Lycée Jules Verne, Limours

Samedi 7 janvier 2012

Srinivasa Ramanujan

Michel Waldschmidt

http://www.math.jussieu.fr/∼miw/

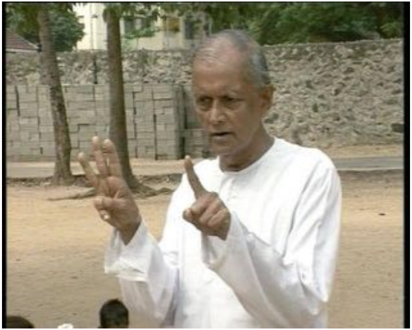
mise à jour : 7 janvier 2012

Srinivasa Ramanujan

Erode, 22 décembre 1887 —

Chetput, (Madras), 26 avril 1920

P.K. Srinivasan (4 novembre 1924 – 20 juin 2005)



PKS premier biographe de Srinivas Ramanujan.

The Hindu, November 1, 2009
Passion for numbers by Soudhamini

http://beta.thehindu.com/education/article41732.ece

Biographie de Srinivasa Ramanujan

(22 décembre 1887 – 26 avril 1920)

Biographie de Srinivasa Ramanujan

(22 décembre 1887 – 26 avril 1920)

1887 : né à Erode (près de Tanjore, sud de l'Inde)

Biographie de Srinivasa Ramanujan

(22 décembre 1887 – 26 avril 1920)

1887 : né à Erode (près de Tanjore, sud de l'Inde)

1894-1903 : école à Kumbakonam

Biographie de Srinivasa Ramanujan

(22 décembre 1887 – 26 avril 1920)

1887 : né à Erode (près de Tanjore, sud de l'Inde)

1894-1903 : école à Kumbakonam

1900 commence un travail personnel en mathématiques en sommant des séries arithmétiques et géométriques.

Série arithmétique

Calculer

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99 + 100$$

Série arithmétique

Calculer

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99 + 100$$

Réponse de Ramanujan : $5\,050$

Série arithmétique

Calculer

$$1+2+3+4+\cdots+99+100$$

Réponse de Ramanujan : $5\,050$
Preuve : le double de la somme est

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr} & 1 & + & 2 & + & 3 & +\cdots+ & 99 & + & 100 \\ + & & & & & & & & & \\ & 100 & + & 99 & + & 98 & +\cdots+ & 2 & + & 1 \\ = & & & & & & & & & \\ & 101 & + & 101 & + & 101 & +\cdots+ & 101 & + & 101 \\ = & & & & & & & & & \\ & 100\cdot 101. & & & & & & & & \end{array}$$

Donc la somme est $$50\cdot 101 = 5\,050.$$

Série arithmétique

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Série géométrique

$$S := 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n.$$

Série géométrique

$$S := 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n.$$

$$aS = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n+1}.$$

Série géométrique

$$S := 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n.$$

$$aS = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n+1}.$$

$$(1-a)S = 1 - a^{n+1}.$$

Série géométrique

$$S := 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n.$$

$$aS = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n+1}.$$

$$(1-a)S = 1 - a^{n+1}.$$

Si $a = 1$, alors $S = n + 1$. Si $a \neq 1$, alors

$$S = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Gopuram Sarangapani Kumbakonam

Sarangapani Sannidhi Street Kumbakonam

Maison de Ramanujan à Kumbakonam

Maison de Ramanujan à Kumbakonam

Maison de Ramanujan à Kumbakonam

Town High School Kumbakonam

Town High School Kumbakonam

1903 : G.S.Carr - *A synopsis of elementary results — a book on pure mathematics* (1886)
4417 énoncés de théorèmes

Town High School Kumbakonam

1903 : G.S.Carr - *A synopsis of elementary results — a book on pure mathematics* (1886)
4417 énoncés de théorèmes

$$\sqrt{x} + y = 7, \qquad x + \sqrt{y} = 11$$

Town High School Kumbakonam

1903 : G.S.Carr - *A synopsis of elementary results — a book on pure mathematics* (1886)
4417 énoncés de théorèmes

$$\sqrt{x} + y = 7, \qquad x + \sqrt{y} = 11$$

$$x = 9, \qquad y = 4.$$

Biographie *(suite)*

1903 (Décembre) : réussit l'examen d'entrée à l'Université de Madras, obtient une bourse pour le *Government Arts College* de Kumbakonam.

