Séminaire de Théorie des Nombres
Année 1972-1973 - exposé n° 12

PROBLEMES DE NOMBRES DE CLASSES DE CORPS QUADRATIQUES IMAGINAIRES (aperçu historique)

par

Michel WALDSCHMIDT

-:-:-:-

§. 1. - INTRODUCTION

Soit $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un corps quadratique imaginaire de discriminant $d<0$ et de nombre de classes $h(d)$. Dans ses "Disquisitiones Arithmeticae", Gauss avait conjecturé que les discriminants négatifs associés à un nombre de classes h donné étaient en nombre fini ; dans les tables qu'il donne figurent (en traduisant les notations de la théorie des formes quadratiques) 9 discriminants ayant un nombre de classes 1 :

$$-2\ ,\ -3\ ,\ -4\ ,\ -7\ ,\ -11\ ,\ -19\ ,\ -43\ ,\ -67\ ,\ -163\ ,$$

et 18 discriminants correspondant à un nombre de classes 2 :

$$-15\ ,\ -20\ ,\ -24\ ,\ -35\ ,\ -40\ ,\ -51\ ,\ -52\ ,\ -88\ ,\ -91\ ,$$
$$-115\ ,\ -123\ ,\ -148\ ,\ -187\ ,\ -232\ ,\ -235\ ,\ -267\ ,\ -403\ ,\ -427\ .$$

(On pourra consulter les tables de Borevich et Shafarevich (1964) pour $0<-d<500$, et de Wada (1970) pour $0<-d<24\,000$).

Cette conjecture de Gauss fut résolue par Heilbronn (1934) qui, développant des travaux de Hecke, Mordell et Deuring, démontra que $h(d)$ tend vers $+\infty$ quand d tend vers $-\infty$. Ces travaux furent étendus par Siegel (1934) et Brauer en des formules asymptotiques telles que

$$\operatorname{Log} h(d) \sim \operatorname{Log} \sqrt{|d|} .$$

Mais les arguments utilisés ne sont pas effectifs : la méthode ne permet pas de majorer explicitement la valeur absolue des discriminants $d < 0$ vérifiant $h(d) = h$. Néanmoins, on peut majorer le nombre de ces discriminants. Ainsi Heilbronn et Linfoot (1934) ont établi qu'il existait au plus 10 corps quadratiques imaginaires de nombre de classes 1, et Tatuzawa (1951) montrera que, pour tout $h \geq 1$, si $d < 0$ est le discriminant d'un corps quadratique de nombre de classes $h(d) = h$, alors on a :

$$|d| \leq 2100\, h^2 (\operatorname{Log} 13\, h)^2 ,$$

avec au plus une valeur exceptionnelle de d.

Indiquons brièvement l'idée d'Heilbronn et de Linfoot. Soit d un discriminant ; d'après la loi de réciprocité quadratique, il existe un caractère quadratique χ_d mod $|d|$, unique, tel que, pour p premier, $(p, 2d) = 1$, on ait $\chi_d(p) = 1$ ou -1 suivant que d est un carré modulo p ou non. Ainsi

$$\chi_d(n) = \left(\frac{|d|}{n}\right) \quad \text{est le symbole de Kronecker.}$$

La fonction

$$L(s, \chi_d) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_d(n)\, n^{-s} , \quad (\operatorname{Re} s > 1)$$

est reliée au nombre de classes $h(d)$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ par la relation (Lejeune Dirichlet, 1839) :

$$(1) \qquad L(1, \chi_d) = \frac{\pi\, h(d)}{\sqrt{|d|}} \quad \text{si } d < 0 , \ d \neq -3 , \ d \neq -4 ,$$

et

$$(2) \qquad L(1, \chi_d) = \frac{2h(d)}{\sqrt{d}} \operatorname{Log} \varepsilon_d \quad \text{si } d > 0 ,$$

où ε_d est une unité fondamentale du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Heilbronn et Linfoot étudient le signe, au voisinage de $s = 1$, de fonctions $L(s, \chi_d)$ et $L(s, \chi_{d'})$, où χ_d et $\chi_{d'}$ sont les caractères associés à des corps quadratiques imaginaires de nombre de classes 1, et de discriminant d et d', puis ils développent

$$L(s, \chi_d) \,.\, L(s, \chi_d \chi_{d'})$$

en série de Fourier pour obtenir une contradiction quand $|d|$ et $|d'|$ sont suffisamment grands.

