $\mathbb{C}^d$. Une première solution est de faire intervenir ℓ_0 variables complexes supplémentaires $\zeta_1, \ldots, \zeta_{\ell_0}$ et d'écrire que $D_w^\sigma \varphi(\eta)$ est la valeur de la fonction

$$(\partial/\partial\zeta_1)^{\sigma_1} \cdots (\partial/\partial\zeta_{\ell_0})^{\sigma_{\ell_0}} (\varphi(w_1\zeta_1 + \cdots + w_{\ell_0}\zeta_{\ell_0} + \eta))$$

au point $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{\ell_0}) = (0, \ldots, 0)$. Grâce aux inégalités de Cauchy, on obtient ainsi, pour tout $\varrho > 0$,

$$|D_w^\sigma \varphi(\eta)| \leqq \frac{\sigma!}{\varrho^{\|\sigma\|}} \sup_{|t|=\varrho} |\varphi(\eta + tw)|,$$

où t décrit les éléments de $\mathbb{C}^{\ell_0}$ vérifiant $|t| = \varrho$, et tw désigne l'élément $t_1 w_1 + \cdots + t_{\ell_0} w_{\ell_0}$ de $\mathbb{C}^d$.

Nous utiliserons aussi un autre type de majoration, que l'on va obtenir en écrivant explicitement $D_w^\sigma \varphi$ en termes des dérivées

$$D^\nu \varphi = (\partial/\partial z_1)^{\nu_1} \cdots (\partial/\partial z_d)^{\nu_d} \varphi$$

pour des $\nu \in \mathbb{N}^d$.

Soient W_{ik}, Z_i $(1 \leqq i \leqq d, 1 \leqq k \leqq \ell_0)$ des indéterminées; on peut écrire

$$\prod_{k=1}^{\ell_0} \left(\sum_{i=1}^d W_{ik} Z_i \right)^{\sigma_k} = \sum_\nu \frac{\sigma!}{\nu!} W^\nu Z^\nu,$$

avec les notations suivantes:

$$\sigma! = \sigma_1! \cdots \sigma_{\ell_0}!, \quad \nu! = \prod_{i=1}^d \prod_{k=1}^{\ell_0} \nu_{ik}!,$$

$$W^\nu = \prod_{i=1}^d \prod_{k=1}^{\ell_0} W_{ik}^{\nu_{ik}}, \quad Z^\nu = \prod_{i=1}^d Z_i^{\|\nu_i\|},$$

et ν décrit les éléments de $(\mathbb{N}^{\ell_0})^d$ de la forme $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d)$, $\nu_i = (\nu_{i1}, \ldots, \nu_{i\ell_0}) \in \mathbb{N}^{\ell_0}$ $(1 \leqq i \leqq d)$, avec $\nu_1 + \cdots + \nu_d = \sigma$.

On considère le polynôme P en les variables W_{ik} et X_ν (avec $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in (\mathbb{N}^{\ell_0})^d$ et $\nu_1 + \cdots + \nu_d = \sigma$):

$$P(W, X) = \sum_\nu \frac{\sigma!}{\nu!} W^\nu X_\nu.$$

Ainsi D_w^ν est la valeur de P quand on substitue les coordonnées w_{ik} de w_k aux variables W_{ik} et D^ν aux variables X_ν:

$$D_w^\sigma \varphi = \sum_\nu \frac{\sigma!}{\nu!} w^\nu D^\nu \varphi ,$$

avec $D^\nu = (\partial/\partial z_1)^{\|\nu_1\|} \cdots (\partial/\partial z_d)^{\|\nu_d\|}$.

Le polynôme P est homogène en $W_{1k}, \dots, W_{dk}$, de degré σ_k ($1 \leqq k \leqq \ell_0$), et homogène de degré 1 en les variables X_ν; le degré total est $\|\sigma\| + 1$. Comme les coefficients de P sont $\geqq 0$, sa longueur n'est autre que sa valeur au point $W_{ik} = X_\nu = 1$, c'est-à-dire

$$\sum_\nu \frac{\sigma!}{\nu!} = d^{\|\sigma\|}$$

(comparer avec le lemme 3.1 de [PW]).

On introduit un petit raffinement à ces estimations: soit d_0 un entier dans l'intervalle $0 \leqq d_0 \leqq d$; supposons que φ dépende des variables $z_1, \dots, z_{d_0}$ de façon polynomiale, de degré total $\leqq T_0$:

$$\varphi(z) = \sum_{\|\tau\| \leqq T_0} z_1^{\tau_1} \cdots z_{d_0}^{\tau_{d_0}} \varphi_\tau(z_{d_0+1}, \dots, z_d) .$$

Dans ce cas on peut restreindre la somme sur ν ci-dessus aux éléments de $(\mathbb{N}^{\ell_0})^d$ de la forme $(\nu_1, \dots, \nu_d)$, $\nu_1 + \cdots + \nu_d = \sigma$, avec $\|\nu_1\| + \cdots + \|\nu_{d_0}\| \leqq T_0$; dans ce cas le degré total de P en les variables W_{hk} ($1 \leqq h \leqq d_0$, $1 \leqq k \leqq \ell_0$) est majoré par T_0.

On déduit de ce qui précède:

Lemme 5.4. *Soient ℓ_0 et d des entiers positifs, $w_1, \dots, w_{\ell_0}$ des éléments de $\mathbb{C}^d$, σ un élément de $\mathbb{N}^{\ell_0}$, ϱ un nombre réel positif, φ une fonction analytique dans $\mathbb{C}^d$ et η un point de $\mathbb{C}^d$; on a*

$$|D_w^\sigma \varphi(\eta)| \leqq \frac{\sigma!}{\varrho^{\|\sigma\|}} \sup_{\substack{t \in \mathbb{C}^{\ell_0} \\ |t| = \varrho}} |\varphi(\eta + t_1 w_1 + \cdots + t_{\ell_0} w_{\ell_0})| ,$$

et aussi

$$|D_w^\sigma \varphi(\eta)| \leqq \sigma! \left(\frac{d}{\varrho}\right)^{\|\sigma\|} |w_1|^{\sigma_1} \cdots |w_{\ell_0}|^{\sigma_{\ell_0}} \sup_{\substack{t \in \mathbb{C}^d \\ |t| = \varrho}} |\varphi(\eta + t)| .$$

De plus, si $(z_1, \dots, z_{d_0}) \mapsto \varphi(z)$ est une application polynomiale de degré $\leqq T_0$, alors

$$|D_w^\sigma \varphi(\eta)| \leqq \sigma! \left(\frac{d}{\varrho}\right)^{\|\sigma\|} \left(\max_{\substack{1 \leqq h \leqq d_0 \\ 1 \leqq k \leqq \ell_0}} \max\{1, |w_{hk}|\} \right)^{T_0}$$

$$\prod_{k=1}^{\ell_0} \left(\max_{d_0 < i \leqq d} \max\{1, |w_{ik}|\} \right)^{\sigma_k} \sup_{\substack{t \in \mathbb{C}^d \\ |t| = \varrho}} |\varphi(\eta + t)| .$$

Remarque. Quand un des w_k est nul, le membre de gauche de la deuxième inégalité est nul si le σ_k correspondant n'est pas nul; si $\sigma_k = 0$, on convient que le coefficient $|w_k|^{\sigma_k}$ dans le membre de droite vaut 1.

(f) Autres résultats auxiliaires. Nous démontrons maintenant deux lemmes qui seront utiles dans la suite. Le premier repose sur l'inégalité triangulaire et permet de minorer la différence entre deux valeurs d'un même polynôme en deux points voisins. Le second utilise le premier ainsi que les inégalités de Cauchy.

Lemme 5.5. *Soient ε un nombre réel $\geqq 0, n_1, \ldots, n_m$ des entiers > 0, et*

$$P \in \mathbb{C}[X_{11}, \ldots, X_{1n_1}, \ldots, X_{m1}, \ldots, X_{mn_m}]$$

un polynôme en $n_1 + \cdots + n_m$ variables, de longueur $L(P)$, de degré total N, homogène de degré L_i en les variables $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Pour $1 \leqq i \leqq m$, soient a_i et b_i deux éléments de $\mathbb{C}^{n_i}$, et soit V_i un nombre réel > 0, avec

$$\max\{|a_i|, |b_i|\} \leqq V_i \quad et \quad |a_i - b_i| \leqq \varepsilon V_i .$$

Alors

$$|P(a) - P(b)| \leqq \varepsilon N L(P) \prod_{i=1}^{m} V_i^{L_i} .$$

Rappelons que, pour $a_i \in \mathbb{C}^{n_i}$, la condition $|a_i| \leqq V_i$ signifie $\max\limits_{1 \leqq j \leqq n_i} |a_{ij}| \leqq V_i$.