Biographie *(suite)*

1903 (Décembre) : réussit l'examen d'entrée à l'Université de Madras, obtient une bourse pour le *Government Arts College* de Kumbakonam.

1904 (Janvier) : entre au *Government Arts College*, Kumbakonam.

Biographie *(suite)*

1903 (Décembre) : réussit l'examen d'entrée à l'Université de Madras, obtient une bourse pour le *Government Arts College* de Kumbakonam.

1904 (Janvier) : entre au *Government Arts College*, Kumbakonam.

Obtient le Prix Sri K. Ranganatha Rao

Bourse Subrahmanyam

MacTutor History of Mathematics

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/

Dès 1904, Ramanujan a commencé à entreprendre des recherches mathématiques personnelles. Il étudie les séries comme la série harmonique

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

et calcule les 15 premières décimales de la Constante d'Euler.

MacTutor History of Mathematics

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/

Dès 1904, Ramanujan a commencé à entreprendre des recherches mathématiques personnelles. Il étudie les séries comme la série harmonique

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

et calcule les 15 premières décimales de la Constante d'Euler.

Il redécouvre les nombres de Bernoulli et étudie leurs propriétés.

Nicolas Oresme (1320 – 1382)

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Nicolas Oresme (1320 – 1382)

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Nicolas Oresme (1320 – 1382)

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\cdots$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

Nicolas Oresme (1320 – 1382)

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \cdots$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \cdots + \frac{1}{32} > \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

Nicolas Oresme (1320 – 1382)

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\cdots$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\cdots+\frac{1}{32}>\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}>\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}$$

Constante d'Euler

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N}$$

Constante d'Euler

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N}$$

$$\int_1^N \frac{dx}{x+1} < S_N < 1 + \int_1^N \frac{dx}{x}$$

Constante d'Euler

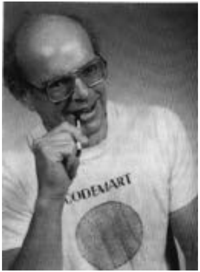
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N}$$

$$\int_1^N \frac{dx}{x+1} < S_N < 1 + \int_1^N \frac{dx}{x}$$

$$\gamma = \lim_{N \to \infty} (S_N - \log N).$$

Constante d'Euler–Mascheroni

$$\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}-\log N\right) = 0.577\,215\,664\,9\ldots$$



Neil J. A. Sloane – The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences
http ://oeis.org/A001620

Nombres de Bernoulli

$$B_0 = 1, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0 \quad \text{for } n > 1.$$

Jacques Bernoulli (1654 – 1705)

Nombres de Bernoulli

$$B_0 = 1, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$$ for $n > 1$.

Jacques Bernoulli (1654 – 1705)

$$B_0 + 2B_1 = 0 \qquad B_1 = -\frac{1}{2}$$

$$B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 0 \qquad B_2 = \frac{1}{6}$$

$$B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 = 0 \qquad B_3 = 0$$

$$B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 = 0 \qquad B_4 = -\frac{1}{30}$$

$$\vdots$$

ref oeis A027642 pour les numérateurs
et A000367 pour les dénominateurs

Kumbakonam

1905 : Échoue à l'examen de fin de première année du Government College.

Kumbakonam

1905 : Échoue à l'examen de fin de première année du Government College.

1906 : Entre au Pachaiyappa's College, Madras

Kumbakonam

1905 : Échoue à l'examen de fin de première année du Government College.

1906 : Entre au Pachaiyappa's College, Madras

Malade, retourne à Kumbakonam

1907 (Décembre) : Échoue à l'examen final du collège

Kumbakonam

1905 : Échoue à l'examen de fin de première année du Government College.

1906 : Entre au Pachaiyappa's College, Madras

Malade, retourne à Kumbakonam

1907 (Décembre) : Échoue à l'examen final du collège

1908 : fractions continues et séries divergentes

Kumbakonam

1905 : Échoue à l'examen de fin de première année du Government College.

