Périodes, selon Kontsevich et Zagier : questions de transcendance

Michel Waldschmidt

http://www.math.jussieu.fr/∼miw/

Résumé

Dans un article publié en 2001 intitulé *Periods*, Kontsevich et Zagier définissent une *période* comme un nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire sont des valeurs d'intégrales absolument convergentes de fonctions rationnelles avec des coefficients rationnels, sur des domaines de $\mathbf{R}^n$ définis par des égalités ou des inégalités polynomiales ayant des coefficients rationnels. Il est facile de voir que tout nombre algébrique est une période. Paradoxalement, ils conseillent, pour démontrer la transcendance d'un nombre, de commencer par prouver que ce nombre est une période. Nous ferons le point sur cette question : *quelles sont les périodes dont on sait démontrer la transcendance ?*

Périodes : Maxime Kontsevich et Don Zagier

Une *période* est un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont les valeurs d'intégrales absolument convergentes de fractions rationnelles à coefficients rationnels sur des domaines de $\mathbf{R}^n$ définis par des (in)égalités polynomiales à coefficients rationnels.

Periods, *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, Springer 2001, 771–808.

Le nombre π

Prototype d'une *période* :

$$e^{z+2i\pi} = e^z$$

$$2i\pi = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z}.$$

La fonction exponentielle

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z, \qquad e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C}^\times \\ & z & \longmapsto & e^z \end{array}$$

$$\ker \exp = 2i\pi\mathbf{Z}.$$

$z \mapsto e^z$ est l'application exponentielle du groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$.
L'application exponentielle du groupe additif $\mathbf{G}_a$ est

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & z \end{array}$$

Elle n'a que la période 0.

Courbes elliptiques

$$E = \left\{(t : x : y) \; ; \; y^2 t = 4x^3 - g_2 x t^2 - g_3 t^3\right\} \subset \mathbf{P}_2.$$

Fonctions elliptiques

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

$$\wp(z_1 + z_2) = R\big(\wp(z_1), \wp(z_2)\big)$$

$$\begin{array}{cccc} \exp_E : & \mathbf{C} & \to & E(\mathbf{C}) \\ & z & \mapsto & \big(1, \wp(z), \wp'(z)\big) \end{array}$$

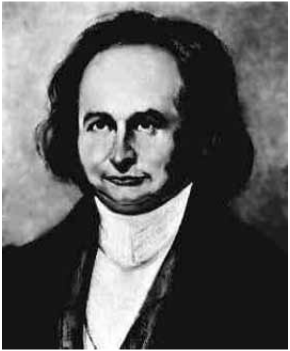
$$\ker \exp_E = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2.$$

Modèles de Weierstraß et de Jacobi

Weierstraß :

Fonction $\wp$

Jacobi :



Fonctions sn et cn

Périodes d'une fonction elliptique

Les périodes d'une fonction elliptique forment un *réseau* :

$$\Omega = \{\omega \in \mathbf{C} \; ; \; \wp(z+\omega) = \wp(z)\} = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2.$$

Un couple de périodes fondamentales (ω_1, ω_2) est donné par

$$\omega_i = \int_{e_i}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}, \qquad (i = 1, 2)$$

où

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 4(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3).$$

Exemples

Exemple 1 : $g_2 = 4$, $g_3 = 0$, $j = 1728$

Un couple de périodes fondamentales de la courbe elliptique

$$y^2 t = 4x^3 - 4xt^2.$$

est donné par

$$\omega_1 = \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3 - t}} = \frac{1}{2} B(1/4, 1/2) = \frac{\Gamma(1/4)^2}{2^{3/2}\pi^{1/2}} = 2.6220575542\ldots$$

et

$$\omega_2 = i\omega_1.$$

Exemples (suite)

Exemple 2 : $g_2 = 0$, $g_3 = 4$, $j = 0$

Un couple de périodes fondamentales de la courbe elliptique

$$y^2 t = 4x^3 - 4t^3.$$

est

$$\omega_1 = \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{1}{3} B(1/6, 1/2) = \frac{\Gamma(1/3)^3}{2^{4/3}\pi} = 2.428650648\dots$$

et

$$\omega_2 = \varrho\omega_1$$

où $\varrho = e^{2i\pi/3}$.