Démonstration. Pour tout entier $\lambda \geqq 0$ et pour a et b dans $\mathbb{C}$, la relation

$$a^\lambda - b^\lambda = (a-b)(a^{\lambda-1} + \cdots + b^{\lambda-1})$$

conduit à

$$|a^\lambda - b^\lambda| \leqq \lambda |a-b| \max\{|a|, |b|\}^{\lambda-1} .$$

Par récurrence sur m, on en déduit, pour $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ nombres complexes et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ entiers $\geqq 0$,

$$|a_1^{\lambda_1} \cdots a_m^{\lambda_m} - b_1^{\lambda_1} \cdots b_m^{\lambda_m}| \leqq \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu |a_\nu - b_\nu| \max\{|a_\nu|, |b_\nu|\}^{\lambda_\nu - 1} \prod_{\substack{\mu \neq \nu \\ 1 \leqq \mu \leqq m}} \max\{|a_\mu|, |b_\mu|\}^{\lambda_\mu} .$$

Démontrons le lemme quand P est un monôme; pour λ_{ij} $(1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n_i)$ entiers $\geqq 0$, on a, d'après le calcul précédent,

$$\left| \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} a_{ij}^{\lambda_{ij}} - \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} b_{ij}^{\lambda_{ij}} \right|$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} |a_{ij} - b_{ij}| \max\{|a_{ij}|, |b_{ij}|\}^{\lambda_{ij} - 1} \prod_{(i'j') \neq (ij)} \max\{|a_{i'j'}|, |b_{i'j'}|\}^{\lambda_{i'j'}} .$$

Pour $1 \leqq i \leqq m$ et $1 \leqq j \leqq n_i$, on majore $|a_{ij} - b_{ij}| \max\{|a_{ij}|, |b_{ij}|\}^{\lambda_{ij}-1}$ par $\varepsilon V_i^{\lambda_{ij}}$, et on utilise la relation

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} V_i^{\lambda_{ij}} = \prod_{i=1}^{m} V_i^{L_i}.$$

Enfin $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij}$ est le degré total du monôme considéré. Ceci démontre le lemme 5.5 quand P est un monôme; le cas général en résulte immédiatement. □

Remarque. On en déduit (en considérant l'homogénéisé) que la majoration du lemme 5.5 est encore vraie quand P n'est pas homogène, mais est seulement de degré $\leqq L_i$ en les variables $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$, à condition de supposer $V_i \geqq 1$ pour les i correspondants.

Lemme 5.6. *Soient $\ell_0 \geqq 0$, $d \geqq d_0 \geqq 0$, $T_0 \geqq 0$ des nombres entiers, $\varepsilon < 1$, ϱ des nombres réels positifs, $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ des nombres réels $\geqq 1$, $\eta, \eta', w_1, \ldots, w_{\ell_0}, w'_1, \ldots, w'_{\ell_0}$ des éléments de $\mathbb{C}^d$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{\ell_0})$ un élément de $\mathbb{N}^{\ell_0}$ et φ une fonction analytique dans $\mathbb{C}^d$, qui dépend polynomialement des variables $z_1, \ldots, z_{d_0}$, avec un degré total $\leqq T_0$. On pose $S_0 = \|\sigma\|$, et on suppose*

$$|\eta - \eta'| \leqq \varepsilon, \quad \max_{1 \leqq k \leqq \ell_0} |w_k - w'_k| \leqq \varepsilon,$$

$$\max_{\substack{1 \leqq h \leqq d_0 \\ 1 \leqq k \leqq \ell_0}} \max\{|w_{hk}|, |w'_{hk}|\} \leqq \Omega_1, \quad \max_{\substack{d_0 < i \leqq d \\ 1 \leqq k \leqq \ell_0}} \max\{|w_{ik}|, |w'_{ik}|\} \leqq \Omega_2$$

et $\Omega = \max\{\Omega_1, \Omega_2\}$. Alors

$$|D_w^\sigma \varphi(\eta) - D_{w'}^\sigma \varphi(\eta')| \leqq 2\varepsilon (S_0 + 1)! \varrho^{-S_0} d^{S_0} \min\{\Omega^{S_0}, \Omega_1^{T_0} \Omega_2^{S_0}\} \sup_{|u| = \varrho + 1} |\varphi(\eta + u)|.$$

Remarques. 1. Dans le cas $d_0 = 0$ on peut prendre $T_0 = 0$ et $\Omega_1 = 1$ de telle sorte que $\Omega = \Omega_2$ et $\Omega_1^{T_0} \Omega_2^{S_0} = \Omega^{S_0}$.

2. Quand $\ell_0 = 0$ on peut prendre $S_0 = 0$ et $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = 1$.

Démonstration. Considérons pour commencer le cas particulier où $w = (w_1, \ldots, w_{\ell_0})$ est la base canonique de $\mathbb{C}^d$, $w' = w$ et $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$. D'après les inégalités de Cauchy, pour tout $\sigma \in \mathbb{N}^d$, en notant D^σ pour $(\partial/\partial z_1)^{\sigma_1} \cdots (\partial/\partial z_d)^{\sigma_d}$:

$$\sup_{|v| \leqq 1} |D^\sigma \varphi(\eta + v)| \leqq \frac{\sigma!}{\varrho^{\|\sigma\|}} \sup_{|u| = \varrho + 1} |\varphi(\eta + u)|.$$

On applique le lemme de Schwarz à la fonction d'une variable complexe

$$f(z) = D^\sigma \varphi\big(\eta + z(\eta' - \eta)\big) - D^\sigma \varphi(\eta),$$

en posant $R = 1$ si $\eta = \eta'$ et $R = 1/|\eta - \eta'|$ sinon. Comme $|\eta - \eta'| \leqq 1$, on a toujours $R \geqq 1$. Grâce au fait que $f(0) = 0$, on trouve

$$|f(1)| \leqq (1/R) |f|_R.$$

Donc

$$|D^\sigma\varphi(\eta)-D^\sigma\varphi(\eta')|\leqq 2|\eta-\eta'|\sup_{|v|\leqq 1}|D^\sigma\varphi(\eta+v)|\leqq 2|\eta-\eta'|\frac{\sigma!}{\varrho^{\|\sigma\|}}\sup_{|u|=\varrho+1}|\varphi(\eta+u)|.$$

Ce cas particulier va nous permettre d'appliquer le lemme 5.5 pour traiter le cas général. On utilisera aussi la majoration

$$\max\{|D^\sigma\varphi(\eta)|,|D^\sigma\varphi(\eta')|\}\leqq\frac{\sigma!}{\varrho^{\|\sigma\|}}\sup_{|u|=\varrho+1}|\varphi(\eta+u)|,$$

qui provient du lemme 5.4 et de l'hypothèse $|\eta-\eta'|\leqq 1$.

Le polynôme P introduit avant le lemme 5.4 est homogène de degré 1 en les X_ν, a un degré $\leqq T_0$ en les W_{hk} $(1\leqq h\leqq d_0, 1\leqq k\leqq \ell_0)$ et $\leqq S_0$ en les W_{ik} $(d_0<i\leqq d, 1\leqq k\leqq \ell_0)$. On utilise le lemme 5.5 avec

- soit $m=2$,

$$n_1=d\ell_0,\quad V_1=\Omega,\quad L_1=\|\sigma\|,$$

- soit $m=3$,

$$n_1=d_0\ell_0,\quad n_2=(d-d_0)\ell_0,\quad V_1=\Omega_1,\quad V_2=\Omega_2,\quad L_1=T_0,\quad L_2=S_0,$$

tandis que $L_m=1$ et que n_m est le nombre de $\nu\in(\mathbb{N}^{\ell_0})^d$ tels que $\nu_1+\cdots+\nu_d=\sigma$:

$$n_m=\prod_{k=1}^{\ell_0}\binom{\sigma_k+d-1}{d-1}.$$

Le cas particulier traité au début, avec σ remplacé par $(\|\nu_1\|,\ldots,\|\nu_d\|)$, montre que l'on peut prendre

$$V_m=2\|\sigma\|!\,\varrho^{-\|\sigma\|}\sup_{|u|=\varrho+1}|\varphi(\eta+u)|$$

car $\|\nu_1\|+\cdots+\|\nu_d\|=\|\sigma\|$, et on a

$$\prod_{i=1}^d\|\nu_i\|!/\varrho^{\|\nu_i\|}\leqq\|\sigma\|!/\varrho^{\|\sigma\|}.$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned}|D_w^\sigma\varphi(\eta)-D_{w'}^\sigma\varphi(\eta')|&=|P(w,D^\nu\varphi(\eta))-P(w',D^\nu\varphi(\eta'))|\\&\leqq 2\varepsilon(\|\sigma\|+1)!\,\varrho^{-\|\sigma\|}d^{\|\sigma\|}\min\{\Omega^{S_0},\Omega_1^{T_0}\Omega_2^{S_0}\}\sup_{|u|=\varrho+1}|\varphi(\eta+u)|.\end{aligned}$$

