Université P. et M. Curie (Paris VI)
Michel Waldschmidt

Maîtrise de Mathématiques 2000/2001

Théorie des Groupes

Contrôle du lundi 25 Mars 2002 - durée: 3 heures

Les documents ne sont pas autorisés

Les exercices sont indépendants

$\boxed{1}$ Soient p un nombre premier. On pose

$$G = \{e^{2i\pi m/p^a} \ ; \ m \in \mathbb{Z}, \ a \in \mathbb{Z}, \ a \geq 0\}.$$

a) Montrer que G est le sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$ formé des éléments dont l'ordre est une puissance de p.
b) Soit a un entier ≥ 0. Quel est l'ensemble des éléments de G d'ordre p^a?
c) Soit $x \in G$. Déterminer le sous-groupe de G engendré par x. En déduire que tout sous-groupe de G autre que G est fini et cyclique.

$\boxed{2}$ Soient p un nombre premier, G un p-groupe fini, X un ensemble fini sur lequel G opère, et

$$X^G = \{x \in X \ ; \ gx = x \text{ pour tout } g \in G\}$$

l'ensemble des éléments de X fixés par G. Montrer que $\mathrm{Card}X$ est congru à $\mathrm{Card}X^G$ modulo p.

$\boxed{3}$ Soient G un groupe fini, H un sous-groupe normal de G et P un sous-groupe de Sylow de H. On note $N_G(P)$ le normalisateur de P dans G:

$$N_G(P) = \{x \in G \ ; \ xP = Px\}.$$

Vérifier

$$G = HN_G(P).$$

$\boxed{4}$

a) Montrer que tout groupe fini d'ordre 15 est cyclique.
b) Soit G un groupe d'ordre 42. Montrer que G possède un unique sous-groupe d'ordre 7, et que ce sous-groupe est normal. Montrer que G possède un unique sous-groupe d'ordre 21, et que ce sous-groupe est normal.

$\boxed{5}$ Soient G un groupe, N un sous-groupe normal. Montrer que G est résoluble si et seulement si N et G/N sont résolubles.

Donner un exemple d'un groupe G qui n'est pas nilpotent, et qui possède un sous-groupe normal N tel que N et G/N soient nilpotents.

$\boxed{6}$ Pour chacun des deux groupes non abéliens G d'ordre 8, dire quelle est la suite centrale descendante

$$G = C^1(G) \supset C^2(G) \supset \cdots \supset C^n(G) \supset C^{n+1}(G) = \{e\}$$

et la suite dérivée

$$G = D^0(G) \supset D^1(G) \supset \cdots \supset D^{n-1}(G) \supset D^n(G) = \{e\}$$

On rappelle:

$$C^{k+1}(G) = [G, C^k(G)] \quad \text{et} \quad D^{k+1}(G) = [D^k(G), D^k(G)].$$

$\boxed{7}$ Soient p et q deux nombres premiers. Combien y a-t-il, à isomorphisme près, de groupes abéliens d'ordre p^3q? Pour chacun d'eux, dire combien il admet de sous-groupes.

$\boxed{8}$

a) Montrer que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est produit semi-direct $\mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ du groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ par le groupe cyclique d'ordre 2.
b) Quels sont les produits semi-directs $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?
c) Quels sont les produits semi-directs $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

$\boxed{9}$ Soient p un nombre premier, G un groupe fini, H un sous-groupe normal de G et Q un p-sous-groupe de Sylow de G/H.
a) Montrer qu'il existe un p-sous-groupe de Sylow P de G dont l'image $(PH)/H$ dans G/H est Q.
b) On suppose que H est un p-groupe. Montrer que P est unique.

$\boxed{10}$ Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
a) Soit ϕ un automorphisme du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. On suppose que ϕ transforme toute transposition en une transposition. Montrer que ϕ est un automorphisme intérieur.
b) Soit τ un élément de $\mathfrak{S}_n$; on peut écrire τ comme produit de k transpositions à supports disjoints. Montrer que le centralisateur

$$C(\tau) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ ; \ \sigma\tau = \tau\sigma\}$$

de τ dans $\mathfrak{S}_n$ contient un sous-groupe normal d'ordre 2^k.