Zéros de fonctions entières et hypersurfaces algébriques.

WALDSCHMIDT, Michel

pp. 1 - 8

ZÉROS DE FONCTIONS ENTIÈRES ET HYPERSURFACES ALGÉBRIQUES

par

Michel WALDSCHMIDT

-:-:-:-

1. - Hypersurfaces algébriques

a) Introduction

Une hypersurface algébrique dans $\mathbb{C}^n$ est l'ensemble X_P des zéros d'un polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, et le degré de P est appelé degré de l'hypersurface.

Quand $n = 1$, une hypersurface dans $\mathbb{C}$ n'est rien d'autre qu'un sous ensemble fini de $\mathbb{C}$, et le degré de l'hypersurface est son nombre de points ; étant donné un sous ensemble fini S de $\mathbb{C}$ et un entier K, les polynômes qui s'annulent K fois sur S (c'est - à - dire avec toutes leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à $K - 1$) sont les multiples de

$$\prod_{\zeta \in S} (z - \zeta)^K ,$$

polynôme dont le degré est $K. \operatorname{Card.} S$. Plus généralement, on sait construire un polynôme prenant des valeurs données en des points donnés, et ayant un degré inférieur ou égal au nombre de points (comptés éventuellement avec leur multiplicité, si on impose aussi les valeurs de certaines dérivées).

Toutes ces trivialités concernant le cas $n = 1$ deviennent des problèmes difficiles, pour la plupart non résolus, quand $n \geq 2$. On sait que les zéros d'une fonction entière dans $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, ne sont jamais isolés, mais forment une variété analytique complexe de codimension 1. Evidemment tout sous-ensemble fini S de $\mathbb{C}^n$ est contenu dans une hypersurface algébrique : si on cherche à résoudre le système d'équations

$$\sum_{\lambda_1+\ldots+\lambda_n \leq \Delta} p(\lambda_1,\ldots,\lambda_n).\zeta_1^{\lambda_1}\ldots\zeta_n^{\lambda_n} = o \ , \ \underline{\zeta} = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \in S,$$

aux inconnues $p(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{C}$, il suffit que le nombre d'inconnues, c'est-à-dire

$$\text{Card } \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{N}^n \ ; \ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n \leq \Delta\} = \binom{\Delta + n}{n}$$

soit supérieur au nombre d'équations : Card S, pour qu'il existe une solution non triviale.

Mais on ne sait pas construire un polynôme minimal (au sens du degré) prenant des valeurs données aux points de S. Plus précisément, on sait que le plus petit degré de tels polynômes dépend de manière essentielle de propriétés géométriques de S. Nous allons contourner cette difficulté de la manière suivante : au lieu de faire varier l'ensemble S, nous ne ferons varier que l'ordre de dérivation. Autrement dit au lieu d'étudier comment varie en fonction de S le nombre

$$\omega_n(S) = \min \{\deg P \ ; \ P \in \mathbb{C}[\underline{z}], \ P \not\equiv o \ , \ P(\underline{\zeta}) = o \ \text{ pour tout } \underline{\zeta} \in S\},$$

qui est le plus petit degré des hypersurfaces algébriques passant par S, nous étudierons la variation, en fonction de l'entier $K \geq 1$, du nombre

$$\omega_n(S, K) = \min \{\deg P \ ; P \in \mathbb{C}[\underline{z}], P \not\equiv o, \ D^k P(\underline{\zeta}) = o \ \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^n, |k|$$
$$\text{et tout } \underline{\zeta} \in S\}$$

qui est le plus petit degré des hypersurfaces algébriques passant K fois par S.

Nous avons noté $\underline{z}$ pour $(z_1, \ldots, z_n)$, et D^k pour $\dfrac{\partial^{|k|}}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}$

quand $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$. D'autre part l'indice n de $\omega_n(S, K)$ rappelle que S est un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$.

b) <u>Propriétés élémentaires de</u> $\omega_n(S, K)$

Les deux relations

$$\omega_1(S, K) = K. \text{ Card } S \qquad \text{(quand } S \subset \mathbb{C}\text{)}$$

et

$$(1) \qquad \omega_n(S, K_1 + K_2) \leq \omega_n(S, K_1) + \omega_n(S, K_2)$$

sont banales. D'autre part nous avons démontré que si $\Delta \geq 1$ vérifie

$$\binom{\Delta + n}{n} > \text{Card } S,$$

alors $\omega_n(S) \leq \Delta$. Le même argument montre que si $\Delta \geq 1$ vérifie

$$(2) \qquad \binom{\Delta + n}{n} > \binom{K + n - 1}{n} . \text{ Card } S,$$

alors $\omega_n(S, K) \leq \Delta$.