D'où le lemme 5.6. □

(g) Application. On reprend les notations de la proposition 5.1, y compris l'hypothèse

$$L\geqq\frac{2}{(\tilde r_3+1)!}\binom{T_0+r_1}{r_1}\binom{S_0+r_2}{r_2}\left(\frac{\tilde V}{\log E}\right)^{\tilde r_3}\frac{\tilde V}{V},$$

avec $\tilde{r}_3 = \max\{r_3, 1\}$. On considère de plus des éléments $\eta_1, \ldots, \eta_L, w_1, \ldots, w_{\ell_0}$ de $\mathbb{C}^d$ tels que

$$\max_{1 \leqq \mu \leqq L} |\eta_\mu - \eta'_\mu| \leqq e^{-V} \quad \text{et} \quad \max_{1 \leqq k \leqq \ell_0} |w_k - w'_k| \leqq e^{-V}.$$

On veut majorer le nombre

$$\Delta_{\mathrm{an}} = \det\big(D_w^{\sigma_\mu} \varphi_\lambda(\eta_\mu)\big)_{1 \leqq \lambda, \mu \leqq L}.$$

Dans la suite, $M'_1, \ldots, M'_L, W, W_1 \geqq 1, W_2 \geqq 1$ désigneront des nombres réels positifs soumis aux contraintes suivantes:

$$M'_\lambda \geqq \log \sup_{\substack{\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = E \\ t \in \mathbb{C}^d, |t| = 2}} |\varphi_\lambda(\zeta\eta_\mu + t)| \quad (1 \leqq \lambda, \mu \leqq L),$$

$$\max_{\substack{1 \leqq h \leqq d_0 \\ 1 \leqq k \leqq \ell_0}} |w_{hk}| \leqq W_1, \quad \max_{\substack{d_0 + 1 \leqq i \leqq d \\ 1 \leqq k \leqq \ell_0}} |w_{ik}| \leqq W_2$$

et

$$W = \max\{W_1, W_2\}.$$

Corollaire 5.7. *On a*

$$\frac{1}{L}\log|\Delta_{\mathrm{an}}| \leqq -\frac{1}{2}V + \log(4L) + (S_0 + T_0)e^{-V} + S_0 \log d + \log\big((S_0+1)!\big)$$
$$+ \min\{S_0 \log W, T_0 \log W_1 + S_0 \log W_2\} + \frac{1}{L}(M'_1 + \cdots + M'_L).$$

Démonstration. On utilise le lemme 5.6 avec $\varrho = 1$, $\varepsilon = e^{-V}$,

$$\Omega_1 = W_1(1 + e^{-V}), \quad \Omega_2 = W_2(1 + e^{-V}), \quad \Omega = W(1 + e^{-V}).$$

Pour $1 \leqq \lambda \leqq L$ et $1 \leqq \mu \leqq L$, on définit un nombre complexe $\delta_{\lambda\mu}$ par

$$D_w^{\sigma_\mu} \varphi_\lambda(\eta_\mu) = D_{w'}^{\sigma_\mu} \varphi_\lambda(\eta'_\mu) + e^{-V}\delta_{\lambda\mu};$$

on a

$$\Delta_{\mathrm{an}} = \det\big(D_{w'}^{\sigma_\mu} \varphi_\lambda(\eta'_\mu) + e^{-V}\delta_{\lambda\mu}\big)_{1 \leqq \lambda, \mu \leqq L}.$$

On rejoint ainsi les notations de la proposition 5.1.

Si on pose

$$M_\lambda = M'_\lambda + S_0 \log d + \log\big((S_0+1)!\big) + \min\{S_0 \log W, T_0 \log W_1 + S_0 \log W_2\}$$
$$+ \log 2 + (S_0 + T_0)e^{-V},$$

on déduit du lemme 5.4

$$\log|D_{w'}^{\sigma_\mu} \varphi_\lambda(\zeta\eta_\mu + t)| \leqq M_\lambda$$

pour tout (λ, μ) avec $1 \leqq \lambda, \mu \leqq L$, tout $\zeta \in \mathbb{C}$ avec $|\zeta| = E$ et tout $t \in \mathbb{C}^d$ avec $|t| = 1$. Enfin le lemme 5.6 donne

$$\log|\delta_{\lambda\mu}| \leqq M_\lambda$$

pour tout (λ, μ) avec $1 \leqq \lambda, \mu \leqq L$.

Cela termine la démonstration du corollaire 5.7. □

§ 6. Démonstration du théorème 2.1

(a) Utilisation du lemme de zéros. Notre but est de montrer que, sous les hypothèses du théorème 2.1, il existe un polynôme multihomogène non nul $P \in K[\underline{\mathbf{X}}]$, de multidegrés $(T_0, \ldots, T_n)$, non identiquement nul sur G, qui vérifie

$$D_w^\sigma(P \circ \exp_G)(s_1\eta_1 + \cdots + s_M\eta_M) = 0$$

pour tout $(\sigma, s) \in \mathbb{N}^{\ell_0} \times \mathbb{N}^M$, avec $\|\sigma\| \leqq dS_0$ et $\|s\| = d$. Pour alléger les notations on écrira $s\eta$ pour $s_1\eta_1 + \cdots + s_M\eta_M$.

Une fois que l'existence de ce polynôme aura été établie, il ne restera plus qu'à appliquer le lemme de zéros de Philippon (proposition 3.1) avec $S = S_0$ et $\mathscr{W}$ le sous-espace vectoriel de $T_G(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}$ engendré par W, ce qui donne précisément la conclusion du théorème 2.1 avec $\ell_0^* = \lambda$.

(b) La matrice $\mathscr{M}$. On pose $L = H(G; \underline{T})$; d'après la définition de cette fonction H (paragraphe 3(a)), il existe L monômes dans $K[\underline{\mathbf{X}}]$, de multidegrés $(T_0, \ldots, T_n)$, dont les restrictions à G composées avec $\exp_G$ donnent L fonctions linéairement indépendantes:

$$\prod_{h=1}^{d_0} z_h^{\tau_h} \prod_{i=1}^{d_1} e^{t_i z^{(i)}} \prod_{i=d_1+1}^{n} \prod_{\nu=0}^{N_i} (\varphi_\nu^{(i)}(z^{(i)}))^{t_{\nu i}},$$

avec les notations $z = (z_1, \ldots, z_d) = (z_1, \ldots, z_{d_0}, z^{(1)}, \ldots, z^{(n)}) \in \mathbb{C}^d$ et, pour $1 \leqq i \leqq n$, $z^{(i)} = (z_{\delta_0 + \cdots + \delta_{i-1} + j})_{1 \leqq j \leqq \delta_i} \in \mathbb{C}^{\delta_i}$; en particulier on a $z^{(i)} = z_{d_0+i}$ pour $1 \leqq i \leqq d_1$. Les paramètres $\tau_h, t_i, t_{\nu i}$, entiers $\geqq 0$, varient dans les domaines suivants:

$$\|\tau\| \leqq T_0, \quad t_i \leqq T_i \quad (1 \leqq i \leqq d_1), \quad \sum_{\nu=0}^{N_i} t_{\nu i} = T_i \quad (d_1 < i \leqq n).$$

On ordonne ces éléments $(\tau_h, t_i, t_{\nu i})$ de façon arbitraire, ce qui fournit une numérotation $\varphi_1, \ldots, \varphi_L$ des L fonctions considérées. On introduit la matrice

$$\mathscr{M} = \left(D_w^\sigma(\varphi_\lambda(s\eta))\right)_{(\lambda;(\sigma,s))},$$

où l'indice λ de lignes varie dans l'intervalle $1 \leqq \lambda \leqq L$, tandis que l'indice (σ, s) de colonnes décrit les couples satisfaisant $\sigma \in \mathbb{N}^{\ell_0}$, $\|\sigma\| \leqq dS_0$ et $s \in \mathbb{N}^M$, $\|s\| = d$. Pour écrire cette matrice, on doit ordonner les couples (σ, s); on choisit n'importe quel ordre vérifiant, pour tout s,

$$(\sigma, s) < (\sigma', s) \quad \text{quand} \quad \|\sigma\| < \|\sigma'\| .$$

Si on montre que cette matrice $\mathcal{M}$ a un rang $< L$, on en déduira l'existence de nombres complexes $c_1, \ldots, c_L$ (en fait dans K), non tous nuls, tels que la fonction

$$\Phi = \sum_{\lambda=1}^{L} c_\lambda \varphi_\lambda$$

vérifie

$$D_w^\sigma \Phi(s\eta) = 0\,, \quad \text{pour tout } (\sigma, s) \in \mathbb{N}^{\ell_0} \times \mathbb{N}^M \text{ avec } \|\sigma\| \leqq dS_0 \text{ et } \|s\| = d\,,$$

ce qui est précisément ce que l'on souhaite démontrer.