Fonctions Gamma et Beta d'Euler

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^\infty e^{-t} t^z \cdot \frac{dt}{t} \\ &= e^{-\gamma z} z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B(a,b) &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \\ &= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx.\end{aligned}$$

Formule de Chowla et Selberg

$$\sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} (m+ni)^{-4} = \frac{\Gamma(1/4)^8}{2^6\cdot 3\cdot 5\cdot \pi^2}$$

et

$$\sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} (m+n\varrho)^{-6} = \frac{\Gamma(1/3)^{18}}{2^8\pi^6}$$

Formule de Chowla et Selberg (1966) : *les périodes de courbes elliptiques avec multiplications complexes sont des produits de valeurs de la fonction Gamma.*

Intégrales elliptiques et ellipses

Longueur de l'arc d'une ellipse :

$$2\int_{-b}^{b}\sqrt{1+\frac{a^2x^2}{b^4-b^2x^2}}\,dx$$

Périmètre d'une lemniscate

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$$

Hypergéométrie et intégrales elliptiques

Série hypergéométrique de Gauss

$$ {}_2F_1\left(a,\ b\ ;\ c \;\middle|\; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{z^n}{n!} $$

où (Pochhammer : rising factorial power)

$$ (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}. $$

$$ \begin{aligned} K(z) &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-z^2x^2)}} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot {}_2F_1\left(1/2,\ 1/2\ ;\ 1 \;\middle|\; z^2\right). \end{aligned} $$

Intégrales elliptiques de seconde espèce

Quasi–périodes de fonctions elliptiques

Soit $\Omega = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ un réseau dans $\mathbf{C}$. Le *produit canonique de Weierstraß* associé à Ω est la fonction σ_Ω définie par

$$\sigma_\Omega(z) = z \prod_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right)$$

Elle a un zéro simple à chaque point de Ω.

Produits canoniques

Pour $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$:

$$\frac{e^{-\gamma z}}{\Gamma(-z)} = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

Pour $\mathbf{Z}$:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Formule de Wallis pour π

John Wallis (Arithmetica Infinitorum 1655)

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n\geq 1}\left(\frac{4n^2}{4n^2-1}\right)$$
$$= \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}.$$

Fonction sigma de Weierstraß

Pour $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}i$:

$$\sigma_{\mathbf{Z}[i]}(z) = z \prod_{\omega \in \mathbf{Z}[i] \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right) \cdot$$

$$\sigma_{\mathbf{Z}[i]}(1/2) = 2^{5/4} \pi^{1/2} e^{\pi/8} \Gamma(1/4)^{-2}$$

Fonction zêta de Weierstraß

La dérivée logarithmique de la fonction sigma de Weierstraß est la *fonction zêta de Weierstraß*

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \zeta$$

et la dérivée de ζ est $-\wp$. Le signe $-$ est choisi pour avoir la normalisation

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \text{une fonction analytique en } 0.$$

La fonction ζ est donc *quasi–périodique* : pour tout $\omega \in \Omega$ il existe $\eta = \eta(\omega)$ tel que

$$\zeta(z+\omega) = \zeta(z) + \eta.$$

Intégrales elliptiques de troisième espèce

Quasi–périodicité de la fonction sigma de Weierstraß

$$\sigma(z+\omega_i) = -\sigma(z)e^{\eta_i(z+\omega_i/2)} \quad (i=1,2).$$

Conséquence (J-P.Serre, 1979) : la fonction

$$F_u(z) = \frac{\sigma(z+u)}{\sigma(z)\sigma(u)} e^{-z\zeta(u)}$$

vérifie

$$F_u(z+\omega_i) = F_u(z)e^{\eta_i u - \omega_i \zeta(u)}.$$

Relation de Legendre

Les nombres $\eta(\omega)$ sont les *quasi–périodes* de la courbe elliptique.