§. 2. - LE PROBLEME DU DIXIEME DISCRIMINANT

Le problème de l'existence d'un dixième corps quadratique imaginaire de nombre de classes 1 suscita de nombreux travaux ; plusieurs minorations furent données pour la valeur absolue du discriminant d de ce dixième corps, dans l'hypothèse où la liste de Gauss serait incomplète ; ainsi, L. E. Dickson, en 1911, obtint :

$$|d| \geq 15.\,10^5 ,$$

puis, en 1933, D. H. Lehmer :

$$|d| \geq 5.\,10^8 ;$$

enfin, en 1966, H. M. Stark donna la borne colossale

$$|d| \geq \exp\,(2{,}2.\,10^7) \,. \tag{3}$$

Une première démonstration (contestée) de la non existence de ce dixième corps fut publiée par Heegner (1952).

La méthode de Heegner

On la trouvera exposée dans les articles suivants : Heegner (1951) ; Siegel (1968) ; Deuring (1968) ; Stark (1968 a, 1968 c, 1969 a, 1972).

Remarquons d'abord que, si $h(d) = 1$, avec $d < -11$, alors $|d|$ est un nombre premier $p \equiv 19 \mod. 24$ (étudier la ramification et la décomposition dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ des diviseurs premiers de $|d|$, puis celles de 2 et de 3 ; cf. Poitou (1967)).

Considérons la fonction modulaire

$$j(\tau) = \frac{(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n)^3}{q \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}} \quad , \quad (\operatorname{Im} \tau > 0) \ ,$$

avec $q = e^{2i\pi\tau}$, et $\sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3$.

On trouve dans le livre de H. Weber les résultats suivants (cf. Stark (1968 a)).

Si d est le discriminant d'une forme quadratique définie positive

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 \ ,$$

avec $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, $(a,b,c) = 1$, $d = b^2 - 4ac < 0$, $d \equiv -3 \mod 8$ et $3 \nmid d$, alors $j(\frac{-b+\sqrt{d}}{2a})$ est un entier algébrique réel, de degré $h(d)$. On peut choisir ici $a = 1$, $b = 3$; soit $\omega = \frac{-3+\sqrt{d}}{2}$; le nombre

$$\gamma_2(\omega) = [j(\omega)]^{\frac{1}{3}}$$

est alors un entier algébrique de degré $h(d)$, et le nombre

$$f(\omega) = e^{-\frac{i\pi\omega}{24}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 + e^{(2n-1)\pi\omega})$$

est racine du polynôme

$$(4) \qquad x^{24} - \gamma_2(\omega) \cdot x^8 - 16 \ .$$

Heegner affirme alors que ce polynôme admet un diviseur de degré 6 dont les coefficients sont des entiers algébriques de degré $\leq h(d)$. Dans le cas $h(d) = 1$, il obtient ainsi l'existence d'entiers rationnels α, β tels que $f(\omega)$ soit racine du polynôme

$$x^6 - 2\alpha x^4 + 2\beta x^2 - 2 = 0 \ ;$$

de plus α et β satisfont

$$(5) \qquad (\beta - 2\alpha^2)^2 = 2\alpha(\alpha^3 + 1) .$$

Or les solutions entières $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de cette équation diophantienne (5) sont au nombre de 6 :

$$(\alpha, \beta) = (0,0) \ ; \ (1,0) \ ; \ (-1,2) \ ; \ (2,2) \ ; \ (1,4) \ ; \ (2,14) .$$

A chacune de ces solutions correspond une valeur de $\gamma_2(\omega)$:

$$\gamma_2(\omega) = 0 \ ; \ -32 \ ; \ -96 \ ; \ -960 \ ; \ -5280 \ ; \ -640320 .$$

Comme la fonction $j(z)$ est à valeurs réelles et monotone sur $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$, il ne reste plus qu'à constater que ces six valeurs correspondent aux six discriminants

$$d = -3 \ , \ -11 \ , \ -19 \ , \ -43 \ , \ -67 \ , \ -163 .$$

Le point crucial de la démonstration était donc l'existence d'un facteur de degré 6 (à coefficients dans $\mathbb{Z}$ si $h(d) = 1$) du polynôme (4) , et cette factorisation reposait sur des résultats insuffisamment démontrés du livre de H. Weber. (Ce "trou" dans la démonstration de Heegner ne sera comblé que 16 ans plus tard, par Stark (1968 a, 1968 c), et Birch ; voir aussi Siegel (1968) et Deuring (1968)).