(c) Construction des déterminants Δ_{an} et Δ_{ar}. Pour $s = (s_1, \ldots, s_M) \in \mathbb{N}^M$ et $1 \leqq i \leqq n$, on pose $u_{is} = s_1 u_{i1} + \cdots + s_M u_{iM} \in \mathbb{C}^{\delta_i}$. Ainsi, $\pi : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^{d-d_0}$ étant la projection de noyau $\mathbb{C}^{d_0} \times \{0\}$, on a $\pi(s\eta) = (u_{1s}, \ldots, u_{ns})$.

On procède par contradiction en supposant la matrice $\mathcal{M}$ de rang L. On construit une matrice carrée inversible de format $L \times L$ de la façon suivante: sa première colonne est la première colonne non nulle de $\mathcal{M}$, la suivante est le première colonne de $\mathcal{M}$ linéairement indépendante de la première, la troisième est la première colonne de $\mathcal{M}$ linéairement indépendante de ces deux colonnes, et ainsi de suite. Le déterminant de la matrice ainsi construite peut s'écrire

$$\Delta_{\mathrm{an}} - \det\big(D_w^{\sigma_\mu}(\varphi_\lambda(s_\mu \eta))\big)_{1 \leqq \lambda, \mu \leqq L}$$

avec $s_\mu = (s_{\mu 1}, \ldots, s_{\mu M}) \in \mathbb{N}^M$ $(1 \leqq \mu \leqq L)$ satisfaisant $s_{\mu 1} + \cdots + s_{\mu M} = d$. Pour chaque couple (i, μ) $(d_1 + 1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq \mu \leqq L)$, on choisit un indice $\iota_{i\mu}$ avec $0 \leqq \iota_{i\mu} \leqq N_i$ tel que

$$|\varphi_{\iota_{i\mu}}^{(i)}(u_{is_\mu})| = \max_{0 \leqq \nu \leqq N_i} |\varphi_\nu^{(i)}(u_{is_\mu})| .$$

La fonction

$$\phi_{\lambda\mu} = \varphi_\lambda \prod_{i=d_1+1}^{n} (\varphi_{\iota_{i\mu}}^{(i)})^{-T_i}$$

est méromorphe dans $\mathbb{C}^d$ et analytique au point $s_\mu \eta$. Le nombre

$$\Delta_{\mathrm{ar}} = \det\big(D_w^{\sigma_\mu} \phi_{\lambda\mu}(s_\mu \eta)\big)_{1 \leqq \lambda, \mu \leqq L}$$

appartient au corps K.

Pour $1 \leqq \lambda, \mu \leqq L$ on calcule $D_w^{\sigma_\mu} \phi_{\lambda\mu}(s_\mu \eta)$ en utilisant la formule de Leibniz; on voit apparaître la somme de

$$\big(D_w^{\sigma_\mu} \varphi_\lambda(s_\mu \eta)\big) \prod_{i=d_1+1}^{n} \big(\varphi_{\iota_{i\mu}}^{(i)}(u_{is_\mu})\big)^{-T_i}$$

et d'une combinaison linéaire de $D_w^{\sigma'} \varphi_\lambda(s_\mu \eta)$ pour des σ' vérifiant $\|\sigma'\| < \|\sigma_\mu\|$; la construction précédente de Δ_{an} assure que, pour $1 \leqq \mu \leqq L$, le vecteur $\big(D_w^{\sigma_\mu} \phi_{\lambda\mu}(s_\mu \eta)\big)_{1 \leqq \lambda \leqq L}$ est la somme du vecteur

$$\left((D_w^{\sigma_\mu}\varphi_\lambda(s_\mu\eta))\prod_{i=d_1+1}^{n}(\varphi_{\iota i_\mu}^{(i)}(u_{is_\mu}))^{-T_i}\right)_{1\leqq\lambda\leqq L}$$

et d'une combinaison linéaire de vecteurs colonnes de la matrice dont Δ_{an} est le déterminant, pour des indices inférieurs à (σ_μ, s_μ). On en déduit

$$\Delta_{\mathrm{ar}} = \Delta_{\mathrm{an}}\prod_{\mu=1}^{L}\prod_{i=d_1+1}^{n}(\varphi_{\iota i_\mu}^{(i)}(u_{is_\mu}))^{-T_i}.$$

On va majorer Δ_{an} par des arguments analytiques, en fonction de $\varepsilon = \mathrm{dist}(\mathbb{L}, \mathbb{L}')$. On minorera ensuite Δ_{ar} par un argument arithmétique (inégalité de Liouville). Pour comparer ces deux estimations, on utilisera (4.3).

(d) Estimation analytique: majoration de $|\Delta_{\mathrm{an}}|$. Pour majorer $|\Delta_{\mathrm{an}}|$, on va vérifier que l'on peut appliquer le corollaire 5.7 avec S_0 remplacé par dS_0. On impose une première contrainte sur la constante C, à savoir

$$C \geqq 3(\tilde{r}_3 + d + 1), \tag{6.1}$$

avec $\tilde{r}_3 = \max\{r_3, 1\}$. Nous allons en déduire que l'hypothèse principale

$$H(G; \underline{T}) \geqq 4\binom{T_0 + r_1}{r_1}\binom{dS_0 + r_2}{r_2}(V/\log E)^{\tilde{r}_3}$$

implique

$$L \geqq \frac{2}{(\tilde{r}_3 + 1)!}\binom{T_0 + r_1}{r_1}\binom{dS_0 + r_2}{r_2}\left(\frac{\tilde{V}}{\log E}\right)^{\tilde{r}_3}\frac{\tilde{V}}{V}.$$

En effet on a $L = H(G; \underline{T})$,

$$T_0\log E \leqq (U\log E)/(D\log B_1) \leqq U, \quad S_0\log E \leqq (U\log E)/(D\log B_2) \leqq U$$

et $\log E \leqq U$. Donc

$$\begin{aligned}\tilde{V} - V = \big(\tilde{r}_3 T_0 + (\tilde{r}_3 + 1)dS_0 + \tilde{r}_3(\tilde{r}_3 + 1)\big)\log E &\leqq (\tilde{r}_3 + 1)(\tilde{r}_3 + d + 1)U \\ &\leqq (\tilde{r}_3 + 1)(\tilde{r}_3 + d + 1)V/C.\end{aligned}$$

On utilise la majoration

$$\left(1 + \frac{n}{3}\right)^n \leqq 2n! \quad \text{pour } n \geqq 1$$

et la minoration (6.1) pour en déduire l'estimation annoncée.

Si $R_0, \ldots, R_n$ sont des nombres réels $\geqq 1$ et si z est un élément de $\mathbb{C}^d$ qui vérifie

$$|z_h| \leqq R_0 \quad \text{pour } 1 \leqq h \leqq d_0 \quad \text{et} \quad |z^{(i)}| \leqq R_i \quad \text{pour } 1 \leqq i \leqq n,$$

on déduit de (4.3) la majoration

$$\log|\varphi_\lambda(z)| \leqq T_0 \log R_0 + \sum_{i=1}^{d_1} T_i R_i + \sum_{i=d_1+1}^{n} T_i H_i^+(R_i)\,.$$

On utilise cette estimation avec

$$R_0 = dEB_1^D + 2\,, \quad R_i = dE|u_i| + 2 \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

(rappelons que l'on a posé, pour $1 \leqq i \leqq n$, $|u_i| = \max_{1 \leqq j \leqq M} |u_{ij}|$) et $z = \zeta s_\mu \eta + t$ avec $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = E$ et $t \in \mathbb{C}^d$, $|t| = 2$. On majore encore R_0 par $2dEB_1^D$, puis R_i par $(d+1)D\log A_i$ pour $1 \leqq i \leqq d_1$, et enfin $H_i^+(R_i)$ par $D\log A_i$ pour $d_1 < i \leqq n$. On en déduit

$$\log \sup_{\substack{|\zeta|=E\\ |t|=2}} \max_{1 \leqq \mu \leqq L} |\varphi_\lambda(\zeta s_\mu \eta + t)| \leqq M'_\lambda$$

avec

$$M'_\lambda = DT_0 \log B_1 + T_0 \log(2dE) + (d+1)D \sum_{i=1}^{d_1} T_i \log A_i + D \sum_{i=d_1+1}^{n} T_i \log A_i\,.$$

On définit W_1 et W_2 de la manière suivante:

- dans le cas où B_1 et B_2 satisfont

$$\max_{1 \leqq h \leqq d_0} \mathrm{h}(1 : \beta_{h1} : \cdots : \beta_{h,\ell_0+M}) \leqq \log B_1 \quad \text{et} \quad \max_{1 \leqq k \leqq \ell_0} \mathrm{h}(1 : \beta_{d_0+1,k} : \cdots : \beta_{dk}) \leqq \log B_2\,,$$

on pose $W_1 = B_1^D$, $W_2 = B_2^D$ et $W = \max\{W_1, W_2\}$;

- sinon, on a

$$\max_{1 \leqq k \leqq \ell_0} \mathrm{h}(1 : \beta_{1,k} : \cdots : \beta_{dk}) \leqq \log B_2$$

et alors on prend $W_1 = W_2 = W = B_2^D$.