Quand (ω_1, ω_2) est un couple de périodes fondamentales, on pose $\eta_1 = \eta(\omega_1)$ et $\eta_2 = \eta(\omega_2)$.

Relation de Legendre :

$$\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = 2i\pi.$$

Exemples

Pour la courbe $y^2t = 4x^3 - 4xt^2$ les quasi–périodes associées au couple fondamental de périodes précédent sont

$$\eta_1 = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2}, \qquad \eta_2 = -i\eta_1$$

tandis que pour la courbe $y^2t = 4x^3 - 4t^3$ elles sont

$$\eta_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\omega_1} = \frac{2^{7/3}\pi^2}{3^{1/2}\Gamma(1/3)^3}, \qquad \eta_2 = \varrho^2\eta_1.$$

Dimension supérieure : Variétés abéliennes

Variétés abéliennes, intégrales abéliennes, fonction thêta.
Jacobiennes de courbes algébriques,
Périodes des Jacobiennes des courbes de Fermat : valeurs de la fonction Beta d'Euler.
La courbe de Fermat $x^n + y^n = z^n$ a pour genre
$(n-1)(n-2)/2$
Pour $n = 1$ et $n = 2$ le genre est 0.

La courbe de Fermat $x^n + y^n = z^n$

Pour $n = 3$ le genre est 1 — courbe elliptique ayant multiplication complexe par les racines cubiques de l'unité : $\Gamma(1/3)$.
Pour $n = 4$ le genre est 3 —produit de trois courbes elliptiques ayant des multiplcations complexes par les racines quatrièmes de l'unité $\mathbf{Q}(i)$: $\Gamma(1/4)$.
Pour $n = 5$ le genre est 6 —produit de trois surfaces abéliennes simples de type CM ayant pour corps d'endomorphismes le corps des racines cinquièmes de l'unité : $\Gamma(1/5)$.

Dimension supérieure : groupes algébriques commutatifs

Extensions de variétés abéliennes par le groupe additif (intégrales de seconde espèce) et par le groupe multiplicatif (troisième espèce).

Groupes de Lie – application exponentielle, périodes

Autres exemples de périodes

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

et tous les nombres algébriques,

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}$$

et tous les logarithmes de nombres algébriques,

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \int_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2}.$$

$\zeta(2)$ est une période

$$
\begin{aligned}
\int_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2} &= \int_0^1 \left(\int_0^{t_1} \frac{dt_2}{1-t_2} \right) \frac{dt_1}{t_1} \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{t_1} \sum_{n \geq 1} t_2^{n-1} dt_2 \right) \frac{dt_1}{t_1} \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_0^1 t_1^{n-1} dt_1 \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \zeta(2).
\end{aligned}
$$

$\zeta(s)$ est une période

Pour s entier ≥ 2,

$$\zeta(s) = \int_{1>t_1>t_2\cdots>t_s>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_{s-1}}{t_{s-1}} \cdot \frac{dt_s}{1-t_s}.$$

Récurrence :

$$\int_{t_1>t_2\cdots>t_s>0} \frac{dt_2}{t_2} \cdots \frac{dt_{s-1}}{t_{s-1}} \cdot \frac{dt_s}{1-t_s} = \sum_{n\geq 1} \frac{t_1^{n-1}}{n^{s-1}}.$$

Nombres qui ne sont pas des périodes ?

Problème ouvert (Kontsevich–Zagier) : *Donner un exemple explicite d'un nombre qui n'est pas une période.*

Plusieurs niveaux :

- *analogue de Liouville* : trouver une propriété qui soit satisfaite par toutes les périodes et construire un nombre qui ne la satisfait pas.
  Suggestion : en terme de *complexité* ?
- *analogue de Hermite* : démontrer que des nombres donnés ne sont pas des périodes.
  Candidats : $1/\pi$, e, constante d'Euler
  M. Kontsevich : périodes exponentielles.
  The last chapter, which is at a more advanced level et also more speculative than the rest of the text, is by the first author only.

