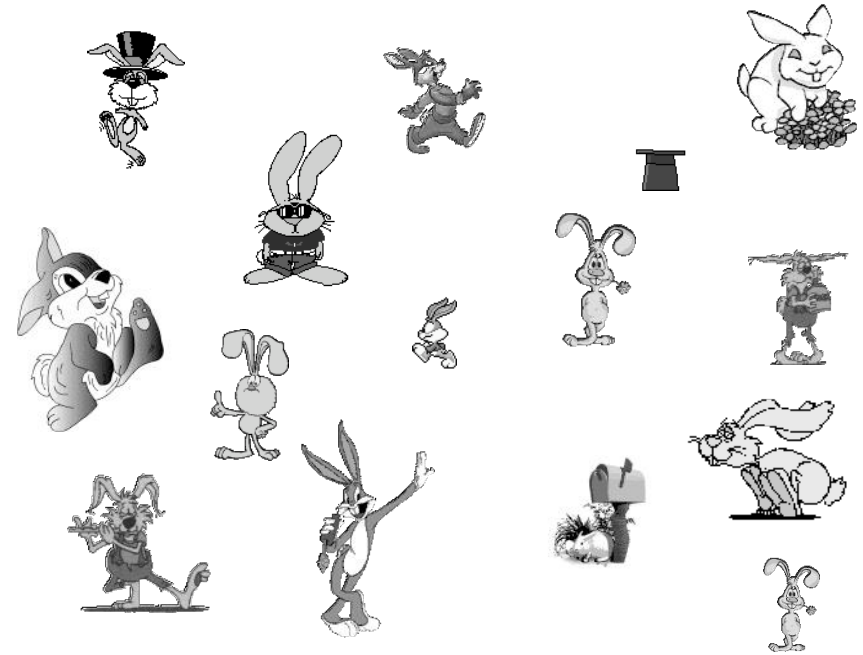


Québec, vendredi 25 septembre 2009

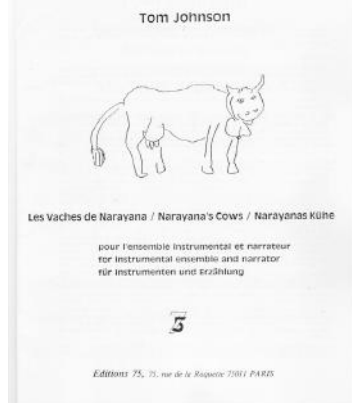
Questions arithmétiques soulevées par des lapins, des vaches et le Code Da Vinci

Michel Waldschmidt
Université P. et M. Curie (Paris VI)

<http://www.math.jussieu.fr/~miw/>



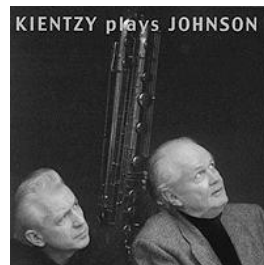
<http://www.pogus.com/21033.html>



Les vaches de Narayana

Musique: Tom Johnson
Saxophones: Daniel Kientzy
Réalisation: Michel Waldschmidt

<http://www.math.jussieu.fr/~miw/>



Narayana était un mathématicien indien du 14^e siècle. Il posa le problème suivant:

Chaque année, une vache met au monde un veau. À partir de la quatrième année, chaque veau donne à son tour et au début de chaque année, naissance à un veau.

Quel est le nombre de vaches et de veaux après une durée de 17 ans?

Le temps que vous mettrez à résoudre ce problème nous suffira pour vous en donner la démonstration musicale.

La première année, nous n'avons que la première vache avec son premier veau.

Année	1
Vache initiale	1
Deuxième génération	1
Total	2



long-court

La deuxième année, nous avons la première vache et deux veaux.



Année	1	2
Vache initiale	1	1
Deuxième génération	1	2
Total	2	3

long - court - court

La troisième année, nous avons la première vache et trois veaux.



Année	1	2	3
Vache initiale	1	1	1
Deuxième génération	1	2	3
Total	2	3	4

long - court - court - court

La quatrième année, le premier veau devient mère, ce qui donne naissance à une troisième génération des vaches de Narayana.



Année	1	2	3	4
Vache initiale	1	1	1	1
Deuxième génération	1	2	3	4
Troisième génération	0	0	0	1
Total	2	3	4	6

long - court - court - court - long - court

La cinquième année, nous avons une mère ainsi que trois veaux de plus.



année	1	2	3	4	5	
vache originale	1	1	1	1	1	
deuxième génération	1	2	3	4	5	+1
troisième génération	0	0	0	1	3	+2
Total	2	3	4	6	9	+3

La sixième année, nous avons 4 mères, 4 jeunes veaux, et un troupeau de 13 têtes.



Année	1	2	3	4	5	6
Vache originale	1	1	1	1	1	1
Deuxième génération	1	2	3	4	5	6
Troisième génération	0	0	0	1	3	6
Total	2	3	4	6	9	13

À la septième année naît le premier veau du premier veau du premier veau de la vache originale de Naryana: c'est le début de la quatrième génération.

Année	1	2	3	4	5	6	7
Vache originale	1	1	1	1	1	1	1
Deuxième génération	1	2	3	4	5	6	7
Troisième génération	0	0	0	1	3	6	10
Quatrième génération	0	0	0	0	0	0	1
Total	2	3	4	6	9	13	19

La huitième année, le nombre de têtes du troupeau, qui était passé de 1 à 2 à 3 à 4 à 6 à 9 à 13 à 19, maintenant passe à 28.

