Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux
Année 1987-1988 - Exposé n° 30 le 19 mai 1988

SUR LES METHODES DE SCHNEIDER, GEL'FOND ET BAKER

par

Michel WALDSCHMIDT

L'exposé donné le 19 Mai 1988 était intitulé "Approche transcendante pour la conjecture de Leopoldt". Les résultats récents de M. Laurent [2,3] y ont été présentés; ils contiennent tout ce que l'on sait faire actuellement, par voie transcendante, sur les conjectures de Leopoldt et de Jaulent. L'énoncé de transcendance utilisé est la version p-adique du théorème principal de [10] ; ce dernier intervient aussi dans les travaux de D.Roy [8] sur l'image, par le plongement canonique, du groupe multiplicatif d'un corps de nombres.

Nous développons ici une remarque de [10] (fin du §3). On connait maintenant trois démonstrations différentes du théorème de Baker sur l'indépendance linéaire de logarithmes de nombres algébriques. Chacune d'elles conduit à des énoncés effectifs : minorations de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques à coefficients algébriques. Deux des méthodes, auxquelles nous attribuons les noms de Schneider et de Gel'fond respectivement, donnent essentiellement les mêmes estimations. On peut les considérer comme *duales* l'une de l'autre (en un sens que nous précisons). La troisième, que nous appelons méthode de Baker, est un raffinement de celle de Gel'fond et donne des minorations plus fines. Il serait intéressant de raffiner de même la méthode de Schneider pour développer une méthode duale de celle de Baker.

1. Les trois méthodes.

Partons d'une égalité :

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n = \log \alpha_{n+1} \tag{1.1}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ sont des nombres algébriques non nuls, $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_{n+1}$ des déterminations complexes non nulles de leurs logarithmes, et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des nombres algébriques. Il s'agit de montrer que (1.1) implique

(1.2) $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_{n+1}$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$

et

(1.3) $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$.

Il est facile de voir, par récurrence sur n, que chacune des conclusions (1.2) et (1.3) implique l'autre.

a) *La méthode de Schneider.*

On construit, grâce au principe des tiroirs, un polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ (ou plus précisément une suite de polynômes, dépendant d'un paramètre), tel que la fonction

$$F(z_1, \ldots, z_n) = P(z_1, \ldots, z_n, \alpha_1^{z_1} \ldots \alpha_n^{z_n})$$

soit petite sur un polydisque $| z | \leq r$ de $\mathbb{C}^n$, où, pour $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose $| z | = \max | z_i |$. On déduit de l'inégalité de Liouville que cette fonction F s'annule en beaucoup de points de la forme

$$(h_1 + h_{n+1}\beta_1, \ldots, h_n + h_{n+1}\beta_n), \qquad (h_1, \ldots, h_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}.$$

On utilise enfin un lemme de zéros pour conclure que (1.3) est vérifié.

b) *La méthode de Gel'fond.*

On construit $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ non nul tel que la fonction

$$F(z_1, \ldots, z_n) = P\left(e^{z_1}, \ldots, e^{z_n}, e^{\beta_1 z_1 + \cdots + \beta_n z_n}\right)$$

soit petite dans le polydisque $| z | \leq r$. Alors F et certaines de ses dérivées s'annulent en des points

$$(s \log \alpha_1, \ldots, s \log \alpha_n), \qquad s \in \mathbb{Z}.$$

Un lemme de zéros avec multiplicités implique que la fonction F est identiquement nulle, ce qui donne (1.3).

c) *La méthode de Baker.*

On construit $P \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ tel que la fonction

$$F(z_1, \ldots, z_n) = P\left(e^{z_1}, \ldots, e^{z_n}, e^{\beta_1 z_1 + \cdots + \beta_n z_n}\right)$$

s'annule, avec ses premières dérivées, en des points de la forme

$$(s \log \alpha_1, \ldots, s \log \alpha_n), \qquad s \in \mathbf{Z}.$$

Si, disons,

$$\frac{\partial^{t_1}}{\partial z_1^{t_1}} \cdots \frac{\partial^{t_n}}{\partial z_n^{t_n}} F(s \log \alpha_1, \ldots, s \log \alpha_n) = 0 \qquad \text{pour } \mid t \mid \leq T,\ 0 \leq s < S,$$