1906 : Entre au Pachaiyappa's College, Madras

Malade, retourne à Kumbakonam

1907 (Décembre) : Échoue à l'examen final du collège

1908 : fractions continues et séries divergentes

1909 (Avril) : subit une opération

Kumbakonam

1905 : Échoue à l'examen de fin de première année du Government College.

1906 : Entre au Pachaiyappa's College, Madras

Malade, retourne à Kumbakonam

1907 (Décembre) : Échoue à l'examen final du collège

1908 : fractions continues et séries divergentes

1909 (Avril) : subit une opération

1909 (14 juillet) : se marie avec S Janaki Ammal (1900—1994)

Madras

1910 : rencontre Ramaswami Aiyar

Madras

1910 : rencontre Ramaswami Aiyar

1911 : premier article de mathématiques

Madras

1910 : rencontre Ramaswami Aiyar

1911 : premier article de mathématiques

1912 : employé de bureau, Port de Madras — Sir Francis Spring et Sir Gilbert Walker lui obtiennent une bourse de l'Université de Madras à partir de May 1913 pour 2 ans.

1912 Questions dans le Journal of the Indian Mathematical Society

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}} = ?$$

1912 Questions dans le Journal of the Indian Mathematical Society

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}} = ?$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\cdots}}}} = ?$$

Réponses de Ramanujan

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}} = 3$$

Réponses de Ramanujan

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}=3$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\cdots}}}}=4$$