Relations entre périodes

$\boxed{1}$
Additivité

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$\boxed{2}$
Changement de variables

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)du.$$

Relations entre périodes

$\boxed{3}$

Newton–Leibniz–Stokes

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Conjecture de Kontsevich et Zagier

Periods,
Mathematics unlimited—
2001 and beyond,
Springer 2001, 771–808.

Conjecture (Kontsevich–Zagier). *Si une période a deux représentations, on peut passer de l'une à l'autre en utilisant uniquement les règles* $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ *et* $\boxed{3}$ *dans lesquelles toutes les fonctions et les domaines d'intégration sont algébriques avec des coefficients algébriques.*

Exemples

$$\begin{aligned}
\pi &= \int_{x^2+y^2\le 1} dxdy && = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\;dx \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} && = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} \\
&= \frac{22}{7}-\int_0^1\frac{x^4(1-x^4)dx}{1+x^2} && = 4\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Conséquences spectaculaires :

Il n'y a pas de "nouvelle" relation de dépendance algébrique entre les constantes classiques de l'analyse.

Approximation rationnelle de périodes réelles

Liouville (1844) : *pour tout nombre algébrique irrationnel* α, *il existe deux constantes* c et d *telles que, pour tout nombre rationnel* p/q, *on ait*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^d}.$$

Nombres de Liouville

Un nombre de Liouville est un nombre $x \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $\kappa > 0$, il existe $p/q \in \mathbf{Q}$ avec $q \geq 2$ vérifiant

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^\kappa}\cdot$$

Par conséquent *un nombre de Liouville est transcendant.*

Approximation rationnelle de périodes

En théorie des *systèmes dynamiques*, un nombre de Liouville est un nombre réel qui ne satisfait pas de condition diophantienne.

Question. *Soit* θ *une période réelle irrationnelle ; existe-il* $c(\theta) > 0$ *tel que, pour tout nombre rationnel* p/q *distinct de* θ *avec* $q \geq 2$*, la minoration*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{c(\theta)}}$$

soit vérifiée ?

Mesure de Lebesgue

Un but plus ambitieux serait d'établir que les périodes réelles ou complexes se comportent, du point de vue de l'approximation diophantienne, comme presque tous les nombres pour la mesure de Lebesgue.

Approximation diophantienne de périodes

Question. *Étant donnée une période transcendante* $\theta \in \mathbf{C}$, *existe-t-il une constante* $\kappa(\theta)$ *telle que, pour tout polynôme non nul* $P \in \mathbf{Z}[X]$, *on ait*

$$|P(\theta)| \geq H^{-\kappa(\theta)d},$$

où $H \geq 2$ *est un majorant de la hauteur usuelle de* P *(maximum des valeurs absolues des coefficients) et* d *le degré ?*

Théorèmes de Hermite et Lindemann

Hermite (1873) :
transcendance de e.

Lindemann (1882) :
transcendance de π.

Théorème de Hermite–Lindemann
Pour tout nombre complexe non nul z, un au moins des deux nombres z, e^z est transcendant.

Corollaires : transcendance de $\log\alpha$ et de e^β pour α and β nombres algébriques non nuls avec $\log\alpha \neq 0$.

A.O. Gel'fond et Th. Schneider (1934).
Solution du septième problème de Hilbert :
transcendance de α^β
et de $(\log \alpha_1)/(\log \alpha_2)$
pour α, β, α_1 *et* α_2 *algébriques.*

Du théorème de Gel'fond-Schneider on déduit la transcendance de $2^{\sqrt{2}}$, e^π, $\log 2/\log 3$ et de $e^{\pi\sqrt{d}}$ quand d est un entier > 0.

Exemple :

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,743,999\,999\,999\,999\,250\,7\ldots$$

Martin Gardner, Scientific American, 1 Avril 1975.