avec $t = (t_1, \ldots, t_n)$, alors pour $\mid t \mid \leq T/2$, la fonction d'une variable

$$F_t(z) = \frac{\partial^{t_1}}{\partial z_1^{t_1}} \cdots \frac{\partial^{t_n}}{\partial z_n^{t_n}} F(z \log \alpha_1, \ldots, z \log \alpha_n)$$

admet S zéros d'ordre $\geq T/2$. Un lemme de Schwarz pour les fonctions d'une variable complexe permet de majorer $F_t(z)$ sur un disque, et d'utiliser l'inégalité de Liouville pour en déduire que F_t s'annule en $z = s$ pour $\mid t \mid \leq T/2$ et $0 \leq s < S_1$, avec $S_1 > S$. Un lemme de zéros permet encore de conclure.

Chacune des trois méthodes permet aussi de traiter les formes linéaires non homogènes : une relation

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n = \log \alpha_{n+1}$$

ne peut être satisfaite que si $\beta_0 = 0$. On trouvera des détails sur les deux premières méthodes dans [10] §3c, et sur la dernière dans [1] et [6] notamment.

2. Limites des méthodes.

On suppose maintenant que le nombre

$$\Lambda = \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n - \log \alpha_{n+1}$$

n'est pas nul, et on veut le minorer. On introduit des quantités $B, A_1, \ldots, A_{n+1}$ qui majorent les hauteurs des β_i et des α_j :

$$\begin{aligned} &\log B \geq h(\beta_i), \qquad 1 \leq i \leq n, \\ &\log A_j \geq \max\{h(\alpha_j), \mid \log \alpha_j \mid, 1\}, \qquad 1 \leq j \leq n+1. \end{aligned}$$

On suppose aussi

$$\log B \geq D \max\{\log A_1, \ldots, \log A_n\}$$

avec

$$D = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \beta_1, \ldots, \beta_n) : \mathbb{Q}]$$

On va expliquer comment chacune des méthodes de Schneider et de Gel'fond permet de démontrer

$$\mid \Lambda \mid > \exp\{-CD^{(n+1)^2} (\log B)^{n^2+n} \log A_1 \ldots \log A_{n+1}\}$$

alors que la méthode de Baker (cf. [1,6]) donne

$$\mid \Lambda \mid > \exp\{-CD^{n+3} \log B \log A_1 \ldots \log A_{n+1}\}$$

où C ne dépend que de n (pour comparer avec [1] et [6], noter qu'ici, Λ est une combinaison linéaire de $n+1$ logarithmes).

Suivant une idée introduite initialement par Shorey, on obtient un résultat plus précis quand les nombres $\mid \log \alpha_j \mid / \log A_j$ sont petits. Pour absorber ce raffinement, on introduit une quantité E vérifiant

$$e \leq E \leq \min\{B^D, \min_{1 \leq j \leq n+1} \{eD \log A_j / \mid \log \alpha_j \mid\}\}$$

Noter qu'on peut toujours choisir $E = eD$.

Nous allons supposer

$$0 < \mid \Lambda \mid < \exp\{-U\} \tag{2.1}$$

et expliquer pourquoi les méthodes de Schneider et de Gel'fond impliquent seulement

$$U \leq CD^{(n+1)^2} (\log B)^{n^2+n} \log A_1 \ldots \log A_{n+1} (\log E)^{-n^2-2n},$$

tandis que la méthode de Baker donne

$$U \leq CD^{n+3} \log B \log A_1 \ldots \log A_{n+1} \log(DE) (\log E)^{-n-2}.$$

Nous allons seulement montrer comment apparaissent ces estimations, et nous remplacerons les constantes ne dépendant que de n par la notation $\ll$.