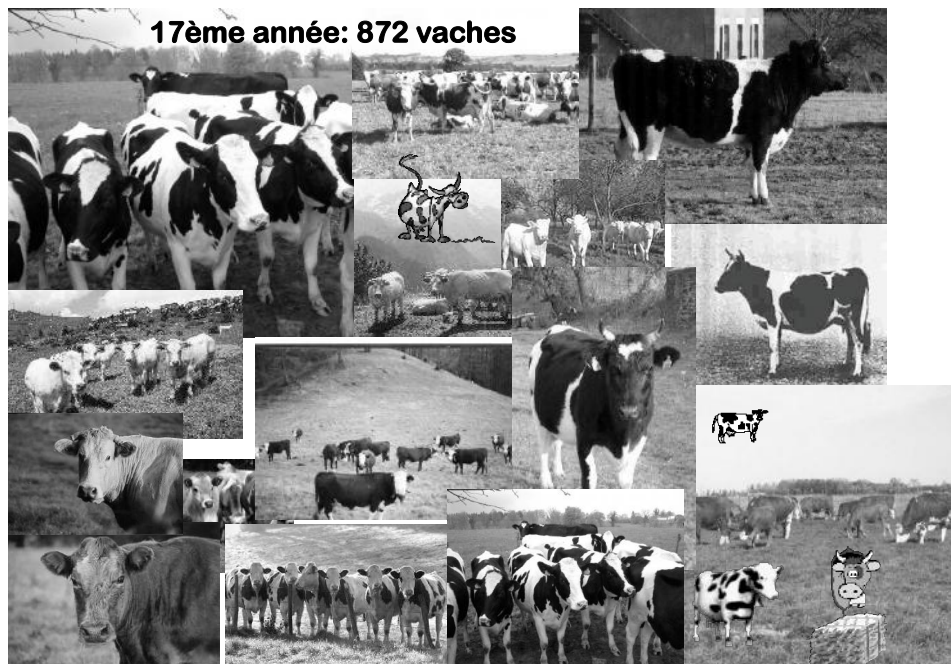
Année	1	2	3	4	5	6	7	8
Vache originale	1	1	1	1	1	1	1	1
Deuxième génération	1	2	3	4	5	6	7	8
Troisième génération	0	0	0	1	3	6	10	15
Quatrième génération	0	0	0	0	0	0	1	4
Total	2	3	4	6	9	13	19	28

année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Vache originale	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Deuxième génération	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Troisième génération	0	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105
Quatrième génération	0	0	0	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
Cinquième génération	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210	330
Sixième génération	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126
Septième génération	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7
Total	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189	277	406	595	872

Tom Johnson
 Les Vaches de Narayana
 Narayana's Cows
 Narayanas Kühe
 Las vacas de Narayana

etc. colla pravo
 etc. colla pravo

© 1989 by Tom Johnson



Narayana était un mathématicien indien du 14^e siècle. Il posa le problème suivant:

Chaque année, une vache met au monde un veau. À partir de la quatrième année, chaque veau donne à son tour et au début de chaque année, naissance à un veau.

Quel est le nombre de vaches et de veaux après une durée de 17 ans?

Le temps que vous mettrez à résoudre ce problème nous suffira pour vous en donner la démonstration musicale.

La première année, nous n'avons que la première vache avec son premier veau.

Année	1
Vache initiale	1
Deuxième génération	1
Total	2



long-court

La deuxième année, nous avons la première vache et deux veaux.



Année	1	2
Vache initiale	1	1
Deuxième génération	1	2
Total	2	3

long - court - court

La troisième année, nous avons la première vache et trois veaux.



Année	1	2	3
Vache initiale	1	1	1
Deuxième génération	1	2	3
Total	2	3	4

long - court - court - court

La quatrième année, le premier veau devient mère, ce qui donne naissance à une troisième génération des vaches de Narayana.



Année	1	2	3	4
Vache initiale	1	1	1	1
Deuxième génération	1	2	3	4
Troisième génération	0	0	0	1
Total	2	3	4	6

long - court - court - court - long - court

La cinquième année, nous avons une mère ainsi que trois veaux de plus.



Année	1	2	3	4	5	
Vache originale	1	1	1	1	1	
Deuxième génération	1	2	3	4	5	+1
Troisième génération	0	0	0	1	3	+2
Total	2	3	4	6	9	+3

La sixième année, nous avons 4 mères, 4 jeunes veaux, et un troupeau de 13 têtes.



Année	1	2	3	4	5	6
Vache originale	1	1	1	1	1	1
Deuxième génération	1	2	3	4	5	6
Troisième génération	0	0	0	1	3	6
Total	2	3	4	6	9	13

À la septième année naît le premier veau du premier veau du premier veau de la vache originale de Naryana: c'est le début de la quatrième génération.

Année	1	2	3	4	5	6	7
Vache originale	1	1	1	1	1	1	1
Deuxième génération	1	2	3	4	5	6	7
Troisième génération	0	0	0	1	3	6	10
Quatrième génération	0	0	0	0	0	0	1
Total	2	3	4	6	9	13	19

La huitième année, le nombre de têtes du troupeau, qui était passé de 1 à 2 à 3 à 4 à 6 à 9 à 13 à 19, maintenant passe à 28.

Année	1	2	3	4	5	6	7	8
Vache originale	1	1	1	1	1	1	1	1
Deuxième génération	1	2	3	4	5	6	7	8
Troisième génération	0	0	0	1	3	6	10	15
Quatrième génération	0	0	0	0	0	0	1	4
Total	2	3	4	6	9	13	19	28

Tom Johnson

Les Vaches de Narayana
Narayana's Cows
Narayan's Kühe
Las vacas de Narayana

© 1989 by Tom Johnson

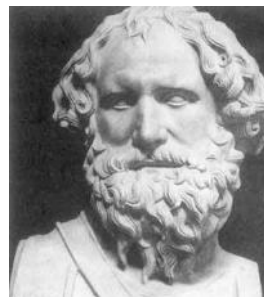


Les taureaux d'Archimède



Archimède

Le problème des taureaux d'Archimède est une devinette en forme d'épigramme qui invite à calculer le nombre de têtes dans le troupeau du Dieu Soleil.