Ainsi on a toujours

$$\min\{dS_0 \log W, T_0 \log W_1 + dS_0 \log W_2\} \leqq DT_0 \log B_1 + dDS_0 \log B_2\,.$$

On majore d'une part $(dS_0 + T_0)e^{-V}$ par $\log 2$ et d'autre part $d^{dS_0}(dS_0+1)!$ par $B_2^{2dS_0}$ grâce aux hypothèses

$$B_2 \geqq 2d \quad \text{et} \quad B_2 \geqq dS_0 + 1\,.$$

On déduit du corollaire 5.7:

$$\frac{1}{L}\log|\Delta_{\mathrm{an}}| \leqq -\frac{1}{2}V + V_{\mathrm{an}}$$

avec

$$V_{\mathrm{an}} = \log(8L) + 2DT_0 \log B_1 + d(D+2)S_0 \log B_2 + T_0 \log(2dE)$$
$$+ (d+1)D \sum_{i=1}^{d_1} T_i \log A_i + D \sum_{i=d_1+1}^{n} T_i \log A_i\,.$$

(e) Estimation arithmétique: minoration de $|\Delta_{\mathrm{ar}}|$. On va utiliser la proposition 4.7 avec S_0 remplacé par dS_0, u par $\pi(s_\mu \eta)$ et σ par σ_μ. On pose, pour $1 \leqq \mu \leqq L$,

$$\Xi_\mu = \Delta^{dS_0} \prod_{i=d_1+1}^{n} \left(A_{\iota_{i\mu}}^{(i)}(\psi_0^{(i)}(0), \psi_{\iota_{i\mu}}^{(i)}(u_{is_\mu}))\right)^{T_i}.$$

Il existe des nombres $q_{\sigma'\mu}$ (indexés par les $(\sigma', \mu) \in \mathbb{N}^{\ell_0} \times \mathbb{N}$ qui satisfont $\|\sigma'\| < \|\sigma_\mu\|$ et $1 \leqq \mu \leqq L$), tels que, pour $1 \leqq \lambda \leqq L$, le nombre

$$p_{\lambda\mu} = \Xi_\mu D_w^{\sigma_\mu} \phi_{\lambda\mu}(s_\mu \eta) + \sum_{\sigma'} q_{\sigma'\mu} D_w^{\sigma'} \phi_{\lambda\mu}(s_\mu \eta)$$

soit la valeur, au point

$$\beta_{ik}, \quad s_{\mu 1}\beta_{h,\ell_0+1} + \cdots + s_{\mu M}\beta_{h,\ell_0+M}, \quad e^{u_{is_\mu}}, \quad \psi_{\iota_{i\mu}}^{(i)}(u_{is_\mu}), \quad \vartheta^{(i)},$$

d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de longueur majorée par

$$e^{C_5 dS_0 + C_2 T^*}(T_0 + T + dS_0)^{dS_0} \leqq e^{C_5 dS_0 + C_2 T^*} B_2^{dS_0},$$

avec les notations suivantes, déjà introduites avant la proposition 4.7:

$$T = T_1 + \cdots + T_n \quad \text{et} \quad T^* = T_{d_1+1} + \cdots + T_n.$$

Le polynôme en question a un degré majoré

– par $\sigma_{\mu k}$ en $\beta_{1k}, \ldots, \beta_{dk}$ $(1 \leqq k \leqq \ell_0)$,

– par $\tau_{\lambda h}$ en $\beta_{h1}, \ldots, \beta_{h\ell_0}, s_{\mu 1}\beta_{h,\ell_0+1} + \cdots + s_{\mu M}\beta_{h,\ell_0+M}$ $(1 \leqq h \leqq d_0)$,

– par T_i en $e^{u_{is_\mu}} = \gamma_{i1}^{s_{\mu 1}} \cdots \gamma_{iM}^{s_{\mu M}}$ $(1 \leqq i \leqq d_1)$,

– par $C_2 T_i$ en $\psi_{\iota_{i\mu}}^{(i)}(u_{is_\mu})$ $(d_1 < i \leqq n)$,

– par $C_2 T_i + c_4(\delta_i) S_0$ en $\vartheta^{(i)} = (\vartheta_1^{(i)}, \ldots, \vartheta_{m(\delta_i)}^{(i)})$ $(d_1 < i \leqq n)$.

On développe $s_{\mu 1}\beta_{h,\ell_0+1} + \cdots + s_{\mu M}\beta_{h,\ell_0+M}$ et on considère $p_{\lambda\mu}$ comme polynôme en $\beta_{h1}, \ldots, \beta_{h,\ell_0+M}$, toujours de degré $\tau_{\lambda h}$ $(1 \leqq h \leqq d_0)$, mais la borne pour la longueur est multipliée par d^{T_0}.

Pour $1 \leqq i \leqq d_1$ et $1 \leqq \mu \leqq L$, on a

$$\mathrm{h}(e^{u_{is_\mu}}) = \mathrm{h}(\gamma_{i1}^{s_{\mu 1}} \cdots \gamma_{iM}^{s_{\mu M}}) \leqq \sum_{j=1}^{M} s_{\mu j} \mathrm{h}(\gamma_{ij}) \leqq d \log A_i.$$

Les composantes de $\psi_{\iota_{i\mu}}^{(i)}(u_{is_\mu})$ $(d_1 < i \leqq n)$ sont des coordonnées projectives du point $s_{\mu 1}\gamma_{i1} + \cdots + s_{\mu M}\gamma_{iM}$, dont la projection sur $G_i(K)$ $(d_1 < i \leqq n)$ a pour coordonnées projectives

$$\psi_{\nu,\iota_{i\mu}}^{(i)}(u_{is_\mu}) \quad (0 \leqq \nu \leqq N_i);$$

noter que la coordonnée d'indice $v = \iota_{i\mu}$ vaut 1. D'après la propriété 4.5, la définition de C_3 et l'hypothèse

$$\log A_i \geqq \max\{\mathrm{h}(G_i), \max_{1 \leqq j \leqq M} \mathrm{h}(\gamma_{ij})\},$$

le point $s_{\mu 1}\gamma_{i1} + \cdots + s_{\mu M}\gamma_{iM}$ a une hauteur logarithmique absolue majorée par

$$d^2 C_3 \max\{\mathrm{h}(G_i), \max_{1 \leqq j \leqq M} \mathrm{h}(\gamma_{ij})\} \leqq d^2 C_3 \log A_i. \tag{6.2}$$

Comme les nombres Ξ_μ et $q_{\sigma'\mu}$ ne dépendent pas de λ, on peut écrire

$$\Xi_1 \cdots \Xi_L \Delta_{\mathrm{ar}} = \det(p_{\lambda\mu})_{1 \leqq \lambda, \mu \leqq L}.$$

Le membre de droite est maintenant un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$,

– en $\beta_{1k}, \ldots, \beta_{dk}$, de degré majoré par $\sigma_{1k} + \cdots + \sigma_{Lk}$ $(1 \leqq k \leqq \ell_0)$,

– en $\beta_{h1}, \ldots, \beta_{h,\ell_0+M}$, de degré majoré par $\tau_{1h} + \cdots + \tau_{Lh}$ $(1 \leqq h \leqq d_0)$,

– en $e^{u_{is_\mu}}$ de degré $\leqq T_i$ $(1 \leqq i \leqq d_1,\ 1 \leqq \mu \leqq L)$,

– en $\psi^{(i)}_{\iota_{i\mu}}(u_{is_\mu})$, de degré $\leqq C_2 T_i$ $(d_1 < i \leqq n,\ 1 \leqq \mu \leqq L)$,