La solution définitive du problème de nombre de classes 1 a été donnée en 1966, par Baker (1966)et Stark (1966 a), indépendamment l'un de l'autre.

THEOREME 1. - <u>Si</u> d <u>est le discriminant d'un corps quadratique imaginaire de nombre de classes</u> 1 , <u>alors</u> $|d| \leq 163$.

Les méthodes de Baker et Stark reposent toutes deux sur une modification de l'idée d'Heilbronn et Linfoot, qui consiste à considérer deux fonctions $L(s, \chi_d)$ et $L(s, \chi_{d'})$, où d et d' sont deux discriminants négatifs, et où le caractère $\chi_d \chi_{d'}$ correspond à un corps quadratique réel fixe $\mathbb{Q}(\sqrt{k})$, $k > 0$. En écrivant les fonctions L et ζ des différents corps :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \mathbb{Q}(\sqrt{k}) \arrow[dr] & \\ \mathbb{Q} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{Q}(\sqrt{kd}) \arrow[r] & \mathbb{Q}(\sqrt{k}, \sqrt{d}) \\ & \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et en étudiant la limite pour $s \to 1$ de $L(s, \chi_d) . L(s, \chi_d \chi_{kd})$, on obtient, grâce à (1) et (2), une proposition dans le style de la formule-limite de Kronecker.

PROPOSITION 1. - *Soient* $k > 0$ *et* $d < -8$ *deux entiers tels que* $(k, d) = 1$. *Soit* ε_k *une unité fondamentale de* $\mathbb{Q}(\sqrt{k})$; *soit* $\{f\} = \{ax^2 + bxy + cy^2\}$ *un ensemble de* $h(d)$ *formes quadratiques non équivalentes de discriminant* d. *Il existe des nombres complexes* $B_r(f)$, $r \in \mathbb{Z}$, *vérifiant*

$$|B_r(f)| \leq k . |r| . \exp\left(-\frac{\pi |r| \sqrt{|d|}}{a k}\right) \qquad \text{si } r \neq 0$$

$$B_o(f) = \begin{cases} - \operatorname{Log} p . \chi_k(a) & \text{si } k \text{ est une puissance d'un nombre premier } p , \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

tels que

$$h(k). h(kd). \operatorname{Log} \varepsilon_k = \frac{1}{12} \pi k \sqrt{|d|} \left(\Sigma \chi_k(a) a^{-1} \right) . \prod_{p|k} (1 - p^{-2})$$

$$+ \sum_f B_o(f) + \sum_f \sum_{\substack{r \neq 0 \\ -\infty < r < +\infty}} B_r \exp\left(\frac{\pi i r b}{k . a}\right) .$$

Cette formule, due à Stark (1966 b) pour k quelconque, était connue de Heilbronn et Linfoot pour k premier.

Comme la méthode de Stark est plus près des idées de Heegner, et que la méthode de Baker permettra d'aborder le problème du nombre de classes 2, nous exposons d'abord la méthode de Stark.

La solution de Stark

Elle consiste à ramener le problème à l'étude de certaines équations diophantiennes ; le point crucial de la démonstration de Heegner est contourné de la manière suivante : au lieu de montrer que certains nombres sont entiers rationnels, on montre seulement qu'ils sont très proches de nombres rationnels.

Stark choisit, dans la proposition 1, $k = 8$, puis $k = 12$. Il obtient :

$$\frac{1}{4} h(8d) \operatorname{Log}(1+\sqrt{2}) = -\frac{1}{4} \operatorname{Log} 2 + \frac{\pi\sqrt{p}}{8} \pm \sqrt{2(2 \pm\sqrt{2})}\, y + O(y^3) \quad ;$$

$$\frac{1}{8} h(12d) \operatorname{Log}(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi\sqrt{|d|}}{12} \pm \sqrt{2}\, z \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} z^3 + O(z^4) \quad ,$$

où $y = \exp(-\pi \frac{\sqrt{|d|}}{8})$, et $z = \exp(-\pi \frac{\sqrt{|d|}}{12})$; les signes $\pm$ dépendent des congruences de $\frac{1-d}{4}$ mod 8, et les O sont effectifs.