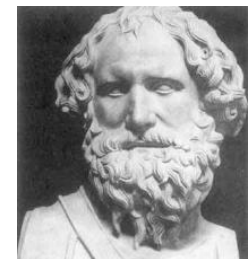


Mesure-moi, ami, si tu as la sagesse en partage, avec une application soutenue, le nombre de boeufs d'Hélios qui jadis paissaient dans les plaines de l'île Thrinacienne, la Sicile, répartis en quatre troupeaux de couleurs variées, l'un d'un blanc de lait, le second d'un noir brillant, le troisième blond, et le quatrième bigarré.

Le problème des taureaux d'Archimède

Dans chaque troupeau, il y avait un nombre considérable de taureaux dans les proportions que voici: imagine, ami, les blancs en nombre égal à la moitié, augmentée du tiers, des taureaux noirs et augmentée de tous les blonds, et le nombre des noirs égal au quart et au cinquième du nombre des bigarrés et au nombre de tous les blonds.

Observe, d'autre part, que le nombre des bigarrés restants est égal au sixième, augmenté du septième, du nombre des taureaux blancs et au nombre de tous les blonds.



Le troupeau d'Archimède

Il y a une infinité de solutions

Pour la plus petite solution, le nombre total de têtes a **206 545** chiffres

Ce problème a été résolu par un mathématicien américain à la fin du XIX-ème siècle, A. Amthor, qui ajoute: « *une sphère du diamètre de la voie lactée, que la lumière prend dix mille ans à traverser, ne contiendrait qu'une partie infime de ce troupeau, à supposer même que la taille de chaque animal ne dépassât point celle de la plus minuscule bactérie.* »

Solution du problème d'Archimède

A. Amthor

"Das Problema bovinum des Archimedes »

Zeitschrift fur Math. u. Physik.

(*Hist.-litt.Abtheilung*) Volume **XXV** (1880), pages 153-171

H.C. Williams, R.A. German and C.R. Zarnke,
Solution of the cattle problem of Archimedes, *Math. Comp.*, **19**, 671-674 (1965).

Estimation du nombre d'atomes dans l'univers fini connu

Quand j'étais petit: 10^{60} atomes
(1 suivi de 60 zéros)



Un peu plus tard: 10^{70} atomes

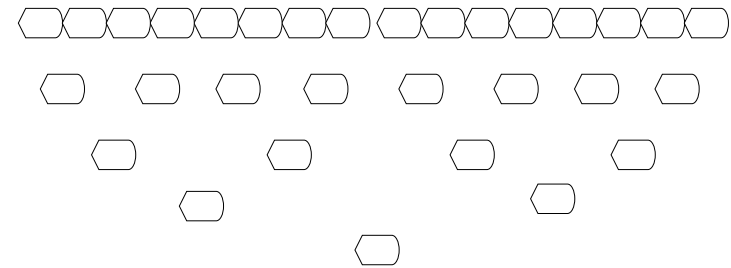


De nos jours: ?

Combien avons-nous d'ancêtres?

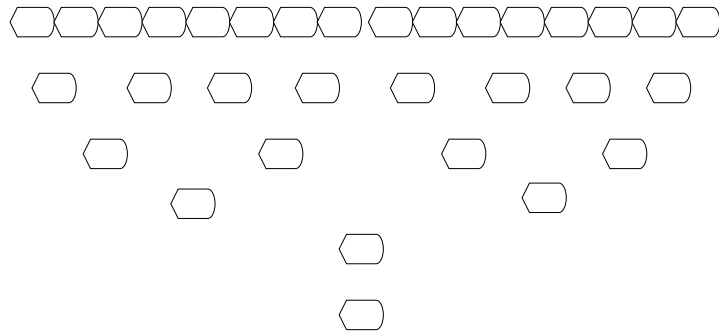
Suite: 1, 2, 4, 8, 16 ...

pour obtenir un terme, on multiplie le précédent par 2



Suite exponentielle

Généalogie des abeilles

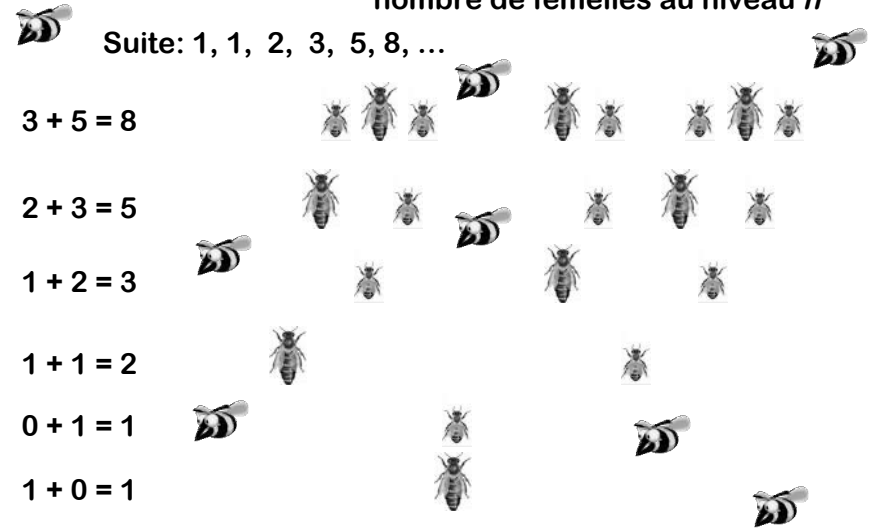


Fibonacci (Leonardo di Pisa)

- Pise $\approx 1175, \approx 1250$
- Liber Abaci ≈ 1202

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...
 Pour obtenir un terme, on ajoute les deux précédents: $21+34=55$

Nombre de femelles au niveau $n+1 =$ population totale au niveau n
 Nombre de mâles au niveau $n+1 =$ nombre de femelles au niveau n



Les vaches de Narayana (le retour)



