SOUS-GROUPES ANALYTIQUES DE VARIETES DE GROUPE

par

Michel WALDSCHMIDT

-:-:-:-

Soient G une variété de groupe définie sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques, et $\varphi : \mathbb{C}^n \to G_{\mathbb{C}}$ un sous-groupe à n paramètres de G, de dimension algébrique d. Nous nous proposons de majorer le rang r (sur $\mathbb{Z}$) des sous-groupes Γ de $\mathbb{C}^n$, dont l'image par φ est contenue dans l'ensemble $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ des points algébriques de G.

En ce qui concerne les sous-groupes à 1 paramètre $(n = 1)$, S. Lang a démontré [2] que, pour $d \geq 2$, on a $r \leq 2$ dans le cas linéaire, et $r \leq 6$ dans le cas abélien. On peut démontrer plus généralement [3] que, dans le cas linéaire, on a $r.d \leq r+d$, et que dans le cas abélien, on a $r.d \leq r+2d$ (en particulier $d \geq 2 \Rightarrow r \leq 4$).

Pour les sous-groupes à plusieurs paramètres $(n \geq 2)$, E. Bombieri et S. Lang [1] ont démontré que, sous certaines hypothèses de répartition concernant Γ, quand $d \geq n+1$, on a $r \leq n^2+3n$ dans le cas linéaire, et $r \leq 2n^2+4n$ dans le cas abélien.

Nous montrerons que, sous les mêmes hypothèses, on a $r.d \leq n(r+d)$ dans le cas linéaire (donc $d \geq n+1 \Rightarrow r \leq n^2+n$), et $r.d \leq n(r+2d)$ dans le cas abélien (donc $d \geq n+1 \Rightarrow r \leq 2n^2+2n$).

Pour obtenir ces résultats, on utilise des coordonnées projectives . $\varphi = (\varphi_o, \dots, \varphi_\ell)$, avec $\varphi_o \neq 0$. Les fonctions φ_i sont entières dans $\mathbb{C}^n$, d'ordre inférieur ou égal à 1 dans le cas linéaire, à 2 dans le cas abélien, et la dimension algébrique de φ est égale au degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps $\mathbb{Q}(\varphi_1/\varphi_o, \dots, \varphi_\ell/\varphi_o)$. Comme les fonctions φ_i/φ_o, $(1 \leq i \leq \ell)$ prennent des valeurs dans un corps de nombres K aux points de Γ, on est amené à étudier le problème suivant :

Soient $f_1, \dots, f_d$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}^n$, d'ordre inférieur ou égal à $\rho_1, \dots, \rho_d$ respectivement, algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Soit Γ un sous-groupe de $\mathbb{C}^n$, de rang r (sur $\mathbb{Z}$), tel que $f_i(\Gamma) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ pour $1 \leq i \leq d$. Peut-on majorer r et d en fonction de $\rho_1, \dots, \rho_d$?

La difficulté essentielle pour obtenir une réponse dans le cas $n>1$ résidera dans l'extension du lemme de Schwarz aux fonctions de plusieurs variables. Cette extension fait l'objet du premier paragraphe ; nous obtiendrons ensuite au §. II. une réponse au problème précédent : sous des hypothèses convenables, on a

$$r.d \leq n(r+\rho_1+\dots+\rho_d) .$$

Puis au §. III. nous appliquerons ce résultat aux variétés de groupe.

§. I. - LEMME DE SCHWARZ

Le lemme classique de Schwarz peut s'énoncer sous la forme suivante :

LEMME A_1. - Soit f une fonction d'une variable complexe, holomorphe dans un voisinage ouvert d'un disque $|z| \leq R$ de $\mathbb{C}$, admettant un zéro à l'origine d'ordre $\geq s$. Alors :

$$|f(z)| \leq \left(\frac{|z|}{R}\right)^s . |f|_R \quad \text{pour} \quad |z| \leq R ,$$

où :

$$|f|_R = \sup_{|t|=R} |f(t)| .$$

Ce résultat se généralise très facilement aux fonctions de plusieurs variables complexes, à condition de définir l'ordre d'un zéro d'une fonction analytique. Une fonction f de n variables complexes, holomorphe au voisinage de 0, admet un zéro à l'origine d'ordre s si le développement de f au point 0 commence par un polynôme homogène de degré s.