On montre que l'on a :

$$h(8d) \equiv 2 \bmod 4 \quad , \quad h(12d) \equiv 4 \bmod 8 \; .$$

Si on pose

$$h(8d) = 4N+2 \quad ; \quad h(12d) = 8M+4 \quad ,$$

$$a_M = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^M + \frac{1-\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^M \pm 1 \; ,$$

$$b_N = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1+\sqrt{2})^N - (1-\sqrt{2})^N \right]$$

$$c_N = \frac{1}{2} \left[(1+\sqrt{2})^N + (1-\sqrt{2})^N \right] \; ,$$

on obtient

$$|c_{2N+1} - 4 b_N - a_M^3 - 3| < 1 \qquad \text{pour} \quad |d| > 200 \quad ;$$

comme le membre de gauche est un entier rationnel, il est obligatoirement nul, ce qui donne un système en nombres entiers

$$8x^6 \pm 1 = y^2$$

$$x^6 \pm 1 = 2y^2 \quad ;$$

ce système se ramène à l'équation (5) d'Heegner, qui n'a pas de solution pour $|d| > 200$.

Cette méthode est exposée en détail dans les articles suivants : Stark (1966 a ; 1966 b ; 1967 ; 1968 c ; 1969 a ; 1972) ; Poitou (1967) ; Hily (1970) ; voir aussi Siegel (1968) et Deuring (1968).

La solution de Baker

La solution de Baker est une conséquence directe d'un travail de Gel'fond et Linnik (1948) (voir aussi Gel'fond (1952) chap. I §. 4, th. IX). Gel'fond et Linnik utilisaient la proposition 1 (qu'ils ne connaissaient que pour k premier) avec $k = 5$, puis $k = 13$. Ils en déduisaient

$$35\, h(5d) \operatorname{Log}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 13\, h(13d) \operatorname{Log}\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + \operatorname{Log}\left(\frac{5^{35}}{13^{13}}\right) = O\left(\exp\left(-\pi \frac{\sqrt{|d|}}{13}\right)\right) .$$

Il suffisait alors de montrer que cette relation était impossible pour d suffisamment grand, et par conséquent le problème était ramené à la recherche d'une minoration effective d'une forme linéaire de 3 logarithmes de nombres algébriques. Or Gel'fond possédait deux types de théorèmes sur ces formes linéaires :

- Une minoration effective pour des formes linéaires de deux logarithmes (obtenue par une généralisation de sa méthode de résolution de la transcendance de a^b)

- Une minoration non effective pour des formes linéaires de plus de deux logarithmes (obtenue à partir de la méthode de Thue).

Ainsi Gel'fond et Linnik, sans avoir résolu le problème, l'avaient ramené à un problème de transcendance.

La première minoration effective pour une forme linéaire d'un nombre quelconque de logarithmes de nombres algébriques, est due à Baker (1966), ce qui, grâce à Gel'fond et Linnik, résolvait (théoriquement) le problème. Il ne restait plus qu'à faire une vérification finie ; les détails ont été écrits par Bundschuh et Hock (1968) qui obtenaient la majoration $|d| < e^{40}$ si $h(d) = 1$. L'inégalité (3) de Stark permet de conclure.

En fait, comme l'a remarqué Stark (1968 b), si Gel'fond et Linnik avaient connu la proposition 1 dans le cas où k n'est pas premier, ils auraient pu choisir $k = 12$, puis $k = 24$, pour obtenir :

$$h(24\,d).\ \mathrm{Log}(5+2\sqrt{6}) - 2h(12\,d)\ \mathrm{Log}\,(2+\sqrt{3}) = O(\exp(-\pi\frac{\sqrt{|d|}}{24})\ ,$$

ce qui leur aurait permis de résoudre définitivement le problème, grâce à la minoration effective de Gel'fond pour des formes linéaires de deux logarithmes.

La méthode de Gel'fond, Linnik, Baker est exposée dans les articles suivants : Gel'fond, Linnik (1948) ; Gel'fond (1952) ; Baker (1966) ; Stark (1968 b) ; Bundschuh, Hock (1968) ; Baker (1969, 1970 a).