On introduit des paramètres $L_0, L_1, M_1, \dots, M_{n+1}$, entiers assez grands dépendant de n, $A_1, \dots, A_{n+1}$, B, D, E et U.

a) *La méthode de Schneider.*

Pour qu'il existe un polynôme non nul P à coefficients entiers algébriques dans le corps de nombres $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, \beta_1, \dots, \beta_n)$, de degrés $\leq L_0$ en $X_1, \dots, X_n$, et de degré $\leq L_1$ en X_{n+1}, tel que la fonction

$$F(z_1, \dots, z_n) = P\left(z_1, \dots, z_n, \alpha_1^{z_1} \dots \alpha_n^{z_n}\right)$$

vérifie

$$\log |F|_r \ll -U, \qquad \text{avec} \qquad r = \max_{1 \leq i \leq n} (M_i + M_{n+1} |\beta_i|),$$

il suffit que l'on ait

$$L_0^n L_1 \gg (U / \log E)^n. \tag{2.2}$$

On obtient ce résultat en utilisant le théorème 3.1 de [9]. L'hypothèse (2.1) montre ensuite que, pour $0 \leq h_i < M_i$, $(1 \leq i \leq n+1)$, le nombre

$$\gamma = P\left(h_1 + h_{n+1}\beta_1, \dots, h_n + h_{n+1}\beta_n, \alpha_1^{h_1} \dots \alpha_{n+1}^{h_{n+1}}\right)$$

vérifie $\log |\gamma| \ll -U$. L'inégalité de Liouville va entraîner $\gamma = 0$, pourvu que l'on ait

$$L_0 \ll U / D \log B \qquad \text{et} \qquad M_i \ll U / D L_1 \log A_i, \quad 1 \leq i \leq n+1. \tag{2.3}$$

Compte tenu de (2.2), on déduit de (2.3) :

$$L_1 \gg (D \log B / \log E)^n.$$

On veut montrer que le système d'équations

$$P\left(h_1 + h_{n+1}\beta_1, \dots, h_n + h_{n+1}\beta_n, \alpha_1^{h_1} \dots \alpha_{n+1}^{h_{n+1}}\right) = 0, \qquad 0 \leq h_i < M_i, \quad (1 \leq i \leq n+1)$$

est impossible pour $P \neq 0$. Il est nécessaire, pour cela, que le nombre d'équations soit supérieur au nombre de coefficients de P :

$$M_1 \dots M_{n+1} \gg L_0^n L_1. \tag{2.4}$$

En considérant (2.2) et (2.3), on voit qu'une contradiction ne peut être obtenue avec (2.4) qu'à condition de supposer

$$U \gg D^{n+1} (D \log B / \log E)^{n(n+1)} \log A_1 \dots \log A_{n+1} (\log E)^{-n},$$

c'est-à-dire

$$U \gg D^{(n+1)^2}(\log B)^{n^2+n}\log A_1\dots\log A_{n+1}(\log E)^{-n^2-2n}. \tag{2.5}$$

Pour $n = 1$ on retrouve la minoration $D^4(\log B)^2\log A_1\log A_2(\log E)^{-3}$ pour des formes linéaires en deux logarithmes par la méthode de Schneider [4,5].

b) *La méthode de Gel'fond.*

On construit maintenant P de degrés $\leq M_i$ par rapport à X_i, $\quad (1 \leq i \leq n+1)$, tel que la fonction

$$F(z_1,\dots,z_n) = P\left(e^{z_1},\dots,e^{z_n},e^{\beta_1 z_1+\dots+\beta_n z_n}\right)$$

vérifie

$$\mid F \mid_r < e^{-U}$$

pour $r = 2S\max_{1\leq i\leq n} \mid \log\alpha_i \mid$. Le théorème 3.1 de [9] demande

$$M_1\dots M_{n+1} \gg (U/\log E)^n. \tag{2.6}$$

On introduit des dérivations $D_1,\dots,D_n$ sur $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_{n+1}]$ en posant

$$\begin{aligned} D_iX_j &= \delta_{ij}X_j \qquad &&\text{pour} \quad 1\leq i\leq n, \quad 1\leq j\leq n,\\ D_iX_{n+1} &= \beta_iX_{n+1} \qquad &&\text{pour} \quad 1\leq i\leq n, \end{aligned}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, de telle sorte que, pour $t_1,\dots,t_n$ entiers ≥ 0, on ait

$$\frac{\partial^{t_1}}{\partial z_1^{t_1}}\cdots\frac{\partial^{t_n}}{\partial z_n^{t_n}}P\left(e^{z_1},\dots,e^{z_n},e^{\beta_1 z_1+\dots+\beta_n z_n}\right) = \left(D_1^{t_1}\dots D_n^{t_n}P\right)\left(e^{z_1},\dots,e^{z_n},e^{\beta_1 z_1+\dots+\beta_n z_n}\right)$$