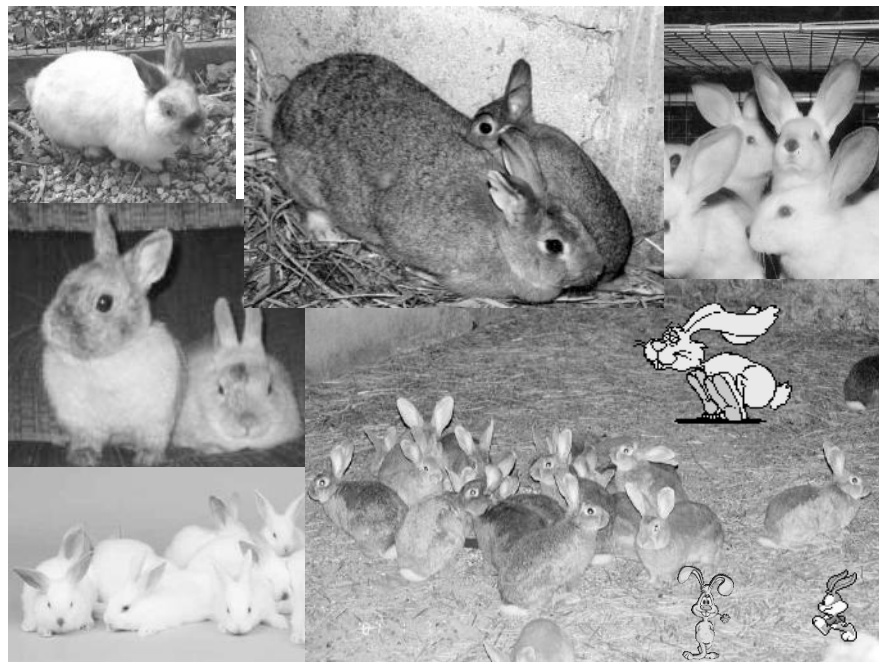
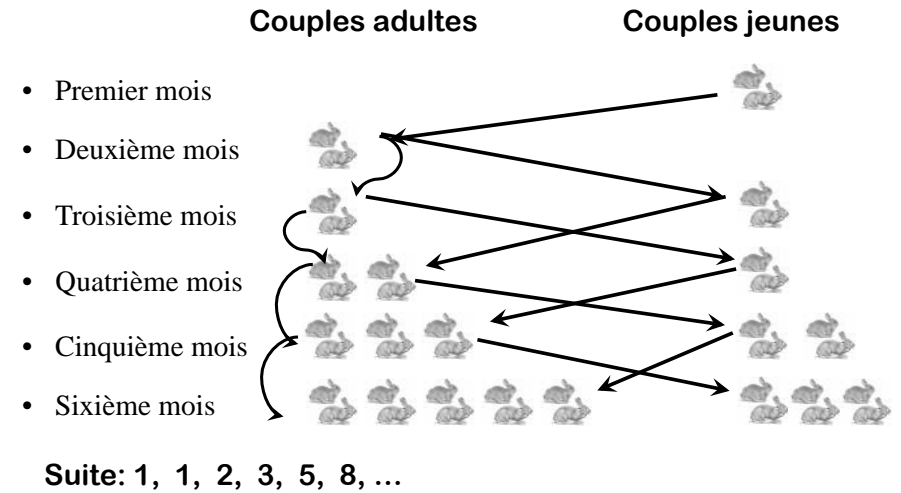
année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Total	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189	277	406	595	872

Pour obtenir un terme, on ajoute le précédent et l'avant-avant-dernier
 $872=595+277$

Tom Johnson
 Les Vaches de Narayana
 Narayana's Cows
 Narayanas Kühe
 Las vacas de Narayana

© 1989 by Tom Johnson

Modélisation d'une population



Théorie des populations stables (Alfred Lotka)

Si chaque couple engendre un couple les deux premières saisons seulement, alors le nombre de couples qui naît chaque année suit encore la loi de Fibonacci.

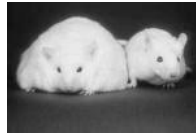
Bouleau arctique

Chaque branche en crée une autre à partir de sa seconde année d'existence dans les pays froids.

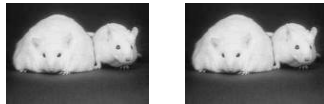
Suite exponentielle



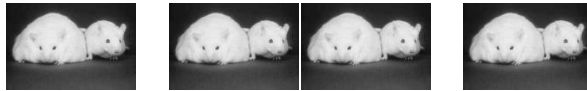
- Premier mois



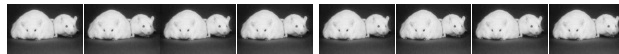
- Deuxième mois



- Troisième mois



- Quatrième mois



Nombre de couples: 1, 2, 4, 8, ... multiplication par 2

Nombre de couples de lapins de Fibonacci

au bout de 60 mois:

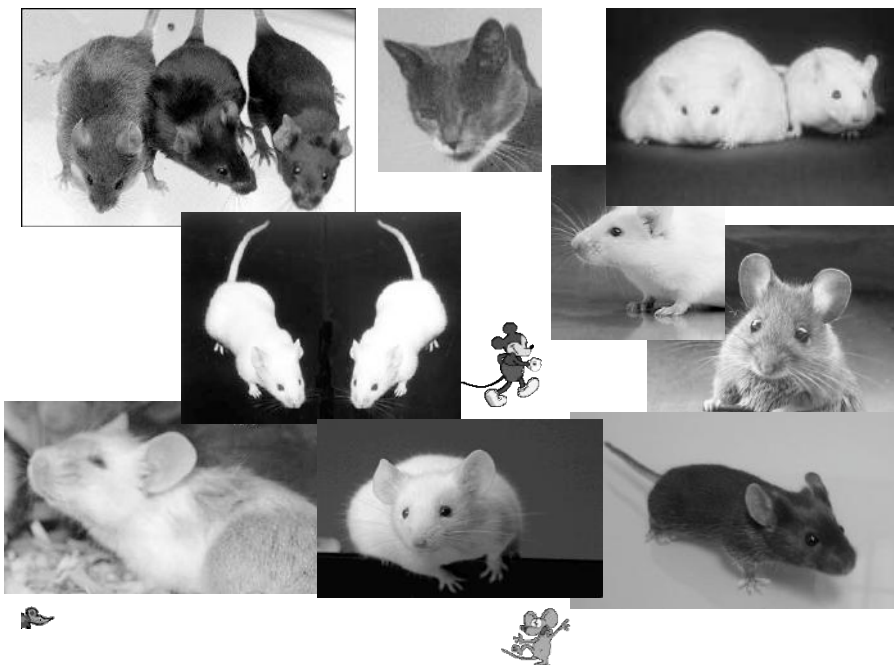
1 548 008 755 920 (13 chiffres)