“Démonstration” $n(n+2)$

$$(n+2)^2 = 1 + (n+1)(n+3)$$

“Démonstration” $n(n+2)$

$$(n+2)^2 = 1 + (n+1)(n+3)$$

$$n(n+2) = n\sqrt{1 + (n+1)(n+3)}$$

"Démonstration" $n(n+2)$

$$(n+2)^2 = 1 + (n+1)(n+3)$$

$$n(n+2) = n\sqrt{1 + (n+1)(n+3)}$$

$$f(n) = n(n+2)$$

“Démonstration” $n(n+2)$

$$(n+2)^2 = 1 + (n+1)(n+3)$$

$$n(n+2) = n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}$$

$$f(n) = n(n+2)$$

$$f(n) = n\sqrt{1+f(n+1)}$$

“Démonstration” $n(n+2)$

$$(n+2)^2 = 1 + (n+1)(n+3)$$

$$n(n+2) = n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}$$

$$f(n) = n(n+2)$$

$$f(n) = n\sqrt{1+f(n+1)}$$

$$f(n) = n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+f(n+2)}}$$

"Démonstration" $n(n+2)$

$$(n+2)^2 = 1 + (n+1)(n+3)$$

$$n(n+2) = n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}$$

$$f(n) = n(n+2)$$

$$f(n) = n\sqrt{1+f(n+1)}$$

$$f(n) = n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+f(n+2)}}$$

$$= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\cdots}}}$$

"Démonstration" $n(n+2)$

$$(n+2)^2 = 1 + (n+1)(n+3)$$

$$n(n+2) = n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}$$

$$f(n) = n(n+2)$$

$$f(n) = n\sqrt{1+f(n+1)}$$

$$f(n) = n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+f(n+2)}}$$

$$= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\cdots}}}$$

$$f(1) = 3$$

"Démonstrations" $n(n+3)$

$$(n+3)^2 = n + 5 + (n+1)(n+4)$$

"Démonstrations" $n(n+3)$

$$(n+3)^2 = n+5+(n+1)(n+4)$$

$$n(n+3) = n\sqrt{n+5+(n+1)(n+4)}$$

"Démonstrations" $n(n+3)$

$$(n+3)^2 = n+5+(n+1)(n+4)$$

$$n(n+3) = n\sqrt{n+5+(n+1)(n+4)}$$

$$g(n) = n(n+3)$$

"Démonstrations" $n(n+3)$

$$(n+3)^2 = n+5+(n+1)(n+4)$$

$$n(n+3) = n\sqrt{n+5+(n+1)(n+4)}$$

$$g(n) = n(n+3)$$

$$g(n) = n\sqrt{n+5+g(n+1)}$$

“Démonstrations” $n(n+3)$

$$(n+3)^2 = n+5+(n+1)(n+4)$$

$$n(n+3) = n\sqrt{n+5+(n+1)(n+4)}$$

$$g(n) = n(n+3)$$

$$g(n) = n\sqrt{n+5+g(n+1)}$$

$$g(n) = n\sqrt{n+5+(n+1)\sqrt{n+6+g(n+2)}}$$

“Démonstrations” $n(n+3)$

$$(n+3)^2 = n+5+(n+1)(n+4)$$

$$n(n+3) = n\sqrt{n+5+(n+1)(n+4)}$$

$$g(n) = n(n+3)$$

$$g(n) = n\sqrt{n+5+g(n+1)}$$

$$g(n) = n\sqrt{n+5+(n+1)\sqrt{n+6+g(n+2)}}$$

$$= n\sqrt{n+5+(n+1)\sqrt{n+6+(n+2)\sqrt{n+7+\cdots}}}$$

“Démonstrations” $n(n+3)$

$$(n+3)^2 = n+5+(n+1)(n+4)$$

$$n(n+3) = n\sqrt{n+5+(n+1)(n+4)}$$

$$g(n) = n(n+3)$$

$$g(n) = n\sqrt{n+5+g(n+1)}$$

$$g(n) = n\sqrt{n+5+(n+1)\sqrt{n+6+g(n+2)}}$$

$$= n\sqrt{n+5+(n+1)\sqrt{n+6+(n+2)\sqrt{n+7+\cdots}}}$$

$$g(1) = 4$$

Lettres de Ramanujan à M.J.M. Hill en 1912

Lettres de Ramanujan à M.J.M. Hill en 1912

$$1 + 2 + 3 + \cdots + \infty = -\frac{1}{12}$$

Lettres de Ramanujan à M.J.M. Hill en 1912

$$1 + 2 + 3 + \cdots + \infty = -\frac{1}{12}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \infty^2 = 0$$

Lettres de Ramanujan à M.J.M. Hill en 1912

$$1 + 2 + 3 + \cdots + \infty = -\frac{1}{12}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \infty^2 = 0$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \infty^3 = \frac{1}{120}$$

Réponses de M.J.M. Hill en 1912

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Renormalisation de séries divergentes

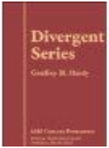
Leonhard Euler

(1707 – 1783)

Introductio in analysin infinitorum

(1748)

G.H. Hardy : Séries Divergentes (1949)



Niels Henrik Abel
(1802 – 1829)

Les séries divergentes sont l'invention du diable, c'est une honte de les utiliser pour quelque démonstration que ce soit.

Lettres à H.F.Baker et E.W.Hobson en 1912

Lettres à H.F.Baker et E.W.Hobson en 1912 : pas de réponses. . .

Lettre de Ramanujan à Hardy (16 Janvier 1913)

Je n'ai pas d'éducation universitaire, j'ai seulement suivi les cours à l'école. Après avoir quitté l'école j'ai occupé mes temps libres à faire des mathématiques. Je n'ai pas suivi la filière traditionnelle, mais j'ai choisi un chemin personnel. J'ai en particulier étudié les séries divergentes et les résultats que j'ai obtenus sont qualifiés par les mathématiciens ici d'étonnants.

Godfrey Harold Hardy (1877 – 1947)

John Edensor Littlewood (1885 – 1977)

Hardy et Littlewood

Lettre de Ramanujan à Hardy (16 janvier 1913)

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \frac{1}{4}$$

$$1 - 1! + 2! - 3! + \cdots = .596\cdots$$

Réponse de Hardy (8 février 1913)

J'ai été extrêmement intéressé par votre lettre et par les théorèmes que vous énoncez. Vous comprendrez cependant que, avant de juger sérieusement de la valeur de ce que vous avez fait, il soit essentiel que je voie les démonstrations de certaines de vos affirmations. De mon point de vue vos résultats tombent dans trois catégories :

Réponse de Hardy (8 février 1913)

J'ai été extrêmement intéressé par votre lettre et par les théorèmes que vous énoncez. Vous comprendrez cependant que, avant de juger sérieusement de la valeur de ce que vous avez fait, il soit essentiel que je voie les démonstrations de certaines de vos affirmations. De mon point de vue vos résultats tombent dans trois catégories :