On a

$$\log \mid \left(D_1^{t_1}\dots D_n^{t_n}P\right)\left(\alpha_1^s,\dots,\alpha_{n+1}^s\right) - \frac{\partial^{t_1}}{\partial z_1^{t_1}}\cdots\frac{\partial^{t_n}}{\partial z_n^{t_n}}F(s\log\alpha_1,\dots,s\log\alpha_n) \mid \ll -U.$$

Les inégalités de Cauchy permettent de majorer

$$\mid \frac{\partial^{t_1}}{\partial z_1^{t_1}}\cdots\frac{\partial^{t_n}}{\partial z_n^{t_n}}F(s\log\alpha_1,\dots,s\log\alpha_n) \mid$$

en fonction de $\mid F \mid_r$. On déduit de l'inégalité de Liouville

$$\left(D_1^{t_1}\dots D_n^{t_n}P\right)\left(\alpha_1^s,\dots,\alpha_{n+1}^s\right) = 0$$

à condition que

$$DT\log B \ll U \qquad \text{et} \qquad DM_iS\log A_i \ll U. \tag{2.7}$$

Ainsi (2.7) impose

$$M_1 \ldots M_{n+1} \ll U^{n+1}/D^{n+1}S^{n+1} \log A_1 \ldots \log A_{n+1},$$

et (2.6) demande alors

$$U \gg D^{n+1}S^{n+1} \log A_1 \ldots \log A_{n+1} (\log E)^{-n}.$$

Pour pouvoir utiliser un lemme de zéros, il nous faut

$$T^n S \gg M_1 \ldots M_{n+1},$$

donc

$$S \gg (D \log B / \log E)^n,$$

et on retrouve (2.5).

c) *La méthode de Baker.*

Montrons d'abord comment obtenir une contradiction sous l'hypothèse

$$U \gg D^{n+3} (\log B)^2 \log A_1 \ldots \log A_{n+1} (\log E)^{-n-2}. \tag{2.8}$$

On construit P, de degré $\leq M_i$ en X_i, tel que, en reprenant les notations de la méthode de Gel'fond, on ait :

$$\left(D_1^{t_1} \ldots D_n^{t_n} P\right)\left(\alpha_1^s, \ldots, \alpha_{n+1}^s\right) = 0$$

pour $0 \leq t_i < T$, $\quad (1 \leq i \leq n)$, et $0 \leq s \leq S$. On utilise pour cela le lemme de Siegel, qui impose

$$M_1 \ldots M_{n+1} \gg T^n S.$$

Une formule d'extrapolation pour les fonctions d'une variable permet de majorer

$$\left| \frac{\partial^{t_1}}{\partial z_1^{t_1}} \cdots \frac{\partial^{t_n}}{\partial z_n^{t_n}} F \right|_r$$

pour $0 \leq t_i < T/2$ en prenant $TS \log E \gg\ll U$. De nouveau, l'inégalité de Liouville va montrer

$$\left(D_1^{t_1} \ldots D_n^{t_n} P\right)\left(\alpha_1^s, \ldots, \alpha_{n+1}^s\right) = 0$$

pour $0 \leq t_i < T/2$, $\quad (1 \leq i \leq n)$, et $0 \leq s \leq S'$, avec $S' > S$ et $S' \ll S$, à condition que

$$DT \log B \ll U, \qquad DM_i S' \log A_i \ll U, \quad (1 \leq i \leq n+1).$$

Le lemme de zéros nécessite $M_1 \ldots M_{n+1} \ll T^n S'$. On doit donc choisir

$$T \ll U/D \log B, \qquad M_i \ll U/DS \log A_i,$$

et

$$U \gg D^{n+1} S^2 \log A_1 \dots \log A_{n+1} (\log E)^{-n}. \tag{2.9}$$

Enfin la condition $S \gg D \log B / \log E$ conduit à (2.8). Pour $n = 1$, la condition (2.8) est la même que (2.5) (et la démonstration ne diffère pas de celle qu'on obtient par la méthode de Gel'fond).