– en $\vartheta^{(i)}_1, \ldots, \vartheta^{(i)}_{m(\delta_i)}$, de degré au plus $L(C_2 T_i + dc_4(\delta_i) S_0)$,

– de longueur majorée par

$$L!\, e^{L(C_5 dS_0 + C_2 T^*)} B_2^{dS_0 L} d^{LT_0}.$$

On va maintenant utiliser l'inégalité de Liouville du lemme 3.3 pour ce polynôme en

$$d\ell_0 + d_0 M + L(N_1 + \cdots + N_n) + m$$

variables, avec $m = m(\delta_{d_1+1}) + \cdots + m(\delta_n)$; on écrit donc

$$\det(p_{\lambda\mu})_{1 \leqq \lambda, \mu \leqq L} = f(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(5)}),$$

pour un polynôme f en $X^{(1)}, \ldots, X^{(5)}$, où $X^{(1)}, \ldots, X^{(5)}$ représentent respectivement soit

$$\text{(cas 1)} \quad (d-d_0)\ell_0, \quad d_0(\ell_0 + M), \quad Ld_1, \quad L(N_{d_1+1} + \cdots + N_n), \quad m$$

variables, soit

$$\text{(cas 2)} \quad d\ell_0, \quad d_0 M, \quad Ld_1, \quad L(N_{d_1+1} + \cdots + N_n), \quad m$$

variables. En effet, on est amené à distinguer deux cas, qui par hypothèse couvrent toutes les situations:

(cas 1) $\qquad \mathrm{h}(1:\beta_{h1}:\cdots:\beta_{h,\ell_0+M}) \leqq \log B_1 \quad (1 \leqq h \leqq d_0)\,;$

(cas 2) $\qquad \mathrm{h}(1:\beta_{1,k}:\cdots:\beta_{dk}) \leqq \log B_2 \quad (1 \leqq k \leqq \ell_0)\,.$

Rappelons que l'on a toujours

$$\mathrm{h}(1:\beta_{h,\ell_0+1}:\cdots:\beta_{h,\ell_0+M}) \leqq \log B_1 \quad (1 \leqq h \leqq d_0)$$

et

$$\mathrm{h}(1:\beta_{d_0+1,k}:\cdots:\beta_{dk}) \leqq \log B_2 \quad (1 \leqq k \leqq \ell_0)\,.$$

Les degrés partiels de f et les dimensions des espaces dans lesquels se trouvent les points $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(5)}$ sont définis par:

$$L_k^{(1)} = \sum_{\mu=1}^{L} \sigma_{\mu k}\,, \quad L_h^{(2)} = \sum_{\lambda=1}^{L} \tau_{\lambda h}\,,$$

$$N_k^{(1)} = d - d_0\,, \quad (\xi_{1k}^{(1)}, \ldots, \xi_{d-d_0,k}^{(1)}) = (\beta_{d_0+1,k}, \ldots, \beta_{dk}) \qquad (1 \leqq k \leqq \ell_0)\,;$$

(cas 1) $\quad N_h^{(2)} = \ell_0 + M\,, \quad (\xi_{h1}^{(2)}, \ldots, \xi_{h,\ell_0+M}^{(2)}) = (\beta_{h1}, \ldots, \beta_{h,\ell_0+M}) \quad (1 \leqq h \leqq d_0)\,;$

$$N_k^{(1)} = d\,, \quad (\xi_{1k}^{(1)}, \ldots, \xi_{dk}^{(1)}) = (\beta_{1k}, \ldots, \beta_{dk}) \qquad (1 \leqq k \leqq \ell_0)\,;$$

(cas 2) $\quad N_h^{(2)} = M\,, \quad (\xi_{h1}^{(2)}, \ldots, \xi_{h,\ell_0+M}^{(2)}) = (\beta_{h,\ell_0+1}, \ldots, \beta_{h,\ell_0+M}) \quad (1 \leqq h \leqq d_0)\,;$

et, dans tous les cas:

$$L_{i\mu}^{(3)} = T_i\,, \qquad N_{i\mu}^{(3)} = 1\,, \qquad \xi_{i\mu}^{(3)} = e^{u_{i s_\mu}} \quad (1 \leqq i \leqq d_1, 1 \leqq \mu \leqq L)\,;$$

$$L_{i\mu}^{(4)} = [C_2 T_i]\,, \qquad N_{i\mu}^{(4)} = N_i\,, \qquad \xi_{i\mu}^{(4)} = \psi_{\iota_{i\mu}}^{(i)}(u_{i s_\mu}) \quad (d_1 < i \leqq n, 1 \leqq \mu \leqq L)\,;$$

$$L_i^{(5)} = L[C_2 T_i + d c_4(\delta_i) S_0], \quad N_i^{(5)} = m(\delta_i), \quad (\xi_1^{(5)}, \ldots, \xi_{m(\delta_i)}^{(5)}) = (\theta_1^{(i)}, \ldots, \theta_{m(\delta_i)}^{(i)}) \quad (d_1 < i \leqq n).$$

Dans la minoration du déterminant de la matrice $(p_{\lambda\mu})_{1 \leqq \lambda, \mu \leqq L}$ que l'on déduit du lemme 3.3, la contribution de la longueur donne un terme:

$$(D-1) L(\log L + C_5 d S_0 + C_2 T^* + d S_0 \log B_2 + T_0 \log d)\,,$$

tandis que les hauteurs des composantes $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(5)}$ du point considéré contribuent à l'estimation de la manière suivante:

$$\sum_{k=1}^{\ell_0} L_k^{(1)} \mathrm{h}(1:\xi_{1k}^{(1)}:\cdots:\xi_{N_k^{(1)},k}^{(1)}) \leqq d L S_0 \log B_2\,,$$

$$\sum_{h=1}^{d_0} L_h^{(2)} \mathrm{h}(1:\xi_{h1}^{(2)}:\cdots:\xi_{h,N_h^{(2)}}^{(2)}) \leqq L T_0 \log B_1\,,$$

$$\sum_{i=1}^{d_1} \sum_{\mu=1}^{L} L_{i\mu}^{(3)} \mathrm{h}(1:\xi_{i\mu}^{(3)}) \leqq d L \sum_{i=1}^{d_1} T_i \log A_i\,,$$

$$\sum_{i=d_1+1}^{n} \sum_{\mu=1}^{L} L_{i\mu}^{(4)} \mathrm{h}(1:\xi_{i\mu 1}^{(4)}:\cdots:\xi_{i\mu N_i}^{(4)}) \leqq d^2 C_2 C_3 L \sum_{i=d_1+1}^{n} T_i \log A_i\,,$$

$$\sum_{i=d_1+1}^{n} L_i^{(5)} \mathrm{h}(1:\xi_1^{(5)}:\cdots:\xi_{m(\delta_i)}^{(5)}) \leqq C_1 L\left(C_2 \sum_{i=1}^{d_1} T_i \log A_i + dC_4 S_0 \log B_2\right).$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{L}\log|\det(p_{\lambda\mu})_{1\leqq\lambda,\mu\leqq L}| \leqq (D-1)(\log L + C_5 dS_0 + C_2 T^* + dS_0 \log B_2 + T_0 \log d) \\ + DT_0 \log B_1 + (1+C_1C_4)dDS_0 \log B_2 + dD\sum_{i=1}^{d_1} T_i \log A_i \\ + C_2(C_1 + d^2 C_3) D \sum_{i=d_1+1}^{n} T_i \log A_i\,. \end{aligned}$$

Pour en déduire une minoration de Δ_{ar}, on doit encore majorer $|\Xi_1 \cdots \Xi_L|$; on utilise l'estimation figurant à la fin du paragraphe 4:

$$\log|\Xi_\mu| \leqq dC_4 S_0 + C_2 \sum_{i=d_1+1}^{n} T_i\big(1 + C_1 D\,\mathrm{h}(G_i) + \log\max\{1, \max_{0\leqq\nu\leqq N_i} |\psi_{\nu,\iota_{i\mu}}^{(i)}(u_{is_\mu})|\}\big),$$

pour $1 \leqq \mu \leqq L$. On majore

$$\sum_{i=d_1+1}^{n} T_i\big(1 + C_1 D\,\mathrm{h}(G_i)\big) \quad \text{par} \quad (1+C_1)D \sum_{i=d_1+1}^{n} T_i \log A_i\,.$$