(1) un certain nombre de résultats sont connus, ou se déduisent facilement de résultats connus ;

Réponse de Hardy (8 février 1913)

J'ai été extrêmement intéressé par votre lettre et par les théorèmes que vous énoncez. Vous comprendrez cependant que, avant de juger sérieusement de la valeur de ce que vous avez fait, il soit essentiel que je voie les démonstrations de certaines de vos affirmations. De mon point de vue vos résultats tombent dans trois catégories :

(1) un certain nombre de résultats sont connus, ou se déduisent facilement de résultats connus ;

(2) certains des résultats sont, autant que je sache, nouveaux et intéressants, mais intéressants plutôt par curiosité que par leur importance

Réponse de Hardy (8 février 1913)

J'ai été extrêmement intéressé par votre lettre et par les théorèmes que vous énoncez. Vous comprendrez cependant que, avant de juger sérieusement de la valeur de ce que vous avez fait, il soit essentiel que je voie les démonstrations de certaines de vos affirmations. De mon point de vue vos résultats tombent dans trois catégories :

(1) un certain nombre de résultats sont connus, ou se déduisent facilement de résultats connus ;

(2) certains des résultats sont, autant que je sache, nouveaux et intéressants, mais intéressants plutôt par curiosité que par leur importance

(3) certains résultats me semblent nouveaux et importants . . .

1913–1920

1913, 27 février : Nouvelle lettre de Ramanujan à Hardy

1913–1920

1913, 27 février : Nouvelle lettre de Ramanujan à Hardy

1913 : Visite de Neville en Inde – apporte une invitation de Hardy

1913–1920

1913, 27 février : Nouvelle lettre de Ramanujan à Hardy

1913 : Visite de Neville en Inde – apporte une invitation de Hardy

17 mars au 14 avril 1914, voyage vers Cambridge en Angleterre

1913–1920

1913, 27 février : Nouvelle lettre de Ramanujan à Hardy

1913 : Visite de Neville en Inde – apporte une invitation de Hardy

17 mars au 14 avril 1914, voyage vers Cambridge en Angleterre

Mai 1918 : Fellow of the Royal Society
(Novembre) Fellow of Trinity College, Cambridge.

1913–1920

1913, 27 février : Nouvelle lettre de Ramanujan à Hardy

1913 : Visite de Neville en Inde – apporte une invitation de Hardy

17 mars au 14 avril 1914, voyage vers Cambridge en Angleterre

Mai 1918 : Fellow of the Royal Society
(Novembre) Fellow of Trinity College, Cambridge.

27 février au 13 mars 1919, retour en Inde

Ramanujan – Taxi Cab Number 1729

Hardy : nécrologie de Ramanujan :

> *J'avais pris un taxi immatriculé 1729, et je lui ai fait remarquer que ce nombre ($7 \cdot 13 \cdot 19$) ne me paraissait pas spécialement intéressant. . .*

Ramanujan – Taxi Cab Number 1729

Hardy : nécrologie de Ramanujan :

J'avais pris un taxi immatriculé 1729, et je lui ai fait remarquer que ce nombre ($7 \cdot 13 \cdot 19$) ne me paraissait pas spécialement intéressant...

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

Ramanujan – Taxi Cab Number 1729

Hardy : nécrologie de Ramanujan :

> *J'avais pris un taxi immatriculé* 1729*, et je lui ai fait remarquer que ce nombre (*$7 \cdot 13 \cdot 19$*) ne me paraissait pas spécialement intéressant...*

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

$$12^3 = 1728, \qquad 9^3 = 729$$

Ramanujan – Taxi Cab Number 1729

Hardy : nécrologie de Ramanujan :

J'avais pris un taxi immatriculé 1729*, et je lui ai fait remarquer que ce nombre (*$7 \cdot 13 \cdot 19$*) ne me paraissait pas spécialement intéressant...*

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

$$12^3 = 1728, \qquad 9^3 = 729$$

$$50 = 7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$$

Ramanujan – Taxi Cab Number 1729

Hardy : nécrologie de Ramanujan :