Nombre de couples de souris au bout de 60 mois:

$2^{60} = 1\ 152\ 921\ 504\ 606\ 846\ 976$ (19 chiffres)

Croissance exponentielle

- larves de coccinelles
- bactéries
- économie

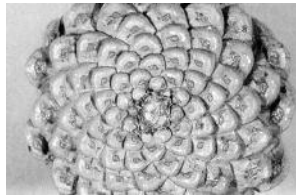


Phyllotaxie



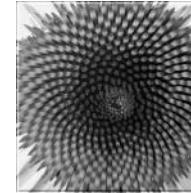
- Étude de la disposition des feuilles sur une tige et des mécanismes qui la gouvernent
- Nombre de pétales des fleurs: marguerites, tournesol,...
- Spirale formée par les épines (aubépines,...)
- Pommes de pins, ananas, choux Romanesco, cactus
- Croissance des feuilles de céleri

- Université de Nice,
Laboratoire Environnement Marin Littoral,
Equipe d'Accueil "Gestion de la Biodiversité"

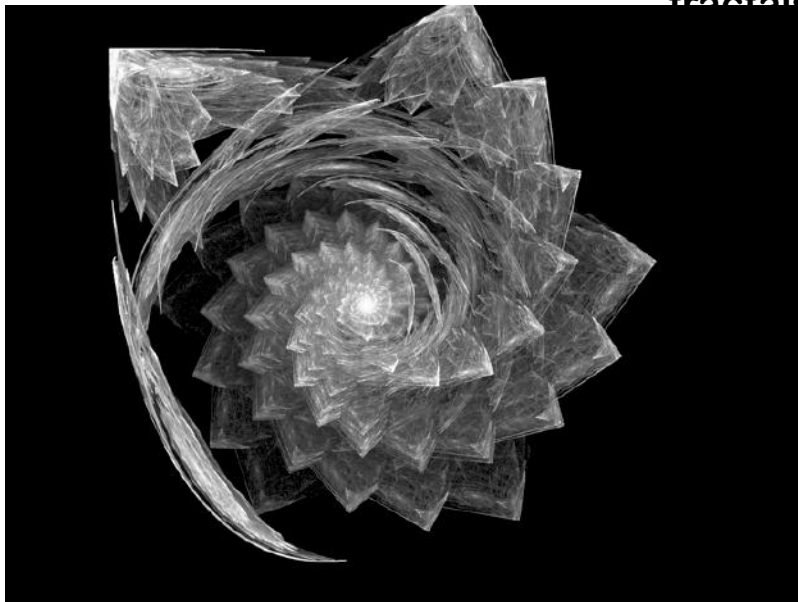


<http://www.unice.fr/LEML/coursJDV/tp/tp3.htm>

Phyllotaxie

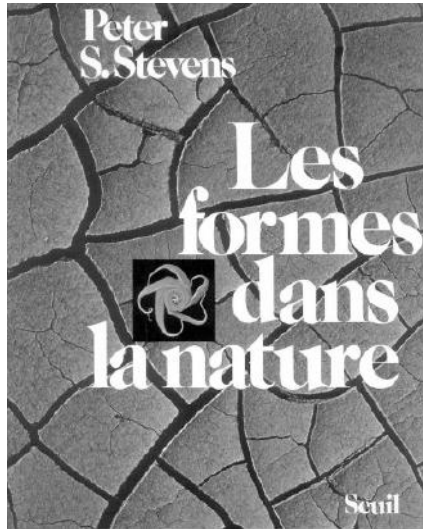


fractals



Phyllotaxie

- Képler (1611) utilise la suite de Fibonacci pour étudier le dodécaèdre et l'icosaèdre, puis les symétries ternaires et d'ordre 5 des fleurs
- Stéphane Douady et Yves Couder
Les spirales végétales
La Recherche 250 (janvier 1993) vol. **24**.



En effeuillant la marguerite

Je t'aime
Un peu
Beaucoup
Passionnément
À la folie
Pas du tout

Suite des restes de la division par 6
 de la suite de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 0, 5,...

Premier multiple de 6 : 144

Reste de la division par 6 des nombres de Fibonacci

$$8 = 6 \times 1 + 2$$

$$13 = 6 \times 2 + 1$$

$$21 = 6 \times 3 + 3$$

$$34 = 6 \times 5 + 4$$

$$55 = 6 \times 9 + 1$$

$$89 = 6 \times 14 + 5$$

$$144 = 6 \times 24 + 0$$

Le Code da Vinci

cinq énigmes à résoudre

Dans le roman écrit par Dan Brown en 2003
 interviennent des techniques (faibles) de cryptage.

1

Il s'agit de remettre dans l'ordre les huit nombres de la
 suite

13 - 3 - 2 - 21 - 1 - 1 - 8 - 5

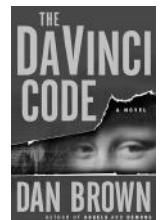
pour ouvrir le coffre de la banque Vernet.