Les propriétés (1) et (2) semblent être les seules relations générales vérifiées par $\omega_n(S, K)$. Autrement dit pour $n \geq 1$, $N \geq 1$ et $K \geq 1$ entiers, définissons $\Psi_n(N, K)$ par récurrence sur K de la manière suivante :

$$\Psi_n(N, 1) = \min \left\{ \Delta \in \mathbb{N}, \binom{\Delta + n}{n} > N \right\};$$

$$\Psi_n(N, K) = \min \left\{ \min \left\{ \Delta \in \mathbb{N}, \binom{\Delta + n}{n} > \binom{K + n - 1}{n} . N \right\} \min_{K_1 + K_2 = K} \left\{ \Psi(N, K_1) + \Psi(N, K_2) \right\} \right\}.$$

Alors évidemment pour tout sous ensemble fini S de $\mathbb{C}^n$, ayant N éléments, et pour tout entier $K \geq 1$,

$$\omega_n(S,K) \leq \Psi_n(N, K),$$

et il est vraisemblable que pour tout n, N, K, il existe un ensemble S qui réalise l'égalité.

c) Le cas particulier d'un produit cartésien

Soient $S_1, \ldots, S_n$ des sous-ensembles finis de $\mathbb{C}$, et soit $S = S_1 \times \ldots \times S_n \subset \mathbb{C}^n$ Alors

$$\omega_n(S,K) = K \min_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Card} S_j \,.$$

(La démonstration se fait sans difficulté par récurrence sur n, une fois que l'on remarqué que chaque polynôme

$$\prod_{\zeta_i \in S_i} (z_i - \zeta_i)^K \quad , \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

s'annule sur S à l'ordre K). Par conséquent, dans le cas particulier considéré,

$$\omega_n(S,K) = K.\,\omega_n(S).$$

Cette dernière relation n'est pas vraie en général : si S contient exactement trois points non alignés dans $\mathbb{C}^2$, alors $\omega_2(S,2) = 3$, (Si $S = \{0,0)\,;(0,1)\,;(1,$ considérer le polynôme $z_1 . z_2 . (z_1 + z_2 - 1))$, tandis que $\omega_2(S) = 2$.

d) Le cas particulier d'une lattice

Soit Λ une lattice dans $\mathbb{C}^n$. Il existe deux constantes $c_1(\Lambda)$ et $c_2(\Lambda)$ telles que, pour tout $R > o$, l'ensemble $\Lambda_R = \Lambda \cap R\,B$ (où B est la boule unité vérifie

$$c_1(\Lambda)\,K\,R^2 \leq \omega_n(\Lambda_R, K) \leq c_2(\Lambda)\,K\,R^2.$$

L'inégalité de droite provient du principe des tiroirs, et celle de gauche est une conséquence facile de résultats classiques sur la mesure (introduite par Lelong) associée au diviseur des zéros d'une fonction analytique dans $\mathbb{C}^n$ (cf. [3], appendice 2).

e) Le cas général

Le comportement de la suite $\left(\frac{\omega_n(S, K)}{K}\right)$, $K \geq 1$ est explicité dans le résultat suivant [4].

THÉORÈME 1.- *Soit* S *un sous-ensemble fini de* $\mathbb{C}^n$. *Alors*

1.- *La suite* $\frac{\omega_n(S, K)}{K}$ *a une limite* $\Omega_o = \Omega_o(n, S)$ *quand* K *tend vers l'infini* ;

2.- *On a* $\frac{\omega_n(S)}{n} - 2 \leq \Omega_o \leq \omega_n(S)$

3.- *Pour tout* $K \geq 1$, $\omega_n(S, K) \geq \Omega_o \cdot K$.

L'inégalité $\frac{\omega_n(S)}{n} - 2 \leq \Omega_o$ ne semble pas la meilleure possible. Les problèmes suivants sont encore ouverts :

- améliorer cette inégalité, et trouver le meilleur résultat possible ;
- déterminer les ensembles S pour lesquels $\omega_n(S) = \Omega_o$; il ne serait pas étonnant que cette classe soit très ~~étendue~~ ;
- est-il vrai que pour tout $\varepsilon > o$ l'ensemble des $S \subset \mathbb{C}^n$ pour lesquels $\Omega_o \leq \omega(S) - \varepsilon$ est fini ?
- le théorème 1 est il vrai pour d'autres corps que $\mathbb{C}$? (par exemple $\mathbb{R}$

La démonstration actuelle [4], en tout cas, utilise de manière essentielle des propriétés assez fines de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes (cf. [2]).

2.- Zéros de fonctions entières

En utilisant au choix le lemme de Schwarz, la formule de Jensen ou la formule de Hermite, on peut démontrer facilement le résultat suivant sur les fonctions analytiques d'une variable complexe.