Corps imaginaires quadratiques de nombre de classes 1 :

$$1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 11,\ 19,\ 43,\ 67,\ 163.$$

Formes équivalentes du théorème de Gel'fond-Schneider

Soient $\log\alpha_1, \log\alpha_2$ *deux logarithmes non nuls de nombres algébriques. On suppose que le quotient* $(\log\alpha_1)/(\log\alpha_2)$ *est irrationnel. Alors ce quotient est transcendant.*

Théorème de Baker

A. Baker, (1968). *Soient* $\log\alpha_1,\dots,\log\alpha_n$ *des logarithmes* $\mathbf{Q}$*–linéairement indépendants de nombres algébriques. Alors les nombres* $1,\log\alpha_1,\dots,\log\alpha_n$ *sont linéairement indépendants sur le corps* $\overline{\mathbf{Q}}$ *des nombres algébriques.*

Conséquences du théorème de Baker

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres algébriques non nuls, $\beta_1, \dots, \beta_n$ des nombres algébriques et, pour $1 \leq i \leq n$, soit $\log \alpha_i$ un logarithme complexe de α_i. Alors le nombre

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n$$

est soit nul, soit transcendant.

Exemple célèbre (proposé par Siegel en 1949) : du théorème de Baker on déduit la transcendance du nombre

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\log 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \cdot$$

Genre zéro

Corollaire. *Soient* P *et* Q *des polynômes à coefficients algébriques satisfaisant* $\deg P < \deg Q$ *et soit* γ *soit un chemin fermé, soit un chemin dont les points limites sont algébriques ou infinis. Si l'intégrale*

$$\int_\gamma \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

existe, alors sa valeur est nulle ou transcendante.

Démonstration.
On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $P(z)/Q(z)$.

Périodes en genre zéro

En fait le corollaire est équivalent au théorème de Baker : on écrit un logarithme de nombre algébrique comme une période. Par exemple pour la détermination principale du logarithme, quand α n'est pas un nombre réel négatif, on a

$$\log \alpha = \int_0^\infty \frac{(\alpha - 1)dt}{(t+1)(\alpha t + 1)},$$

tandis que

$$i\pi = 2i \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}.$$

Les intégrales correspondantes ne sont pas des nombres de Liouville : on dispose aussi de mesures de transcendance explicites.

Transcendance de périodes d'intégrales elliptiques

Analogue elliptique du théorème de Lindemann sur la transcendance de π.

Théorème (Siegel, 1932) : *Si les invariants* g_2 *et* g_3 *de* $\wp$ *sont algébriques, un au moins des deux nombres* ω_1, ω_2 *est transcendant.*

On en déduit que dans le cas de multiplication complexe, toute période non nulle de $\wp$ *est transcendante.*

C.L. Siegel

Principe des tiroirs de Dirichlet

Lemme de Thue-Siegel

Intégrales elliptiques de première espèce

1934 : solution du septième problème de Hilbert par A.O. Gel'fond et Th. Schneider.

Schneider (1934) : *Si les invariants* g_2 *et* g_3 *de* $\wp$ *sont algébriques, toute période non nulle* ω *est un nombre transcendant*
i.e. : *une période non nulle d'une intégrale elliptique de première espèce est transcendante.*

Transcendance de quasi–périodes

Intégrales elliptiques de seconde espèce.
Pólya, Popken, Mahler (1935)

Schneider (1934) : *Si les invariants* g_2 *et* g_3 *de* $\wp$ *sont algébriques, chacun des nombres* $\eta(\omega)$ *avec* $\omega \neq 0$ *est transcendant.*

Exemples : les nombres

$$\Gamma(1/4)^4/\pi^3 \quad \text{et} \quad \Gamma(1/3)^3/\pi^2$$

sont transcendants.