2

Une anagramme anglaise
 O DRACONIAN DEVIL, OH LAME SAINT

3

Une anagramme française
 SA CROIX GRAVE L'HEURE



Le Code da Vinci

cinq énigmes à résoudre (suite)

4

Un poème (français) anamorphosé:
 élc al tse essegas ed tom xueiv nu snad
 ééaltcé ellimaf as tinuéir iuq
 sreilpmet sel rap éinéb etèt al
 eélévér ares suov hsabta ceva



5

Un vieux mot de sagesse

Réponse de 5: SOPHIA

Le Code da Vinci

le numéro de coffre à huit nombres

Les huit nombres du coffre de la banque Vernet sont:

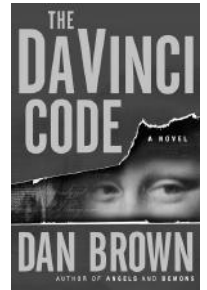
13 - 3 - 2 - 21 - 1 - 1 - 8 - 5

On reconnaît les huit premiers nombres de la suite de Fibonacci.

Il s'agit de trouver du premier coup le bon ordre dans lequel les utiliser. L'ordre naturel fournit la clé.

1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21

Le nombre de possibilités est
20 160



Le Code da Vinci



2

Une anagramme anglaise
 DRACONIAN DEVIL, OH LAME SAINT
 THE MONA LISA LEONARDO DA VINCI

3

Une anagramme française
 SA CROIX GRAVE L'HEURE
 LA VIERGE AUX ROCHERS

Les huit nombres 13 - 3 - 2 - 21 - 1 - 1 - 8 - 5

Avec 4 symboles a, b, c, d, on peut faire

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

mots, à savoir

abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb,
 bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca,
 cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba,
 dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba,



De même avec 8 symboles on peut faire

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$$

mots.

Ici le symbole 1 intervient 2 fois, c'est pourquoi
 nombre de possibilités est *seulement* la moitié

$$20\,160$$

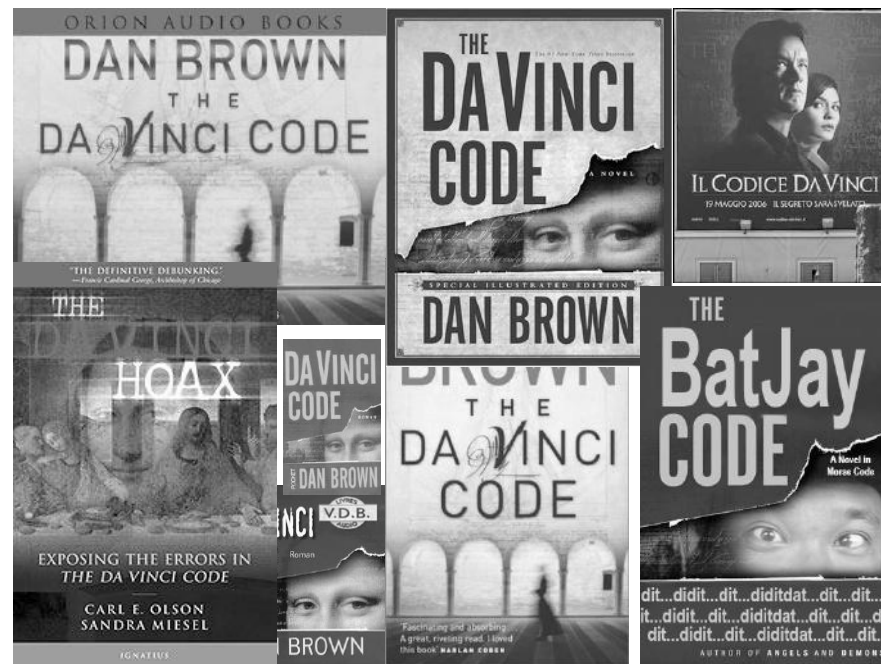
Le Code da Vinci (suite)

4

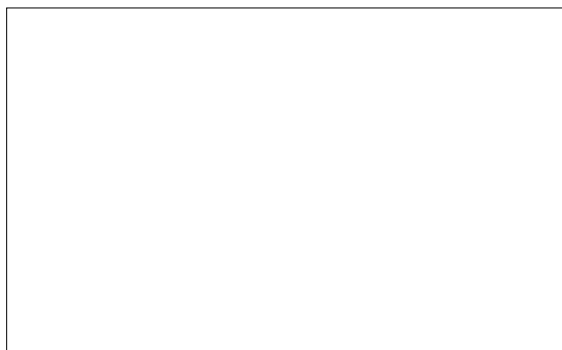
Un poème (français) anamorphosé:
élc al tse essegasedtom xueiv nu snad
eétalcé ellimaf as tinuér iug
sreilpmet sel rap éinéb etêt al
eélévér ares suov hsabta ceva

Dans un vieux mot de sagesse est la clé
Qui réunit sa famille éclatée
La tête bénie par les Templiers
Avec Atbash vous sera révélée

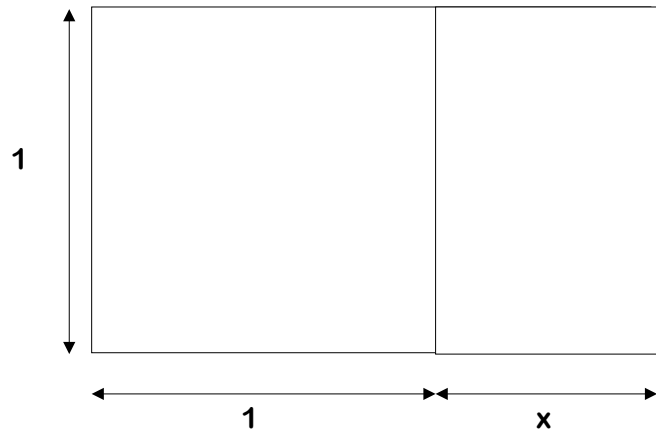
« utiliser un miroir pour déchiffrer le code »



Un joli rectangle



Ceci est un joli rectangle
Un carré



U
N
J
O
L
I
R
E
C
T
A
N
G
L
E

Rectangle d'Or

Côtés: 1 et $1+x$

Condition:

les deux rectangles dont les côtés sont:

1 et $1+x$ pour le premier,

x et 1 pour le second,

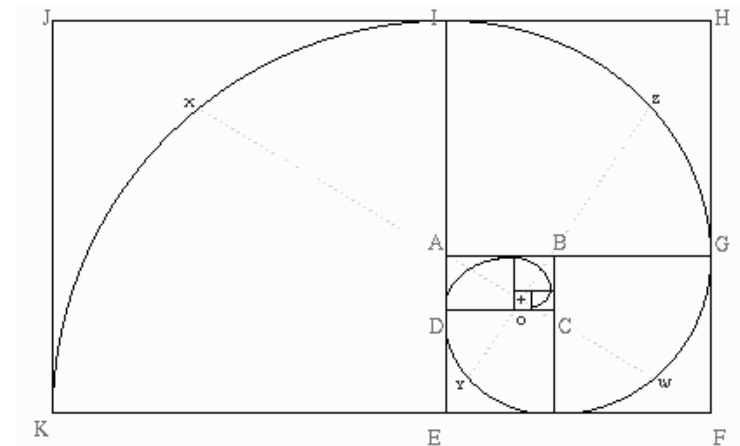
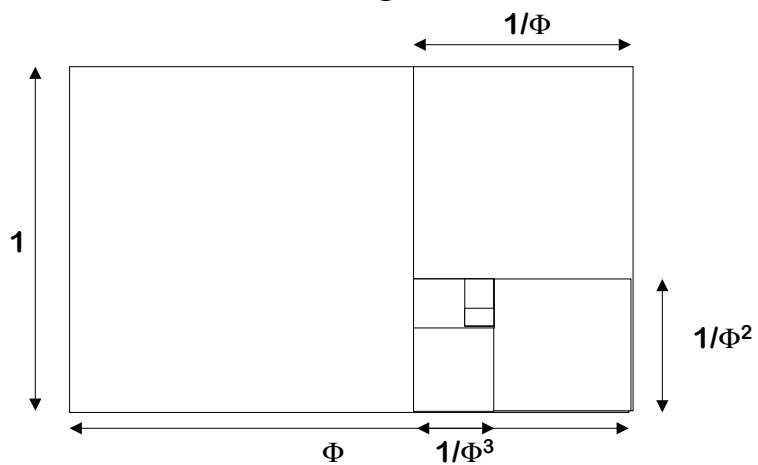
ont les mêmes proportions: $(1+x)/1$ et $1/x$

Équation: $1+x=1/x$ soit: $x^2+x=1$

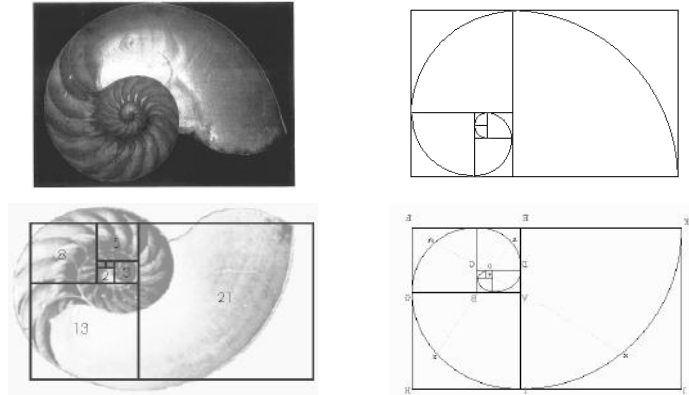
Solution: $1+x$ est le **nombre d'Or** $1,618033\dots$

$\Phi=1,618033\dots$

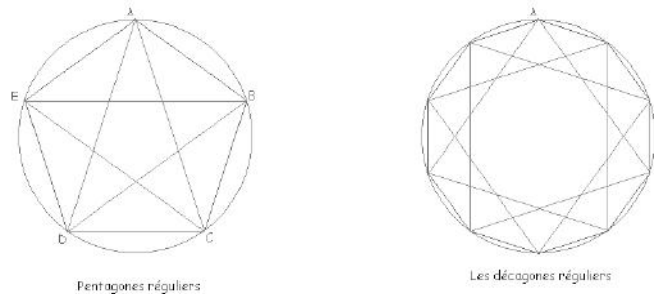
Rectangle d'or



Ammonite

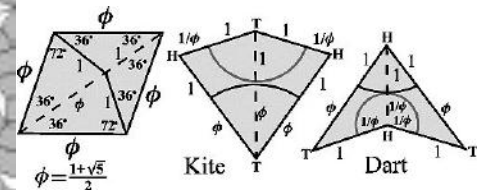
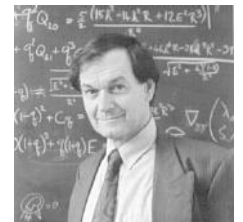
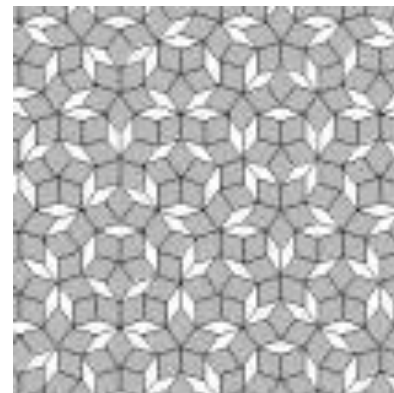