Fixons $1 \leqq \mu \leqq L$ et $d_1 < i \leqq n$. La majoration (6.2) que nous avons établie plus haut de la hauteur logarithmique absolue du point $s_{\mu 1}\gamma_{i1} + \cdots + s_{\mu M}\gamma_{iM}$ entraîne

$$\log \max_{0\leqq\nu\leqq N_i} |\psi_{\nu,\iota_{i\mu}}^{(i)}(u_{is_\mu})| \leqq d^2 C_3 D \log A_i\,.$$

Ces estimations impliquent

$$\log \max_{1\leqq\mu\leqq L} |\Xi_\mu| \leqq dC_4 S_0 + C_2(1 + C_1 + d^2 C_3) D \sum_{i=d_1+1}^{n} T_i \log A_i\,.$$

Comme $C_5 \geqq C_4$, on peut majorer $dC_4 S_0$ par $dC_5 S_0$. De plus, comme $\log A_i \geqq \mathrm{h}(G_i) \geqq 1$, on peut majorer T^* par $\sum_{i=d_1+1}^{n} T_i \log A_i$. Finalement on conclut

$$\frac{1}{L}\log|\Delta_{\mathrm{ar}}| \geqq -V_{\mathrm{ar}}$$

avec

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{ar}} = (D-1)(\log L + dS_0 \log B_2 + T_0 \log d) + D(T_0 \log B_1 + dS_0 \log B_2) \\ + dD \sum_{i=1}^{d_1} T_i \log A_i + C_7 D \sum_{i=d_1+1}^{n} T_i \log A_i + dDS_0(C_5 + C_1 C_4 \log B_2)\,, \end{aligned}$$

où

$$C_7 = 2C_2(1 + C_1 + d^2 C_3)\,.$$

(f) Conclusion. Rappelons le lien entre les deux déterminants Δ_{ar} et Δ_{an}:

$$\Delta_{\mathrm{ar}} = \Delta_{\mathrm{an}} \prod_{\mu=1}^{L} \prod_{i=d_1+1}^{n} (\varphi_{\iota_{i\mu}}^{(i)}(u_{is_\mu}))^{-T_i}.$$

On majore le module du nombre

$$u_{is_\mu} = \sum_{j=1}^{M} s_{\mu j} u_{ij}$$

par

$$|u_{is_\mu}| \leqq \sum_{j=1}^{M} s_{\mu j} |u_{ij}| \leqq d |u_i|.$$

De (4.3) on déduit, grâce au choix des indices $\iota_{i\mu}$,

$$\log |\varphi_{\iota_{i\mu}}^{(i)}(u_{is_\mu})| \geqq - H_i^-(d|u_i|) \geqq - D \log A_i$$

et

$$\log |\Delta_{\mathrm{ar}}| \leqq \log |\Delta_{\mathrm{an}}| + DL \sum_{i=d_1+1}^{n} T_i \log A_i.$$

On pose

$$V'_{\mathrm{ar}} = V_{\mathrm{ar}} + D \sum_{i=d_1+1}^{n} T_i \log A_i$$

$$= (D-1)(\log L + dS_0 \log B_2 + T_0 \log d) + D\big(T_0 \log B_1 + dS_0 \log B_2\big)$$

$$+ dD \sum_{i=1}^{d_1} T_i \log A_i + (C_7 + 1) D \sum_{i=d_1+1}^{n} T_i \log A_i + dDS_0(C_5 + C_1 C_4 \log B_2).$$

On compare la majoration de $|\Delta_{\mathrm{an}}|$ (étape (d)) avec la minoration de $|\Delta_{\mathrm{ar}}|$ (étape (e)); on va vérifier

$$V_{\mathrm{an}} + V'_{\mathrm{ar}} < \frac{1}{2} V;$$

on en déduira une contradiction; alors l'hypothèse que la matrice $\mathscr{M}$ est de rang L n'est pas satisfaite, ce qui est le résultat attendu.

La condition $V_{\mathrm{an}} + V'_{\mathrm{ar}} < \frac{1}{2} V$ qu'il nous reste à vérifier s'écrit

$$\frac{V}{2} > D \log L + 3 \log 2 + d(3D+1) S_0 \log B_2 + T_0 \log(2d^D E) + 3DT_0 \log B_1$$

$$+ (2d+1) D \sum_{i=1}^{d_1} T_i \log A_i + C_8 D \sum_{i=d_1+1}^{n} T_i \log A_i + dDS_0(C_5 + C_1 C_4 \log B_2),$$

avec

$$C_8 = \begin{cases} C_7 + 2 & \text{si } n > d_1, \\ 0 & \text{si } d_2 = 0. \end{cases}$$

En utilisant les inégalités

$$2^6 L^{2D} < e^U, \quad 2d^D E \leqq B_1^{2D},$$

avec les majorations

$$3D + 1 \leqq 4D \quad \text{et} \quad dDS_0(C_5 + C_1 C_4 \log B_2) \leqq d(C_5 + C_1 C_4) U,$$

on voit que l'hypothèse $V \geqq CU$ du paragraphe 2 donne l'estimation voulue si on prend

$$C = 8d + 11 + 2\max\{C_8, 2d+1\} + 2d(C_5 + C_1 C_4). \tag{6.3}$$

La contrainte (6.1) qui était apparue plus tôt est évidemment satisfaite pour cette valeur de C.

Par exemple quand $n = d_1$ (cas linéaire) on peut prendre $C = 12d + 13$, comme cela a été annoncé au paragraphe 2. Dans le cas $n > d_1$, comme on a

$$C_8 = 2 + 2C_2(1 + C_1 + d^2 C_3) \quad \text{et} \quad C_5 = 2C_4 + \log\bigl(\delta^*(C_2 + C_4)\bigr),$$

on peut conclure que

$$C = 8d + 15 + 4C_2(1 + C_1 + d^2 C_3) + 2dC_4(C_1 + 2) + 2d\log\bigl(\delta^*(C_2 + C_4)\bigr)$$

est une valeur admissible.

Par exemple quand G est le produit d'un groupe linéaire par des courbes elliptiques, on a $\delta_1 = \cdots = \delta_n = 1$ et on peut alors prendre

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 7, \quad C_3 = 12, \quad C_4 = 3(n - d_1) \leqq 3d,$$

ce qui donne le résultat avec $C = 379d^2$ (on a supposé $d \geqq 2$). □

§ 7. Perspectives

Le théorème 2.1 contient déjà de nombreux énoncés d'approximation diophantienne. On peut encore le développer dans différentes directions; nous en indiquons quelques-unes.

(a) Dans le cas particulier $d_2 = 0$ (G est alors un groupe algébrique linéaire), la matrice $\mathbb{L}_3$ décrite à la fin du paragraphe 2 a pour coefficients des logarithmes (usuels) de nombres algébriques. La dualité entre les méthodes de Gel'fond et de Schneider revient à transposer $\mathbb{L}$. On s'attend donc à ce que le résultat final soit essentiellement invariant quand on permute les deux ensembles de paramètres $\{d_0, T_0, B_1, r_1\}$ et $\{\ell_0, S_0, B_2, r_2\}$. La principale dissymétrie qui apparaît dans les hypothèses du théorème 2.1 concerne les conditions imposées aux paramètres B_1 et B_2: on impose $B_2 \geqq T_0 + T$ avec $T = T_1 + \cdots + T_{d_1}$, alors qu'il n'y a pas de restriction semblable sur B_1.

On peut démontrer une variante du théorème 2.1, dans le cas $d_2 = 0$, dans laquelle B_1 et B_2 jouent essentiellement des rôles symétriques.

(b) La dualité que nous venons de mentionner suggère de faire varier les paramètres t_i dans d'autres domaines que le produit des intervalles $[0, T_i]$. Par exemple on peut prendre $-T_i \leqq t_i \leqq T_i$ pour $1 \leqq i \leqq d_1$; cela conduit dans certains cas à des estimations légèrement plus précises.

(c) Au lieu de travailler avec des sous-ensembles de $G(K)$ de la forme $\{s_1\gamma_1 + \cdots + s_{\ell_1}\gamma_{\ell_1}\}$ (qui sont les plus fréquents dans les applications), nous avons préféré considérer des sous-ensembles quelconques $\Sigma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_N\} \subset G(K)$. La loi d'addition intervient au niveau du lemme de zéros, qui impose de considérer des sommes de d éléments de cet ensemble.

La dualité incite à considérer aussi des ensembles de dérivations plus généraux que ceux que nous avons fait intervenir ici. Le nouveau lemme de zéros de [P2] permet précisément de le faire: au lieu de se restreindre à un unique paramètre S_0 et aux éléments $\sigma \in \mathbb{N}^{\ell_0}$ vérifiant $\|\sigma\| \leqq S_0$, on peut considérer les «dessous d'escaliers» introduits dans [P2].