Dimension supérieure : plusieurs variables

Schneider (1937) : *Si les invariants* g_2 *et* g_3 *de* $\wp$ *sont algébriques et si* α *et* β *sont des nombres algébriques non nuls, chacun des nombres*

$$2i\pi/\omega_1, \quad \eta_1/\omega_1, \quad \alpha\omega_1+\beta\eta_1$$

est transcendant.

Schneider (1948) : *pour* a *et* b *dans* $\mathbf{Q}$ *avec* a, b *et* $a+b$ *non dans* $\mathbf{Z}$, *le nombre*

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

est transcendant.

La démonstration fait intervenir des intégrales abéliennes de genre supérieur, liées à la jacobienne de la courbe de Fermat.

Analogue elliptique du théorème de Hermite-Lindemann

Schneider :*Si* $\wp$ *est une fonction elliptique de Weierstraß avec des invariants* g_2, g_3 *algébriques et si* β *est un nombre algébrique non nul, alors* β *n'est pas un pôle de* $\wp$ *et* $\wp(\beta)$ *est transcendant.*

Plus généralement, *si* a *et* b *sont deux nombres algébriques avec* $(a, b) \neq (0, 0)$, *alors pour tout* $u \in \mathbf{C} \setminus \Omega$ *un au moins des deux nombres*

$$\wp(u), \qquad au + b\zeta(u)$$

est transcendant.

Autres résultats de Schneider

1. *Soient* $\wp$ *et* $\wp^*$ *deux fonctions elliptiques de* Weierstraß *algébriquement indépendantes ayant des invariants* g_2, g_3, g_2^*, g_3^* *algébriques et* $t \in \mathbf{C}$ *un nombre complexe qui n'est pôle ni de* $\wp$ *ni de* $\wp^*$. *Alors un au moins des deux nombres* $\wp(t)$ *et* $\wp^*(t)$ *est transcendant.*

2. *Soit* $\wp$ *une fonction elliptique de* Weierstraß *ayant des invariants* g_2, g_3 *algébriques. Alors pour tout* $t \in \mathbf{C} \setminus \Omega$ *un au moins des deux nombres* $\wp(t)$, e^t *est transcendant.*

Méthode de Baker

A. Baker (1969) : *transcendance de combinaisons linéaires à coefficients algébriques en*

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \eta_1 \quad \textit{et} \quad \eta_2.$$

J. Coates (1971) : *transcendance de combinaisons linéaires à coefficients algébriques en*

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \eta_1, \quad \eta_2 \quad \textit{et} \quad 2i\pi.$$

De plus *dans le cas non-CM, les trois nombres*

$$\omega_1, \quad \omega_2 \quad \textit{et} \quad 2i\pi$$

sont $\overline{\mathbf{Q}}$*-linéairement indépendants.*

Contribution de Masser

D.W. Masser (1975) : *les six nombres*

$$1, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \eta_1, \quad \eta_2 \quad \textit{et} \quad 2i\pi$$

engendrent un $\overline{\mathbf{Q}}$*-espace vectoriel de dimension* 6 *dans le cas CM,* 4 *dans le cas non-CM :*

$$\dim_{\overline{\mathbf{Q}}}\{1, \omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2i\pi\} = 2 + 2\dim_{\overline{\mathbf{Q}}}\{\omega_1, \omega_2\}.$$

Aussi : *mesures d'indépendance linéaire.*

Analogue elliptique du théorème de Baker

Indépendance linéaire sur le corps des nombres algébriques de logarithmes elliptiques : Masser (1974) dans le cas CM.

Bertrand-Masser (1980) dans le cas général. Nouvelle démonstration du théorème de Baker utilisant des fonctions de plusieurs variables (produits Cartésiens, critère de Schneider (1949), précédant la solution par Bombieri d'une conjecture de Nagata 1970).

Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstraß ayant des invariants g_2, g_3 algébriques. Soient $u_1, \dots, u_n$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathrm{End}(E)$. On suppose, pour $1 \le i \le n$, ou bien $u_i \in \Omega$ ou bien $\wp(u_i) \in \overline{\mathbf{Q}}$. Alors les nombres $1, u_1, \dots, u_n$ sont linéairement indépendants sur le corps $\overline{\mathbf{Q}}$.