Voici comment on améliore (2.8) en supposant seulement

$$U \gg D^{n+3} \log B \log A_1 \dots \log A_{n+1} \log(DE)(\log E)^{-n-2}. \tag{2.10}$$

Il s'agit de remplacer S^2 par $SD \log(DE)/\log E$ (avec toujours $S \gg D \log B / \log E$) dans (2.9). Pour cela on introduit une variable supplémentaire z_0 : on construit un polynôme $P \in K[X_0, \dots, X_{n+1}]$, en $n+2$ variables, de degré $\leq M_i$ en X_i, $\quad (0 \leq i \leq n+1)$, et on considère la fonction

$$F(z_0, z_1, ..., z_n) = P\left(z_0, e^{z_1}, \dots, e^{z_n}, e^{\beta_1 z_1 + \dots + \beta_n z_n}\right)$$

de n variables. Les conditions du lemme de Siegel deviennent

$$M_0 M_1 \dots M_{n+1} \gg T^{n+1} S,$$

et celles de l'inégalité de Liouville s'écrivent

$$TS \log E \gg\ll U, \qquad DT \log B \ll U, \qquad DM_i S \log A_i \ll U, \quad (1 \leq i \leq n+1)$$

et aussi

$$DM_0 \log(DE) \ll U.$$

Le lemme de zéros demande

$$M_0 M_1 \dots M_{n+1} \ll T^{n+1} S,$$

d'où la contrainte

$$U \gg D^{n+2} S \log A_1 \dots \log A_{n+1} \log(DE)(\log E)^{-n-1},$$

avec $S \gg\ll D \log B / \log E$.

L'estimation $DM_0 \log(DE) \ll U$ est obtenue à l'aide des polynômes de Fel'dman : si on utilisait la base usuelle $1, z, \dots, z^{M_0 - 1}$ de l'espace des polynômes de degré $< M_0$, il faudrait remplacer $\log(DE)$ par $\log(DE \log B)$.

3. Formes linéaires simultanées.

Ramachandra, puis Loxton ont montré que la méthode de Baker donnait de meilleures estimations lorsque l'on considère plusieurs formes linéaires indépendantes. Supposons

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} \log \alpha_i - \log \gamma_j \right| < e^{-U} \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq t,$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_t$ nombres algébriques multiplicativement indépendants. Le cas $t = 1$ a été étudié ci-dessus. On prend encore $A_{n+1}, \ldots, A_{n+t}$ vérifiant

$$\log A_{n+j} \geq \max\{|\log \gamma_j|, h(\gamma_j), e\}, \quad 1 \leq j \leq t.$$

a) *La méthode de Schneider.*

On reprend le même polynôme $P \in K[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ que précédemment dans la méthode de Schneider, mais on obtient maintenant

$$P\left(h_1 + \sum_{j=1}^{t} k_j \beta_{1j}, \ldots, h_n + \sum_{j=1}^{t} k_j \beta_{nj}, \alpha_1^{h_1} \ldots \alpha_n^{h_n} \gamma_1^{k_1} \ldots \gamma_t^{k_t}\right) = 0.$$

Seule la contrainte du lemme de zéros est modifiée : il suffit maintenant de

$$L_0^n L_1 \ll M_1 \ldots M_n M_{n+1} \ldots M_{n+t}.$$

On trouve

$$U \gg L_1^{\frac{n}{t}+1} D^{\frac{n}{t}+1} (\log A_1 \ldots \log A_{n+t})^{\frac{1}{t}} (\log E)^{-\frac{n}{t}}$$

avec $L_1 \gg (D \log B / \log E)^n$, donc

$$U \gg D^{(n+1)(\frac{n}{t}+1)} (\log B)^{n(\frac{n}{t}+1)} (\log A_1 \ldots \log A_{n+t})^{\frac{1}{t}} (\log E)^{-n(1+\frac{n+1}{t})} \tag{3.1}$$

Il faut encore vérifier que les paramètres M_i, $\quad (1 \leq i \leq n+1)$ ne sont pas trop petits (on prend des parties entières); ceci donne la condition

$$U \gg \max_{1 \leq i \leq n+t} D^{n+1} (\log B)^n \log A_i (\log E)^{-n}. \tag{3.2}$$

b) *La méthode de Gel'fond.*

On considère une fonction auxiliaire de la forme

$$P\left(e^{z_1}, \ldots, e^{z_n}, e^{\sum_{i=1}^{n} \beta_{i1} z_i}, \ldots, e^{\sum_{i=1}^{n} \beta_{it} z_i}\right).$$