(d) Pour obtenir des minorations de combinaisons linéaires de logarithmes par la méthode de Baker [PW] (resp. par la méthode de Schneider [W2]) il vaut mieux travailler avec un quotient (resp. un sous-groupe) du groupe algébrique G.

Dans ce type d'applications, il est important de raffiner la constante numérique. Par exemple il est utile de noter (voir la majoration de $\tilde{V} - V$ dans la section (d) du paragraphe 6) que l'on peut remplacer le coefficient 4 dans la minoration de $H(G; \underline{T})$ de l'hypothèse principale par

$$\frac{2}{(\tilde{r}_3+1)!}\left(1 + \frac{(\tilde{r}_3+1)(\tilde{r}_3+d+1)}{C}\right)^{\tilde{r}_3+1}, \quad \tilde{r}_3 = \max\{r_3, 1\}.$$

On peut aussi modifier légèrement les hypothèses du paragraphe 2 pour raffiner la constante. Ainsi, en supposant $B_1 \geqq 4d^2$ et $B_2 \geqq d^2$, on peut majorer $2d^D E$ par $B_1^{3D/2}$ et $d^{dS_0}(dS_0+1)!$ par $B_2^{3dS_0/2}$, permettant de retrancher $d+1$ à la valeur de C (dans le cas linéaire on obtient donc $11d+12$ à la place de $12d+13$). D'un autre côté on peut aussi remplacer la condition $\log A_i \geqq 2/D$ pour $1 \leqq i \leqq d_1$ par la contrainte plus faible $\log A_i \geqq 1/D$. Il suffit pour cela de remplacer le terme $2\max\{C_8, 2d+1\}$ dans (6.3) par $2\max\{C_8, 2d+2\}$.

(e) Sur la partie additive $\mathbb{G}_a^{d_0}$ de G on a utilisé la base habituelle (donnée par les monômes) de l'espace des polynômes. D'autres bases autorisent parfois des raffinements (par exemple celles introduites par Fel'dman – voir [F], Lemma 19.7, p. 127). La même remarque s'applique pour les dérivées.

(f) Le théorème 2.1 ne contient pas le théorème du sous-groupe algébrique, parce que ce dernier tient compte d'éventuelles périodes appartenant au sous-espace $\mathscr{V}'$ (c'est le paramètre κ dans l'énoncé du théorème du sous-groupe algébrique – paragraphe 2, section (d)). Il semble que le raffinement suivant du théorème 2.1 soit accessible:

Soit κ un entier $\geqq 0$ (le cas $\kappa = 0$ est celui qui précède); *supposons que $\mathscr{V}' \cap \ker \exp_G$ contienne κ éléments $\omega_1, \ldots, \omega_\kappa$, linéairement indépendants sur* $\mathbb{R}$:

$$\omega_\nu = (\omega_{0\nu}, \ldots, \omega_{n\nu}) \quad (1 \leqq \nu \leqq \kappa)$$

avec $\omega_{i\nu} \in \mathbb{C}^{\delta_i}$ *et* $\omega_{0\nu} = 0$. *On introduit des entiers positifs* $S_1, \dots, S_\kappa$, *astreints aux conditions*

$$(ES_\nu |\omega_{i\nu}|)^{\varrho_i} \leqq D \log A_i \quad (1 \leqq \nu \leqq \kappa, 1 \leqq i \leqq n)\,,$$

avec

$$\varrho_1 = \cdots = \varrho_{d_1} = 1\,, \quad \varrho_{d_1+1} = \cdots = \varrho_n = 2\,.$$

Alors, dans l'hypothèse principale, on peut remplacer $H(G; \underline{T})$ *par* $S_1 \cdots S_\kappa H(G; \underline{T})$.

(g) On peut adapter la méthode introduite par Philippon dans [P3] pour l'indépendance algébrique: on conserve la même matrice analytique $\mathbb{L}'$, mais on demande à la matrice arithmétique $\mathbb{L}$ d'avoir ses coefficients dans une extension finie $\tilde{K}$ de K. On remplace l'hypothèse

$$\operatorname{dist}(\mathbb{L}', \mathbb{L}) \leqq e^{-V}$$

par

$$\prod_\sigma \operatorname{dist}(\mathbb{L}', \sigma(\mathbb{L})) \leqq e^{-V}\,,$$

où σ décrit les K-plongements de $\tilde{K}$ dans $\mathbb{C}$. On retrouve l'énoncé précédent pour $\tilde{K} = K$. Cette approche fournit des résultats d'indépendance algébrique par une variante de la méthode de [RW2].

(h) Les résultats donnés dans le présent texte sont archimédiens; un analogue ultramétrique peut être obtenu, avec une dépendance explicite en la caractéristique résiduelle p. On peut aussi considérer plusieurs places et donner un énoncé d'approximation simultanée.

(i) Un autre développement à envisager concerne les modules de Drinfeld.

Références

[D1] *S. David*, Fonctions thêta, formes modulaires et approximation diophantienne, Thèse de Doctorat, Université de Paris VI, 16 Février 1989, Chapitre 2: Théorie de Baker pour des familles de groupes algébriques commutatifs, p. 32–63.

[D2] *S. David*, Fonctions thêta et points de torsion des variétés abéliennes, Compos. Math. **78** (1991), 121–160.

[D3] *S. David*, Minoration de formes linéaires de logarithmes elliptiques, Mém. Soc. Math. France **62**, Nouvelle Série, Supplément au Bull. Soc. Math. France **123**, fasc. 3, (1995), 143 pp.

[De] *L. Denis*, Lemmes de multiplicités et intersections, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 235–247.

[FP] *A. Faisant* et *G. Philibert*, Approximations simultanées de τ et $j(\tau)$, J. Number Th. **25** (1987), 184–200.

[F] *N. I. Fel'dman*, Hilbert's seventh problem, Moscow, Moscow State University (1982), 311 pp.

[LR] *H. Lange* et *W. Ruppert*, Complete systems of addition laws on abelian varieties, Invent. Math. **79** (1985), 603–610.

[L1] *M. Laurent*, Sur quelques résultats récents de transcendance, Journées arithmétiques Luminy 1989, Astérisque **198–200** (1991), 209–230.

[L2] *M. Laurent*, Linear forms in two logarithms and interpolation determinants, Acta Arith. **66** (1994), 181–199.

[P1] *P. Philippon*, Lemme de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, Bull. Soc. Math. France **114** (1986), 355–383; Errata et Addenda, id. **115** (1987), 397–398.

[P2] *P. Philippon*, Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, Rocky Mountain J. Math. **26** (1996), 1069–1088.

[P3] *P. Philippon*, Une approche méthodique pour la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions analytiques, J. Number Th. **64** (1997), 291–338.

[PW] *P. Philippon* et *M. Waldschmidt*, Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs, Illinois J. Math. **32** (1988), 281–314.

[R] *D. Roy*, Transcendance et questions de répartition dans les groupes algébriques, Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants, Luminy 1990, éd. P. Philippon, W. de Gruyter (1992), 249–274.

[RW1] *D. Roy* et *M. Waldschmidt*, Autour du théorème du sous-groupe algébrique, Canadian Bull. Math. **36** (1993), 358–367.

[RW2] *D. Roy* et *M. Waldschmidt*, Approximation diophantienne et indépendance algébrique de logarithmes, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **30** (1997), à paraître.

[RW3] *D. Roy* et *M. Waldschmidt*, Simultaneous approximation and algebraic independence, Ramanujan J. **4** (1997), 379–430.

[Se] *J.-P. Serre*, Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs, Astérisque **69/70** (1979), 191–202 (Appendice de [W1]).

[W1] *M. Waldschmidt*, Nombres transcendants et groupes algébriques, Astérisque **69/70** (1979).

[W2] *M. Waldschmidt*, On the transcendence methods of Gel'fond and Schneider in several variables, in: New advances in transcendence theory, ed. A. Baker, Cambridge Univ. Press (1988), 375–398.

[W3] *M. Waldschmidt*, Linear independence of logarithms of algebraic numbers, The Institute of Mathematical Sciences, IMSc Report **116**, Madras 1992.

[W4] *M. Waldschmidt*, Topologie des points rationnels, Cours de Troisième Cycle 1994/95, Univ. P. et M. Curie, 168 pp.; http://www.math.jussieu.fr/~miw.

[Wü] *G. Wüstholz*, Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen, Ann. Math. **129** (1989), 501–517.

Université P. et M. Curie (Paris VI), Institut Mathématique de Jussieu, Problèmes Diophantiens, Case 247, 4, Place Jussieu, F – 75252 Paris Cedex 05
e-mail: miw@math.jussieu.fr

Eingegangen 2. April 1996, in revidierter Fassung 29. Oktober 1996