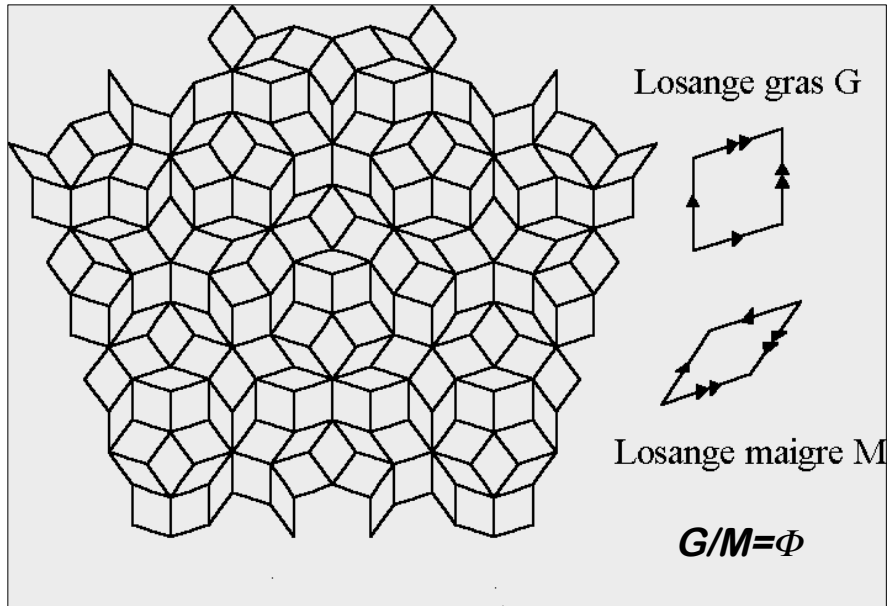
Pentagones et décagones réguliers



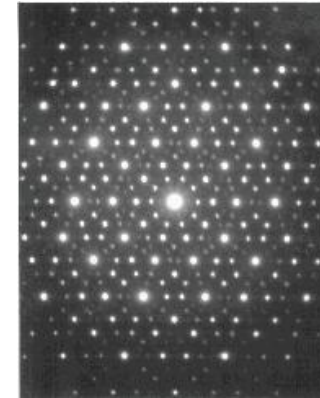
$$\Phi = 2 \cos(\pi/5)$$

Pavages non périodiques de Penrose et quasi-cristaux





Diffraction des quasi-cristaux

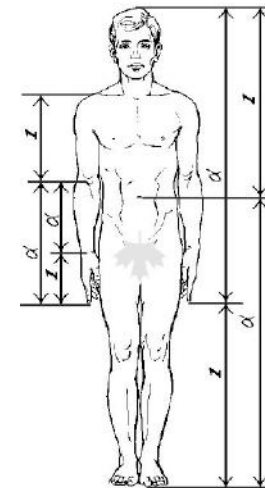


Pavages doublement périodiques (réseaux) - cristallographie

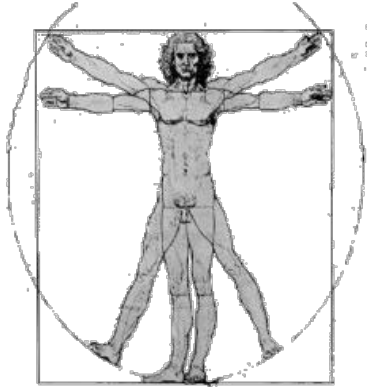


Géométrie d'un champ de lavande
<http://math.unice.fr/~frou/lavande.html>
 François Rouvière (Nice)

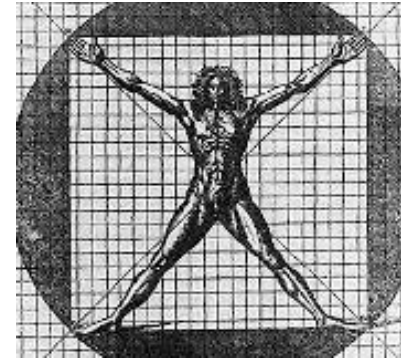
Le nombre d'or et l'esthétique



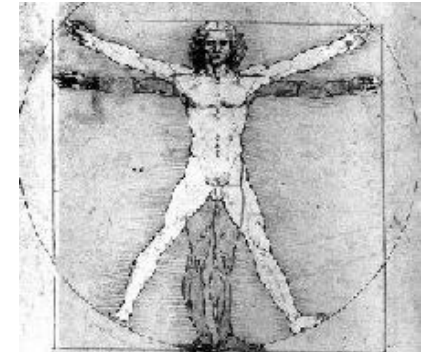
Le nombre d'or et l'esthétique



**Marcus Vitruvius Pollis
(Vitruve, 88-26 av. J.C.)**



**Léonard de Vinci
(Leonardo da Vinci,
1452-1519)**



Musique et suite de Fibonacci

- Dufay, XV^{ème} siècle
- Roland de Lassus
- Debussy, Bartok, Ravel, Webern
- Stockhausen
- Xenakis
- **Tom Johnson:**

Automatic Music for six percussionists



Un exemple de résultat récent

Y. Bugeaud, M. Mignotte, S. Siksek (2004):

Les seules puissances parfaites dans la suite de Fibonacci sont 1, 8 et 144.

Equation: $F_n = a^b$

Inconnues: n, a et b

avec $n \geq 1, a \geq 1$ et $b \geq 2$.

La quête du Graal Pour un mathématicien

Problèmes ouverts, conjectures.

Un exemple de question non résolue:

*Y a-t-il une infinité de nombres de Fibonacci
qui soient premiers?*



lettre du
2 juillet 1830
Adressée
Par Jacobi à
Legendre



Joseph Fourier

Quelques applications de la théorie des nombres

- Cryptographie, sécurité des systèmes informatiques
- Transmission de données, codes correcteurs d'erreur
- Interface avec la physique théorique
- Musique, gammes
- Les nombres dans la nature

L'honneur de l'esprit humain

Dans une lettre du 2 juillet 1830 adressée à Legendre, Jacobi écrit: « M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde. »

Québec, vendredi 25 septembre 2009

**Questions arithmétiques soulevées par des lapins,
des vaches et le Code Da Vinci**

Michel Waldschmidt
Université P. et M. Curie (Paris VI)

<http://www.math.jussieu.fr/~miw/>

Tom Johnson
Les Vaches de Narayana
Narayana's Cows
Narayanas Kühe
Las vacas de Narayana

© 1989 by Tom Johnson