La construction de P nécessite seulement

$$M_1 \dots M_{n+t} \ll (U/\log E)^n,$$

et le lemme de zéros demande

$$T^n S \gg M_1 \dots M_{n+t}$$

pour obtenir une contradiction. Les autres contraintes sont les mêmes qu'au §3b, donc il faut supposer

$$U \gg D^{\frac{n}{t}+1} S^{\frac{n}{t}+1} (\log A_1 \dots \log A_{n+t})^{\frac{1}{t}} (\log E)^{-\frac{n}{t}}$$

avec encore $S \gg (D \log B/\log E)^n$, et on retrouve la condition (3.1). On doit aussi supposer (3.2) pour assurer $M_i \gg 1, \quad (1 \leq i \leq n+t)$.

c) *La méthode de Baker.*

On reprend la méthode du §2c, mais avec

$$M_0 \dots M_{n+t} \gg\ll T^{n+1} S.$$

On trouve comme contrainte

$$U \gg D^{1+\frac{n+1}{t}} S (\log A_1 \dots \log A_{n+t})^{\frac{1}{t}} (\log(DE))^{\frac{1}{t}} (\log E)^{-\frac{n+1}{t}}$$

avec $S \gg D \log B/\log E$, donc

$$U \gg D^{2+\frac{n+1}{t}} \log B (\log A_1 \dots \log A_{n+t})^{\frac{1}{t}} (\log(DE))^{\frac{1}{t}} (\log E)^{-1-\frac{n+1}{t}}$$

La condition $M_i \gg 1 \quad (1 \leq i \leq t)$ s'écrit

$$U \gg \max_{1 \leq i \leq n+t} D^2 \log B \log A_i (\log E)^{-1}.$$

Le résultat précis que l'on obtient est le cas particulier du théorème 1.9 de [7] correspondant à $d = n+t$ et $d_2 = 0$.

4. Quelques remarques.

a) Nous avons dit que les méthodes de Schneider et de Gel'fond étaient duales l'une de l'autre. Voici en quel sens. Dans la méthode de Schneider (§2a), les équations auxquelles on aboutit avant d'utiliser le lemme de zéros s'écrivent

$$\sum_{(\lambda)} p_\lambda \prod_{i=1}^{n} (h_i + h_{n+1}\beta_i)^{\lambda_i} \prod_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{\lambda_{n+1} h_i} = 0, \tag{3.1}$$

avec $0 \le h_i < M_i$, $(1 \le i \le n+1)$, quand on écrit

$$P(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \sum_{(\lambda)} p_\lambda \prod_{i=1}^{n+1} X_i^{\lambda_i}.$$

Dans la méthode de Gel'fond, (c.f. §2b), si on écrit

$$P(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \sum_{h} q_h \prod_{i=1}^{n+1} X_i^{h_i},$$

les équations auxquelles on arrive sont

$$\sum_{h} q_h \prod_{i=1}^{n} (h_i + h_{n+1}\beta_i)^{t_i} \prod_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{s h_i} = 0, \tag{3.2}$$

avec $0 \le t_i < T$, $(1 \le i \le n)$, et $0 \le s \le S$. Ainsi la matrice du système (3.2) est essentiellement la transposée de celle du système (3.2). Cela explique que les estimations soient les mêmes.

Actuellement, c'est la méthode de Baker qui donne les meilleures estimations. Cependant les constantes absolues y sont encore assez grandes (voir [1], ainsi que [11] pour le cas p-adique), tandis que la méthode de Schneider donne des constantes beaucoup plus raisonnables (cf. [4], et surtout [5]).