§. 3. - NOMBRE DE CLASSES 2

Les techniques précédentes peuvent s'étendre facilement au problème de nombre de classes 2 dans le cas particulier où le discriminant est pair. En effet, dans ce cas il existe deux formes quadratiques non équivalentes, de discriminant $-d$, avec $a = 1$ ou 2, qui sont

$$x^2 + \frac{d}{4}\,y^2 \quad \text{et} \quad 2x^2 + 2xy + \frac{1}{8}\,(d+4)\,y^2 \quad \text{si} \quad \frac{d}{4} \equiv 1 \mod 4\ ,$$

et

$$x^2 + \frac{d}{4}\,y^2 \quad \text{et} \quad 2x^2 + \frac{d}{8}\,y^2 \quad \text{si} \quad \frac{d}{4} \equiv 2 \mod 4\ .$$

On utilise alors la proposition 1 avec $k = 21$, puis $k = 33$.

Ceci a été fait, indépendamment par Alan Baker (1968), Monsur Kenku (en 1968), Peter Weinberger (en 1969) et C. Moreno (en 1969).

Le cas difficile à résoudre est $d \equiv 3 \mod 8$; dans ce cas les valeurs de a peuvent être très grandes (de l'ordre de $\frac{\sqrt{|d|}}{3}$) et les méthodes précédentes sont insuffisantes. Néanmoins on peut ramener le problème du nombre de classes 2 où une conjecture concernant les formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques (Goldstein, 1970 b).

C'est en résolvant un cas particulier de cette conjecture que Baker (1970 b) et Stark (1970 b), indépendamment, donnèrent une détermination effective des corps quadratiques imaginaires de nombre de classes 2 .

THEOREME 2. - Si d est le discriminant d'un corps quadratique imaginaire de nombre de classes 2 , alors $|d| \leq 427$.

Les méthodes de Baker et Stark comportent chacune deux parties indépendantes ; l'une consiste à minorer effectivement une forme linéaire de logarithmes de nombres algébriques (c'est là que se situent les différences essentielles entre les deux méthodes ; la mise en commun de ces techniques leur a permis d'améliorer leurs résultats (Baker et Stark, 1971)). La deuxième partie consiste à raffiner la proposition 1 , et à démontrer des résultats du type suivant (Baker, 1970 b).

PROPOSITION 2. - Soient p et q deux nombres premiers, $p \equiv 1 \mod 4$, $q \equiv 3 \mod 4$; soit $k > 4$ le discriminant de $\mathbb{Q}(\sqrt{k})$, avec $(k, pq) = 1$. Soit

$$f = x^2 + xy + \frac{1}{4}(1 + pq)y^2 \quad .$$

Si le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-pq})$ a un nombre de classes 2 , on a :

$$\frac{k.\sqrt{pq}}{2\pi} \sum_{\substack{x=-\infty \\ (x,y)\neq(0,0)}}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_k(f)}{f} = h(k).\,h(-kpq)\,\mathrm{Log}\,\varepsilon_k + h(kp).\,h(-kq)\,\mathrm{Log}\,\varepsilon_{kp} \;,$$

où ε_k et ε_{kp} sont des unités fondamentales de $\mathbb{Q}(\sqrt{k})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{kp})$ respectivement.

En choisissant par exemple $k = 21$, on en déduit une inégalité du type

$$|h(21\,d)\ \mathrm{Log}\ \varepsilon_k + h(21\,p)\,h(-21\,q)\ \mathrm{Log}\ \varepsilon_{kp} - \frac{64}{21}\pi\sqrt{|d|}\ | < e^{-\frac{\sqrt{|d|}}{10}},$$

si $d = -pq$, ce qui permet de majorer explicitement les $|d|$ pour lesquels $h(d) = 2$.

Ainsi Stark (1970 b, 1971 a) obtint successivement $|d| < 10^{1100}$, puis $|d| < 10^{1030}$, et il annonce avoir obtenu, par un calcul sur ordinateur, $|d| \leq 427$. Une étude différente de l'intervalle $10^{12} \leq |d| \leq 10^{1100}$, utilisant l'existence de nombreux zéros de certaines fonctions L au point $\frac{1}{2}$, et due à Montgomery et Weinberger (1973) ; (l'inexistence de discriminants d vérifiant $h(d) = 2$ et $10^6 \leq |d| \leq 10^{12}$ est due à D. H. Lehmer et les d tels que $h(d) = 2$ et $|d| \leq 10^6$ sont connus depuis longtemps).