Ainsi f possède un zéro à l'origine d'ordre $\geq s$ si et seulement si

$$\frac{\partial^{\sigma_1 + \ldots + \sigma_n}}{\partial_{z_1}^{\sigma_1} \ldots \partial_{z_n}^{\sigma_n}} f(0) = 0 \quad \text{pour} \quad \sigma_1 + \ldots + \sigma_n < s$$

(ces conditions sont au nombre de s si $n = 1$, et $\frac{n^s - 1}{n - 1}$ si $n > 1$).

LEMME A_n. - Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'une balle

$$B_R = \{ Z \in \mathbb{C}^n \ ; \ |Z| \leq R \}$$

de $\mathbb{C}^n$. Si f admet un zéro à l'origine d'ordre $\geq s$, alors :

$$|f(Z)| \leq \left(\frac{|Z|}{R}\right)^s . |f|_R \quad \text{pour} \quad |Z| \leq R .$$

(La norme $|Z|$ est la norme euclidienne :

$$|(z_1, \ldots, z_n)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 ;$$

mais on aurait pu aussi prendre la norme $\sup_{1 \leq i \leq n} (|z_i|)$, et remplacer la balle B_R par un polydisque de $\mathbb{C}^n$).

Le lemme A_n est une conséquence immédiate du lemme A_1, appliqué à la fonction d'une variable complexe $F(t) = f(t.Z)$.

Dans le cas d'une variable $(n = 1)$, on peut généraliser le lemme A_1 aux fonctions possédant de nombreux zéros, distincts ou confondus.

LEMME B_1. - Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage d'un disque $|z| \leq R$ de $\mathbb{C}$, et admettant au moins s zéros (comptés avec leur ordre de multiplicité) dans un disque $|z| \leq r$, avec $r \leq \frac{R}{3}$. Alors :

$$\operatorname{Log} |f|_r \leq \operatorname{Log} |f|_R - s. \operatorname{Log} \frac{R}{3.r} .$$

En effet, si $z_1, \ldots, z_s$ sont des zéros de f dans le disque $|z| \leq r$, la fonction

$$g(z) = f(z) . \prod_{i=1}^{s} (z-z_i)^{-1}$$

est holomorphe là où f est holomorphe ; donc

$$|g|_r \leq |g|_R .$$

Pour $|t| = r$, on majore $\prod_{i=1}^{s} |t-z_i|$ par $(2r)^s$, et, pour $|z| = R$, on minore $\prod_{i=1}^{s} |z-z_i|$ par $(R-r)^s$. Enfin, comme $R \geq 3r$, on obtient le résultat annoncé.

L'extension du lemme B_1 aux fonctions de plusieurs variables présente une difficulté évidente : les zéros d'une fonction de n variables $(n \geq 2)$ n'étant pas isolés, la connaissance de nombreux zéros n'est pas suffisante pour majorer la fonction. Néanmoins la connaissance des zéros de f dans B_r, c'est-à-dire de

$$W_r = \{ Z \in B_r , f(Z) = 0 \} ,$$

permet d'obtenir un résultat. Pour cela on considère l'aire $A(W_r)$ (définie par la mesure de Hansdorff dans l'espace euclidien de dimension $2n-2$, ou encore par

$$A(W_r) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_r} \Delta \log |f| \, d\mu ,$$

où Δ est le laplacien, et μ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^{2n}$; cf [1]), et on divise par la mesure de Lebesgue de la balle $|Z| \leq r$ dans l'espace réel de dimension $2n-2$:

$$\Theta_W(r) = \frac{A(W_r)}{\frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!} \cdot r^{2n-2}} .$$

Alors on peut étendre le lemme B_1 au cas $n > 1$, à condition de remplacer s par $\Theta_W(r)$; ce résultat est dû à Bombieri [1]. Pour utiliser cet énoncé, il faut pouvoir minorer $\Theta_W(r)$ quand on connait beaucoup de zéros bien répartis. On arrive ainsi au résultat suivant :

LEMME B_n. - <u>Soit</u> f <u>une fonction holomorphe dans une balle</u> B_R <u>de</u> $\mathbb{C}^n$, <u>admettant des zéros</u> $Z_1, \ldots, Z_s$ <u>(comptés avec leur ordre de multiplicité) dans une balle</u> B_r, <u>avec</u> $r < \frac{R}{7.n.r}$. <u>Soit</u> :

$$\delta = \{\frac{r}{2} \; ; \inf_{Z_i \neq Z_j} (|Z_i - Z_j|\} .$$

<u>Alors on a</u> :

$$\operatorname{Log} |f|_r \leq \operatorname{Log} |f|_R - c(n).\, s.\, (\frac{\delta}{r})^{2n-2}.\, \operatorname{Log} \frac{R}{7.n.r} ,$$

<u>où</u> $\quad c(n) = \frac{1}{7} \cdot (\frac{\pi}{4})^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!}$.