> *J'avais pris un taxi immatriculé 1729, et je lui ai fait remarquer que ce nombre ($7 \cdot 13 \cdot 19$) ne me paraissait pas spécialement intéressant. . .*

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

$$12^3 = 1728, \qquad 9^3 = 729$$

$$50 = 7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$$

$$\begin{array}{rcl} 4\,104 & = & 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3 \\ 13\,832 & = & 2^3 + 24^3 = 18^3 + 20^3 \\ 40\,033 & = & 9^3 + 34^3 = 16^3 + 33^3 \\ & \vdots & \end{array}$$

Leonhard Euler (1707 – 1783)

$$59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4 = 635\,318\,657$$

Équations Diophantiennes

$$x^3 + y^3 + z^3 = w^3$$

Équations Diophantiennes

$$x^3 + y^3 + z^3 = w^3$$

$$(x, y, z, w) = (3, 4, 5, 6)$$

Équations Diophantiennes

$$x^3 + y^3 + z^3 = w^3$$

$$(x, y, z, w) = (3, 4, 5, 6)$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216 = 6^3$$

Équations Diophantiennes

$$x^3 + y^3 + z^3 = w^3$$

$$(x, y, z, w) = (3, 4, 5, 6)$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216 = 6^3$$

Solution paramétrique :

$$\begin{aligned} x &= 3a^2 + 5ab - 5b^2 & \qquad y &= 4a^2 - 4ab + 6b^2 \\ z &= 5a^2 - 5ab - 3b^2 & \qquad w &= 6a^2 - 4ab + 4b^2 \end{aligned}$$

Équation de Ramanujan – Nagell

Trygve Nagell (1895 – 1988)

$$x^2 + 7 = 2^n$$

Équation de Ramanujan – Nagell

Trygve Nagell (1895 – 1988)

$$x^2 + 7 = 2^n$$

$$\begin{array}{rcccr}
1^2 + 7 & = & 2^3 & = & 8 \\
3^2 + 7 & = & 2^4 & = & 16 \\
5^2 + 7 & = & 2^5 & = & 32 \\
11^2 + 7 & = & 2^7 & = & 128 \\
181^2 + 7 & = & 2^{15} & = & 32\,768
\end{array}$$

$x^2 + D = 2^n$

Nagell (1948) : pour $D = 7$, il n'y a pas d'autre solution

$x^2 + D = 2^n$

Nagell (1948) : pour $D = 7$, il n'y a pas d'autre solution

Apéry (1960) : pour $D > 0$, $D \neq 7$, l'équation $x^2 + D = 2^n$ a au plus 2 solutions.

$x^2 + D = 2^n$

Nagell (1948) : pour $D = 7$, il n'y a pas d'autre solution

Apéry (1960) : pour $D > 0$, $D \neq 7$, l'équation $x^2 + D = 2^n$ a au plus 2 solutions.

Exemples avec 2 solutions :

$$D = 23 : \qquad 3^2 + 23 = 32, \quad 45^2 + 23 = 2^{11} = 2\,048$$

$$D = 2^{\ell+1} - 1,\ \ell \geq 3 : 1 + D = 2^{\ell+1}, \quad (2^\ell - 1)^2 + 2^{\ell+1} - 1 = 2^{2\ell}$$

$x^2 + D = 2^n$

Beukers (1980) : dans tous les autres cas, il y a au plus une solution.

M. Bennett (1995) : théorie analogue dans le cas $D < 0$.

Partitions

$$
\begin{array}{llll}
1 & & & p(1) = 1 \\
2 & = & 1+1 & p(2) = 2 \\
3 & = & 2+1 = 1+1+1 & p(3) = 3 \\
4 & = & 3+1 = 2+2 = 2+1+1 & \\
 & = & 1+1+1+1 & p(4) = 5
\end{array}
$$