Théorème de Wüstholz

G. Wüstholz (1987) – extension des résultats de Schneider, Lang, Baker, Coates, Masser, Bertrand aux variétés abéliennes et aux intégrales abéliennes. Énoncé général d'indépendance linéaire sur les groupes algébriques commutatifs contenant le théorème de Baker pour les tores (produits de groupes multiplicatifs).

Conséquences obtenues par J. Wolfart et G. Wüstholz concernant les valeurs de fonctions Beta et Gamma : indépendance linéaire sur le corps des nombres algébriques des valeurs de la fonction Beta d' Euler en des points rationnels (a, b).

Transcendance de valeurs en des points algébriques de valeurs de fonctions hypergéométriques ayant des paramètres rationnels.

Fonctions elliptiques et indépendance algébrique

1976, G.V. Chudnovsky :

Les nombres π *et* $\Gamma(1/4)$
sont algébriquement indépendants.

Démonstration :

utilise les fonctions elliptiques.

Fonctions modulaires

1996, Yu. V. Nesterenko :

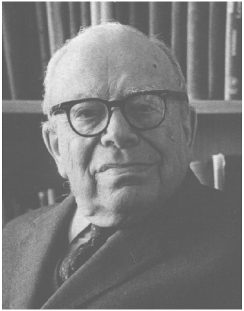
Les trois nombres
π, e^π *et* $\Gamma(1/4)$
sont algébriquement indépendants.

Démonstration :

utilise les fonctions modulaires.

Problème ouvert :
Montrer que e *et* π *sont algébriquement indépendants.*

Mesures d'irrationalité de π



1953 : K. Mahler, π *n'est pas un nombre de Liouville*

1967 : K. Mahler

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{42}} \quad \text{pour } q \geq 2.$$

1974 : M. Mignotte

exposant $20,6$ pour $q \geq 2$

1984 : D. et G. Chudnovsky

$14,65$ pour q suffisamment grand.

1992 : M. Hata, meilleure estimation actuellement connue

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{8,0161}}.$$

Mesures d'irrationalité de e^π et $\Gamma(1/4)$

On ne sait pas démontrer que e^π n'est pas un nombre de Liouville :

$$\left|e^\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{2^{60}\log\log q}} \quad \text{pour } q \geq 3.$$

(méthode de Baker)

1999, P. Philippon et S. Bruiltet : *Le nombre $\Gamma(1/4)$ n'est pas un nombre de Liouville*

$$\left|\Gamma(1/4) - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{10^{330}}} \quad \text{pour } q \text{ suffisamment grand.}$$

(méthode de Chudnovsky)

Autres problèmes ouverts

Indépendance algébrique des trois nombres

$$\pi, \quad \Gamma(1/3), \quad \Gamma(1/4).$$

Indépendance algébrique de trois nombres parmi

$$\pi, \quad \Gamma(1/5), \quad \Gamma(2/5), \quad e^{\pi\sqrt{5}}.$$

Relations standard entre les valeurs de Beta

(Translation) :

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

(Réflection) :

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

(Multiplication) : pour tout entier positif n,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(a + \frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{-na+(1/2)} \Gamma(na).$$

Conjecture de Rohrlich

Conjecture (D. Rohrlich) *Toute relation multiplicative*

$$\pi^{b/2} \prod_{a \in \mathbf{Q}} \Gamma(a)^{m_a} \in \overline{\mathbf{Q}}$$

avec b *et* m_a *dans* $\mathbf{Z}$ *est dans l'idéal engendré par les relations standard.*

Conjecture (S. Lang) *Toute relation de dépendance algébrique entre les nombres* $(2\pi)^{-1/2}\Gamma(a)$ *avec* $a \in \mathbf{Q}$ *est dans l'idéal engendré par les relations standard.*
(distribution impaire universelle).