A quelques constantes près, ce lemme contient les lemmes B_1 (quand $n = 1$) et A_n (quand $Z_1 = \ldots = Z_s = 0$).

§. II. - VALEURS ALGÉBRIQUES DE FONCTIONS MEROMORPHES

Soient K un corps de nombres, Γ un sous-groupe de $\mathbb{C}^n$ de rang r sur $\mathbb{Z}$, engendré par $u_1, \ldots, u_r$, et f une fonction entière telle que $f(\Gamma) \subset K$. Si f est d'ordre $\leq \rho$, c'est-à-dire si

$$\operatorname{Log} |f|_R << R^{\rho} \quad \text{pour} \quad R \to +\infty ,$$

alors, pour

$$\Gamma_N = \{k_1 u_1 + \ldots + k_r u_r \ , \ k_i \in \mathbb{Z} \ , \ |k_i| \leq N\} \ ,$$

on a

$$\sup_{Z \in \Gamma_N} |f(Z)| \ll N^{\rho} \quad \text{pour} \quad N \to +\infty \ .$$

On dira que f est d'ordre arithmétique inférieur ou égal à ρ sur Γ si les conjugués de $f(Z)$ vérifient la même inégalité, ainsi que le dénominateur de $f(Z)$ (plus petit entier positif d tel que $d.\,f(Z)$ soit entier algébrique). Comme il peut être utile de travailler avec certains sous-ensembles S_N des Γ_N, on introduit les définitions suivantes :

Si α est un nombre algébrique, on note $|\overline{\alpha}|$ le maximum des valeurs absolues des conjugués de α, $d(\alpha)$ le dénominateur de α, et $t(\alpha)$ la <u>taille</u> de α, définie par

$$t(\alpha) = \max(\mathrm{Log}\, d(\alpha) \ , \ \mathrm{Log}\, |\overline{\alpha}|) \ .$$

Soit $(S_N)_{N \geq 1}$ une suite de sous-ensembles de $\mathbb{C}^n$, de réunion S, et soit f une fonction méromorphe dans un voisinage U de S. Soient g et h deux fonctions analytiques dans U, telles que $f = \frac{g}{h}$ dans U. Nous dirons que f est d'ordre arithmétique inférieur ou égal à ρ sur (S_N) s'il existe un corps de nombres K tel que, pour $Z \in S_N$, on ait $h(Z) \neq 0$, $f(Z) \in K$, $t(f(Z)) \ll N^{\rho}$ et $\mathrm{Log} \dfrac{1}{|h(Z)|} \ll N^{\rho}$.

THEOREME 1. - <u>Soient</u> r, λ, $\rho_1, \ldots, \rho_d$ <u>des nombres réels positifs,</u> $(S_N)_{N \geq 1}$ <u>une suite de sous-ensembles de</u> $\mathbb{C}^n$, $f_1, \ldots, f_d$ <u>des fonctions méromorphes dans</u> $\mathbb{C}^n$, <u>d'ordre</u> $\leq \rho_1, \ldots, \rho_d$ <u>et d'ordre arithmétique</u> $\leq \rho_1, \ldots, \rho_d$ <u>sur</u> (S_N). <u>On suppose</u>

$$(1) \qquad \max_{Z \in S_N} |Z| \ll N \ ; \ \mathrm{Card}\, S_N \gg N^r \ ; \ \min_{\substack{u \neq v \\ u, v \in S_N}} |u - v| \gg N^{-\lambda} \ .$$

<u>Si</u> $f_1, \ldots, f_d$ <u>sont algébriquement indépendantes sur</u> $\mathbb{Q}$, <u>alors</u>

$$(d-1)\, r \leq \rho_1 + \ldots + \rho_d + 2d(n-1)(\lambda + 1) \ .$$

Les relations (1) impliquent :

$$r \leq 2n + 2n\lambda \quad ,$$

car, dans une balle B_R, le nombre ν_R de points vérifiant $\min\limits_{u \neq v} |u-v| \gg R^{-\lambda}$ vérifie

$$\nu_R \ll R^{2n} . R^{2n\lambda} .$$

Remarquons que, pour $r \geq 2n$ et $\lambda = \frac{r}{2n} - 1$, la conclusion du théorème 1 s'écrit :

$$r\,d \leq n(r + \rho_1 + \ldots + \rho_d) .$$

§. III. - <u>SOUS-GROUPES A PLUSIEURS PARAMETRES DE VARIETES LINEAIRES OU ABELIENNES</u>

Le théorème 1 permet de majorer le nombre de points $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants où un sous-groupe à plusieurs paramètres prend des valeurs algébriques.