Partitions

$$\begin{array}{lcll} 1 & & & p(1) = 1 \\ 2 & = & 1+1 & p(2) = 2 \\ 3 & = & 2+1 = 1+1+1 & p(3) = 3 \\ 4 & = & 3+1 = 2+2 = 2+1+1 & \\ & = & 1+1+1+1 & p(4) = 5 \end{array}$$

$$p(5) = 7, \quad p(6) = 11, \quad p(7) = 15, \ldots$$

Partitions

$$\begin{array}{rcll} 1 & & & p(1)=1 \\ 2 & = & 1+1 & p(2)=2 \\ 3 & = & 2+1=1+1+1 & p(3)=3 \\ 4 & = & 3+1=2+2=2+1+1 & \\ & = & 1+1+1+1 & p(4)=5 \end{array}$$

$$p(5)=7, \quad p(6)=11, \quad p(7)=15, \ldots$$

MacMahon : table des 200 premières valeurs

Neil J. A. Sloane's encyclopaedia
http ://oeis.org/A000041

Ramanujan

$$p(5n+4) \quad \text{est un multiple de } 5$$

$$p(7n+5) \quad \text{est un multiple de } 7$$

$$p(11n+6) \quad \text{est un multiple de } 11$$

Ramanujan

$p(5n+4)$ est un multiple de 5

$p(7n+5)$ est un multiple de 7

$p(11n+6)$ est un multiple de 11

$p(25n+24)$ est un multiple de 25

$p(49n+47)$ est un multiple de 49

$p(121n+116)$ est un multiple de 121

Leonhard Euler (1707 – 1783)

$$1 + p(1)x + p(2)x^2 + \cdots + p(n)x^n + \cdots$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^n)\cdots}$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1}$$

Ramanujan Notebooks

Écrits de 1903 à 1914

Ramanujan Notebooks

Écrits de 1903 à 1914

Premier : 16 chapitres, 134 pages
Deuxième : 21 chapitres, 252 pages
Troisième : 33 pages

B.M. Wilson, G.N.Watson
Edités en 1957 à Bombay

The lost notebook

George Andrews, 1976

Bruce Berndt, 1985–87 (5 volumes)

Ramanujan sur Wikipedia

Erode December 22, 1887 — Chetput, (Madras), April 26, 1920

Landau–Ramanujan constant
Mock theta functions
Ramanujan prime
Ramanujan–Soldner constant
Ramanujan theta function
Ramanujan's sum
Rogers–Ramanujan identities

http://en.wikipedia.org/wiki/Srinivasa_Ramanujan

Lycée Jules Verne, Limours

Samedi 7 janvier 2012

Srinivasa Ramanujan

Michel Waldschmidt

http://www.math.jussieu.fr/∼miw/

mise à jour : 7 janvier 2012

Ramanujan (1887-1920)

G.H. Hardy (1877-1947)

Don Zagier (né en 1951)

Sarangapani Sannidhi Street

Gopuram Sarangapani Kumbakonam

Kumbakonam

Maison de Ramanujan

Buste de Ramanujan

Maison de Ramanujan

Maison de Ramanujan (puits)

Arrière de la maison de Ramanujan

Town High School, Kumbakonam

1903: G.S.Carr - *A synopsis of elementary results — a book on pure mathematics* (1886)

$5\,000$ formules

Town High School, Kumbakonam (jusqu'en 1904)

$$\sqrt{x} + y = 7, \qquad x + \sqrt{y} = 11$$

1903: G.S.Carr - *A synopsis of elementary results — a book on pure mathematics* (1886)

$\mathbf{5\,000}$ formules

Town High School, Kumbakonam (jusqu'en 1904)

$$\sqrt{x} + y = 7, \qquad x + \sqrt{y} = 11$$

$$x = 9, \qquad y = 4.$$

1904: Sri K. Ranganatha Rao Prize, Town High School, Kumbakonam (*obtient une bourse d'études*)
Government Arts College, Kumbakonam
Anglais, sanskrit, mathématiques, physiologie, histoire de la Grèce et de Rome

perd sa bourse en 1905.