Soient S un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$, K un nombre entier positif, et r, R deux nombres réels tels que $R > r > \max_{\zeta \in S} |\zeta|$. Soit f une fonction entière dans $\mathbb{C}$, admettant chaque point de S comme zéro d'ordre $\geq K$. Alors

$$\operatorname{Log} |f|_r \leq \operatorname{Log} |f|_R - K . \operatorname{Card} S . \operatorname{Log} \frac{R}{3r} .$$

La généralisation de ce résultat à $\mathbb{C}^n$ est la suivante [4].

THÉORÈME 2. - Soit S un sous ensemble fini de $\mathbb{C}^n$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe un nombre $r_0 = r_0(S, \varepsilon) > 0$ tel que si f est une fonction entière dans $\mathbb{C}^n$ admettant chaque point de S comme zéro d'ordre au moins K, pour $r_0 < r < R$, on a

$$(3) \qquad \operatorname{Log} |f|_r \leq \operatorname{Log} |f|_R - K (\Omega_0 - \varepsilon) \operatorname{Log} \frac{R}{2nr} ,$$

où Ω_0 est défini par le théorème 1.

L'hypothèse que f s'annule sur S avec un ordre au moins égal à K signifie

$$D^k f(\underline{\zeta}) = 0 \quad \text{pour} \quad \underline{\zeta} \in S \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{N}^n, \ |k| < K ;$$

d'autre part $|f|_r$ est la borne supérieure de f sur la boule euclidienne de centre $\underline{0}$ et de rayon r. L'inégalité (3) est la meilleure possible : on ne peut pas remplacer $\Omega_0 - \varepsilon$ par Ω_0. Autrement dit il arrive que $r_0(S, \varepsilon)$ tende vers l'infini quand ε tend vers 0.

3. - Une application

Cette étude était motivée à l'origine par des problèmes de transcendance. Dans le cas d'une variable, Daniel Bertrand [1] a démontré que si f est une fonction entière transcendante d'ordre 1, l'ensemble des nombres algébriques $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$, tels que $\frac{d^k}{dz^k} f(\zeta) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, est fini et a au plus 1 élément. Quand on veut généraliser ce résultat à $\mathbb{C}^n$, on remarque par exemple que l'ensemble des $(\zeta_1, \zeta_2) \in \overline{\mathbb{Q}} \times \overline{\mathbb{Q}}$ pour lesquels la fonction $\exp(z_2 - z_1)$ prend des valeurs dans $\mathbb{Z}$ avec toutes ses dérivées est contenu dans l'hypersurface algébrique

$$\{(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2 \; ; \; \zeta_1 = \zeta_2\}$$

Les théorèmes 1 et 2 permettent de démontrer [4] :

THÉORÈME 3.- Soit f une fonction entière transcendante dans $\mathbb{C}^n$, d'ordre 1. L'ensemble des $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ tels que

$$D^k f(\zeta) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^n$$

est contenu dans une hypersurface algébrique de degré inférieur ou égal à $3n$.

En fait on peut conjecturer que ce degré est majoré par 1, c'est-à-dire que l'ensemble considéré est contenu dans un hyperplan de $\mathbb{C}^n$.

Terminons par un problème qui aurait des conséquences intéressantes en théorie des nombres transcendants.

Soit f une fonction entière donc $\mathbb{C}^n$, et $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Soit N un entier positif tel que

$$f(h_1 + k\beta_1, \ldots, h_n + k\beta_n) = 0$$

pour tout $(h_1, \ldots, h_n, k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $1 \leq h_j \leq N^n$, $1 \leq k \leq N^n$. Enfin notons $r = N^n \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \{1 + |\beta_j|\}$, et soit $R > r$. Vérifier (ou infirmer) :

$$\mathrm{Log}\, |f|_r \leq \mathrm{Log}\, |f|_R - N^{n+1} \cdot \mathrm{Log}\, \frac{R}{3nr} .$$

-:-:-:-

RÉFÉRENCES

[1] Daniel BERTRAND, Equations différentielles algébriques et nombres transcendants dans les domaines complexes et p-adiques ; Thèse de 3e cycle, Université Paris VI, 1975.

[2] Enrico BOMBIERI, Algebraic values of meromorphic maps ; Inventiones Math., 10 (1970), 267-287.

[3] David W. MASSER, Elliptic functions and transcendence ; Lecture Notes in Math., 437 (1975), Springer Verlag.

[4] Michel WALDSCHMIDT, Propriétés arithmétiques de fonctions de plusieurs variables (II) ; Sém. P. Lelong (Analyse), 16 e année, 1975/76.

Michel WALDSCHMIDT
"Analyse Complexe et Géométrie"
(Lab. Associé C N R S, n° 213)
Université P. et M. Curie (Paris VI)
Mathématiques, T. 45-46
4, Place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05