§. 4. - COMPLEMENTS

La détermination effective des corps quadratiques imaginaires ayant un nombre de classes h donné n'a encore été faite que pour $h = 1$ et $h = 2$. Cependant des travaux ont été entrepris dans le cas où chaque genre ne comporte qu'une classe, dans le but de déterminer tous les "numeri idonei" d'Euler (Baker et Schinzel, 1970). D'autre part, la solution de la conjecture de Goldstein (1970 b) mentionnée plus haut (§. 3) permettrait la classification effective des corps quadratiques imaginaires de nombre de classes une puissance de 2, quand il y a une classe par genre ; le cas particulier $h = 4$ a été étudié par Stark (1971 a). Le problème du nombre de classes 3 ne comporte, d'après Baker (1968), qu'un cas difficile : $d \equiv 5 \bmod 8$ (sinon, seuls $d = 23$ et $d = 31$ conviennent) ; grâce à Montgomery et Weinberger (1973), on connaît tous les d pour lesquels $h(d) = 3$ et $|d| < 10^{2500}$.

Pour terminer, mentionnons une généralisation du problème de nombres de classes, due à Sunley et Goldstein, qui remplacent le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels par un corps de nombres algébrique K, totalement réel. Sunley (1971) généralise le théorème de Tatuzawa en montrant que, pour tout entier $h > 0$, il existe une constante $c(K, h)$, effectivement calculable, telle que, si L est une extension quadratique totalement imaginaire de K, ayant pour nombre de classes h, son discriminant absolu d_L vérifie

$$|d_L| \leq c(K, h) ,$$

avec au plus une exception possible.

En étudiant les propriétés du corps exceptionnel (s'il existe), Goldstein (1971 a, 1971 b) effectue, dans le cas particulier où K est normal, la classification effective de toutes les extensions quadratiques totalement imaginaires de K, de nombre de classes 1 ; puis il résoud le problème du nombre de classes 2 quand K est un corps quadratique réel de nombre de classes 1, possédant une unité fondamentale de norme -1.

Enfin on mentionnera un problème de Stark (1972) : <u>résoudre le problème du nombre de classes</u> 2 <u>par la méthode de Heegner.</u>

-:-:-:-

REFERENCES

WEBER H. (1908). - Lehrbuch der Algebra, vol. 3, 2 aufl. Braunschweig : F. Vieweg 1908 ; Neudruck : New-York, Chelsea 1961.

HEILBRONN Hans (1934). - On the class number in imaginary quadratic fields. Quat. J. Math. 5 (1934) 150-160.

HEILBRONN Hans and LINFOOT E. H. (1934). - On the imaginary quadratic corpora of class-number one. Quat. J. Math. 5 (1934) 293-301.

SIEGEL Carl Ludwig (1934). - Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper. Acta Arith. 1 (1935) 83-86. Ges. Abh. I, 406-409.

GEL'FOND A.O. and LINNIK Y.V. (1948). - On Thue's method and the problem of effectiveness in quadratic fields (en russe). Dokl. Akad. Nauk. SSSR 61 (1948) 773-776.

HEEGNER Kurt (1951). - Diophantische Analysis und Modulfunctionen. Math. Z. 56 (1952) 227-253.

TATUZAWA Tikao (1951). - On a theorem of Siegel. Japan J. Math. 21 (1951) 163-178.

GEL'FOND A.O. (1952). - Transcendental and algebraic numbers. GITTL Moscou (1952). Trad. anglaise : Dover Publ. Inc. N.Y. (1960).

BOREVICH Z.I. et SHAFAREVICH I.R. (1964). - Theorie des nombres (Moscou, 1964) Trad. angl. Academic Press, 1966.

BAKER Alan (1966). - Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. Mathematika 13 (1966) 204-216.

STARK H.M. (1966 a). - A complete determination of the complex quadratic fields of class number one. Michigan Math. J. 14 (1967) 1-27.

STARK H.M. (1966 b). - There is no tenth complex quadratic field with class number one. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 57 (1967) 216-221.

STARK H.M. (1967). - On the problem of unique factorisation in complex quadratic fields. Proc. of Sympos. pure Math. XII (1969) 41-56.

POITOU Georges (1967). - Solution du problème du dixième discriminant (d'après Stark). Sém. Bourbaki, 20e année (1967/1968) n° 335, 8 pages.

SIEGEL Carl Ludwig (1968). Zum Beweise des Starkschen Satzes. Invent. Math. 5, (1968) 180-191.