Dans le cas particulier $n = 1$, on peut modifier le début de la construction de la fonction auxiliaire en appliquant le lemme de Siegel pour résoudre des équations. On peut ensuite utiliser des formules d'interpolation car les fonctions ne dépendent que d'une variable. Ces formules analytiques sont actuellement plus précises quand les dérivées n'interviennent pas. Cela explique que la méthode de Schneider donne de meilleures constantes absolues que les deux autres pour les formes linéaires en deux logarithmes.

b) La méthode de Baker est en quelque sorte un raffinement de celle de Gel'fond. On voudrait raffiner de la même manière la méthode de Schneider, afin de remplacer la condition (2.2) par $L_0 L_1 \gg (U/\log E)^n$. On pourrait être encore plus optimiste et espérer remplacer la condition sur U par

$$U \gg D \max\{\log B, \log A_1, \ldots, \log A_n\}.$$

Pour cela il "suffirait" de travailler avec une fonction

$$P\,(z_0, z_1, \ldots, z_n, \alpha_1^{z_1} \ldots \alpha_n^{z_n})\,,$$

aux points $(h_0, h_1 + h_{n+1}\beta_1, \ldots, h_n + h_{n+1}\beta_n)$, où le polynôme P a des degrés disons $\leq L_{-1}, L_0, \ldots, L_0, L_1$ respectivement, et de remplacer les contraintes actuelles

$$L_{-1}L_0^n L_1 \gg\ll (U/\log E)^{n+1} \gg\ll M_0 \ldots M_{n+1}$$

par

$$L_{-1}L_0^n L_1 \gg\ll U/\log E \gg\ll M_0 \ldots M_{n+1}$$

sans modifier les conditions

$$L_0 D \log B \ll U \qquad \text{et} \qquad DL_1 M_i \log A_i \ll U, \quad (1 \leq i \leq n+1)$$

et

$$DL_{-1} \ll U, \qquad DM_0 \ll U.$$

Il ne s'agit là bien sûr que de spéculation.

c) Nous avons seulement expliqué les limites des méthodes. Nous n'avons pas montré que ces limites peuvent être effectivement atteintes. Pour la méthode de Baker, les détails sont exposés par exemple dans [6]. Pour les deux autres, les détails ne sont pas encore écrits, mais il "suffit" de combiner les démonstrations de [6] et [10].

Références.

[1] J. BLASS, A.M.W. GLASS, D.K. MANSKI, D.B. MERONK, and R.P. STEINER.– Constants for lower bounds for linear forms in the logarithms of algebraic numbers, I, II ; Acta Arithmetica, to appear

[2] M. LAURENT.– Rang p-adique d'unités et action de groupes ; à paraître.

[3] M. LAURENT.– Exposé au Séminaire de Théorie des Nombres de Paris, 7 Mars 1988, Birkhäuser Verlag, Ser. Progress in Math., à paraître.

[4] M. MIGNOTTE and M. WALDSCHMIDT.– Linear forms in two logarithms and Schneider's method ; Math. Ann. **231** (1978), 231–267.

[5] M. MIGNOTTE and M. WALDSCHMIDT.– Linear forms in two logarithms and Schneider's method ; Acta Arith., to appear.

[6] P. PHILIPPON and M. WALDSCHMIDT.– Lower bounds for linear forms in logarithms ; in : *New Advances in Transcendence Theory,* Proc. Durham Conf., July 1986 (ed. A. Baker), Cambridge Univ. Press, London Math. Soc. Lecture Notes, to appear.

[7] P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT.– Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques commutatifs ; Séminaire de Théorie des Nombres de Paris, Janvier 1987 ; Birkhäuser Verlag, Ser. Progress in Math., à paraître.

[8] D. ROY.– Exposé au Séminaire de Théorie des Nombres de Paris, 13 Juin 1988, Birkhäuser Verlag, Ser. Progress in Math., à paraître.

[9] M. WALDSCHMIDT.– Transcendance et exponentielles en plusieurs variables ; Invent. Math. **63** (1981), 97-127.

[10] M. WALDSCHMIDT.– On the transcendence methods of Gel'fond and Schneider in several variables ; in : *New Advances in Transcendence Theory,* Proc. Durham Conf., July 1986 (ed. A. Baker), Cambridge Univ. Press, London Math. Soc. Lecture Notes, to appear.

[11] YU KUN RUI.– Linear forms in the p-adic logarithms ; Acta Arith., to appear.

(Texte reçu le 30 juillet 1988)

Michel WALDSCHMIDT
Institut Henri Poincaré
11, rue P. et M. Curie
75231 PARIS CEDEX 05
FRANCE