THEOREME 2. - <u>Soient</u> G <u>une variété de groupe définie sur</u> $\overline{\mathbb{Q}}$, $\varphi : \mathbb{C}^n \to G_{\mathbb{C}}$ <u>un sous-groupe à</u> n <u>paramètres de</u> G, $u_1, \ldots, u_r$ <u>des éléments</u> $\mathbb{Q}$<u>-linéairement indépendants de</u> $\mathbb{C}^n$, <u>tels que</u>

$$\varphi(u_j) \in G_{\overline{\mathbb{Q}}} \quad \underline{\text{pour}} \quad 1 \leq j \leq r .$$

<u>On suppose</u>

$$(2) \qquad \min_{\substack{Z \in \Gamma_N \\ Z \neq 0}} |Z| \gg N^{-\lambda} \quad \underline{\text{pour}} \quad N \to +\infty ,$$

<u>où</u>

$$\Gamma_N = \{k_1 u_1 + \ldots + k_r u_r \; ; \; k_j \in \mathbb{Z} \, , \, |k_j| \leq N\} .$$

<u>Alors</u>

1) <u>si</u> G <u>est une variété linéaire</u>, <u>on a</u> :

$$r(d-1) \leq d + 2d\,(n-1)(\lambda+1) \; ;$$

2) <u>si</u> G <u>est une variété abélienne, on a</u> :

$$r(d-1) \leq 2d\,(n\lambda + n - \lambda)\ .$$

La relation (2) n'est possible que pour

$$\lambda \geq \max\left(0, \frac{r}{2n} - 1\right)\ .$$

Inversement, si $r \geq 2n$, pour presque tout $(u_1, \ldots, u_r) \in (\mathbb{C}^n)^r$, la relation (2) est vérifiée dès que $\lambda > \frac{r}{2n} - 1$ (cf. [1]) ; dans ce cas la conclusion du théorème 2 devient :

$$r\,d \leq n(r+d) \qquad \text{dans le cas linéaire,}$$

et

$$r\,d \leq n(r+2d) \qquad \text{dans le cas abélien.}$$

En particulier :

COROLLAIRE. - <u>Soient</u> G <u>une variété de groupe, linéaire ou abélienne, définie sur le corps</u> $\overline{\mathbb{Q}}$ <u>des nombres algébriques,</u> $\varphi : \mathbb{C}^n \to G_{\mathbb{C}}$ <u>un sous-groupe à</u> n <u>paramètres, et</u> Γ <u>un sous-groupe de type fini de</u> $\mathbb{C}^n$, <u>de rang</u> r <u>sur</u> $\mathbb{Z}$, <u>tels que</u> $\varphi(\Gamma)$ <u>soit contenu dans le groupe</u> $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ <u>des points algébriques de</u> G .

<u>On suppose que, pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>l'inégalité</u> (2) <u>est vérifiée avec</u> $\lambda = \frac{r}{2n} - 1 + \varepsilon$. <u>Enfin on suppose que l'on a</u> $r > n^2 + n$ <u>dans le cas linéaire, et</u> $r > 2n^2 + 2n$ <u>dans le cas abélien. Alors</u> $\varphi(\mathbb{C}^n)$ <u>est un sous-groupe algébrique (fermé) de</u> $G_{\mathbb{C}}$, <u>de dimension algébrique</u> n .

Ces résultats peuvent être améliorés si on fait l'hypothèse supplémentaire que les sous-groupes considérés ont une dérivée à l'origine algébrique [2] .

Enfin on peut obtenir des énoncés analogues dans le cas p-adique ; le lemme de Schwarz correspondant est dû à J. P. Serre (cf. [2]).

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOMBIERI Enrico and LANG Serge. - Analytic subgroups of group varieties ; Invent. Math. 11, (1970), 1-14.

[2] LANG Serge. - Transcendental numbers and diophantine approximations ; Bull. Amer. Math. Soc., 77 (1971) 635-677.

[3] WALDSCHMIDT Michel. - Transcendance dans les variétés de groupe ; Sém. Delange-Pisot-Poitou, (Théorie des nombres), 14e année, 1972/73, exposé n° 23, 16 p.

-:-:-:-

Université de Paris VI
Mathématiques - Tour 45-46
11, quai Saint Bernard
75230 PARIS CEDEX 05