DEURING Max (1968). - Imaginäre quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl Eins. Invent. Math. 5 (1968) 169-179.

STARK H.M. (1968 a). - On the "Gap" in a theorem of Heegner. Journal of Number Theory 1, (1969) 16-27.

STARK H.M. (1968 b). - A historical note on complex quadratic fields with class-number one. Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969) 254-255.

STARK H.M. (1968 c). - The role of modular functions in a class number problem. J. number theory 1 (1969) 252-260.

BAKER Alan (1968). - A remark on the class-number of quadratic fields. Bull. London Math. Soc. 1 (1969) 98-102.

BUNDSCHUH Peter und HOCK Alfred (1968). - Bestimmung aller imaginär-quadratischen Zahlkörper der Klassenzahl Eins mit Hilfe eines Satzes von Baker. Math. Z. 111 (1969) 191-204.

BAKER Alan (1969). - Effective methods in diophantine problems. Proc. Symposia Pure Math. (American Math. Soc.) vol. 20 (1971) 195-205.

STARK H. M. (1969 a). - Recent Advances in determining all complex quadratic fields of a given class-number. Proc. Symposia Pure Math. (American Math. Soc.) vol. 20 (1971) 401-414.

STARK H. M. (1969 b). - An explanation of some exotic continued fractions found by Brillhart. Computers in Number Theory (Atkin-Birch) Academic Press (1971) 21-35.

BAKER Alan and SCHINZEL Andrey (1970). - On the least integers represented by the genera of binary quadratic forms. Acta Arithmetica 18 (1971) 137-144.

GOLDSTEIN L. J. (1970 a). - A generalization of Stark's theorem. J. of Number Theory 3 (1971) 323-346.

WADA Hideo (1970). - A table of class-number of quadratic fields $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, $1 \leq m < 24000$. Sūri Kaiseki Kenkyūjo. Kòkyūroku, vol. 89 (1970) p. 90-114.

HILY Jacques (1970). - Théorème de Stark, cours de DEA, Université de Nancy I, U. E. R. de Sciences Mathématiques, 1969-70, 2 vol.

GOLDSTEIN L. J. (1970 b). - Imaginary quadratic fields of class number 2. J. number theory 4 (1972) 286-301.

CHUDAKOV N. G. (1970). - The effective methods in the theory of quadratic fields. Actes Congrès intern. Math. 1970, tome 1, p. 489.

STARK H. M. (1970 a). - Class number problems in quadratic fields. Actes Congrès intern. Math. 1970, tome 1, p. 511-518.

BAKER Alan (1970 a). - On the class number of imaginary quadratic fields. Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971) 678-684.

STARK H. M. (1970 b). - A transcendence theorem for class-number problems (I). I Annal of Math (2) 94 (1971) 153-173.

BAKER Alan (1970 b). - Imaginary quadratic fields with class number 2. Annals of Math. (2) 94 (1971) 139-152.

BAKER Alan and STARK H. M. (1971). - On a fundamental inequality in number theory. Annals of Math. 94 (1971) 190-199.

GOLDSTEIN L. J. (1971 a). - Relative imaginary quadratic fields of class number 1 or 2 . Transactions Amer. Math. Soc. 165 (1972) 353-364.

GOLDSTEIN L. J. (1971 b). - Relative imaginary quadratic fields of low class number. Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972) n° 1 p. 80-81.

SUNLEY J. E. (1971). - On the class number of totally imaginary quadratic extensions of totally real fields. Bull. Amer. Soc. 78 n° 1 (1972) 74-76.

STARK H. M. (1971 a). - A transcendence theorem for class number problems (II). Annal of Math. 96 (1972) 174-209.

STARK H. M. (1971 b). - Some recent transcendence results. Seminar on modern methods in Number Theory. Tokyo, 30 août-4 sept. 1971.

STARK H. M. (1972). - Class number of complex quadratic fields. Proc. Intern. Summer School, Antwerp. R. U. C. A. 17. 7/3-8, 1972. Lectures Notes 320 (1973) 153-174.

BAKER Alan (1972). - Effective methods in diophantine problems II. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 24 (Amer. Math. Soc.) 1973.

MONTGOMERY H. L. and WEINBERGER P. J. (1973). - Notes on small class numbers. Acta Arithmetica XXIV, 5 (1974) 529-542.

-:-:-:-

Université de Paris VI
Mathématiques - T. 45-46
2, place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05