1906: commis dans le port de Madras
1909: mariage avec Jannakammal (1899-1994)
1910: employé de bureau à Madras
1912: Madras Port Trust

Questions posées dans le Journal of the Indian Mathematical Society en 1912

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}=?$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\cdots}}}}=?$$

Réponses de Ramanujan

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}} = 3$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\cdots}}}} = 4$$

$$(n+2)^2 = 1 + (n+1)(n+3)$$

$$(n+2)^2 = 1 + (n+1)(n+3)$$

$$n(n+2) = n\sqrt{1 + (n+1)(n+3)}$$

$$(n+2)^2 = 1 + (n+1)(n+3)$$

$$n(n+2) = n\sqrt{1 + (n+1)(n+3)}$$

$$f(n) = n(n+2)$$

$$f(n) = n\sqrt{1 + f(n+1)}$$

$$(n+2)^2 = 1 + (n+1)(n+3)$$

$$n(n+2) = n\sqrt{1 + (n+1)(n+3)}$$

$$f(n) = n(n+2)$$

$$f(n) = n\sqrt{1 + f(n+1)}$$

$$f(n) = n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + f(n+2)}}$$

$$(n+2)^2 = 1 + (n+1)(n+3)$$

$$n(n+2) = n\sqrt{1 + (n+1)(n+3)}$$

$$f(n) = n(n+2)$$

$$f(n) = n\sqrt{1 + f(n+1)}$$

$$f(n) = n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + f(n+2)}}$$

$$= n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + (n+2)\sqrt{1 + (n+3)\cdots}}}$$

$$(n+2)^2 = 1 + (n+1)(n+3)$$

$$n(n+2) = n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}$$

$$f(n) = n(n+2)$$

$$f(n) = n\sqrt{1+f(n+1)}$$

$$f(n) = n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+f(n+2)}}$$

$$= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\cdots}}}$$

$$f(1) = 3$$

$$(n+3)^2 = n+5+(n+1)(n+4)$$

$$n(n+3) = n\sqrt{n+5+(n+1)(n+4)}$$

$$g(n) = n(n+3)$$

$$g(n) = n\sqrt{n+5+g(n+1)}$$

$$g(n) = n\sqrt{n+5+(n+1)\sqrt{n+6+g(n+2)}}$$

$$= n\sqrt{n+5+(n+1)\sqrt{n+6+(n+2)\sqrt{n+7+\cdots}}}$$

$$g(1) = 4$$

Lettre de Ramanujan à M.J.M. Hill en 1912

$$1 + 2 + 3 + \cdots + \infty = -\frac{1}{12}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \infty^2 = 0$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \infty^3 = \frac{1}{240}$$

Réponse de M.J.M. Hill en 1912

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3} n(n+1/2)(n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \big(n(n+1)/2\big)^2$$

Réponse de M.J.M. Hill en 1912

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3} n(n+1/2)(n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \bigl(n(n+1)/2\bigr)^2$$

Renormalisation de séries divergentes (Euler,. . .)

Lettres à H.F.Baker et E.W.Hobson en 1912: pas de réponses. . .

Lettre de Ramanujan à Hardy le 16 janvier 1913

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = -\frac{1}{4}$$
$$1 - 1! + 2! - 3! + \cdots = .596\cdots$$

Réponse de Hardy le 8 février 1913

Nouvelle lettre de Ramanujan le 27 février 1913

Cambridge: avril 1914 à février 1919

Ramanujan – Taxi Cab Number

$$\mathbf{1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3}$$

Ramanujan – Taxi Cab Number

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

Euler:

$$59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4 = 635\,318\,657$$

Ramanujan – Taxi Cab Number

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

$$\begin{aligned} 4\,104 &= 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3 \\ 13\,832 &= 2^3 + 24^3 = 18^3 + 20^3 \\ 40\,033 &= 9^3 + 34^3 = 16^3 + 33^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Équation de Ramanujan – Nagell

$$x^2 + 7 = 2^n$$

$$\begin{array}{rclcr}
1^3 + 7 & = & 2^3 & = & 8 \\
3^2 + 7 & = & 2^4 & = & 16 \\
5^2 + 7 & = & 2^5 & = & 32 \\
11^2 + 7 & = & 2^7 & = & 128 \\
181^2 + 7 & = & 2^{15} & = & 32\,768
\end{array}$$

Nagell (1948): pas d'autre solution

Nagell (1948): pas d'autre solution

Apéry (1960): pour $D > 0$, $D \neq 7$, l'équation $x^2 + D = 2^n$ a au plus 2 solutions.

Nagell (1948): pas d'autre solution

Apéry (1960): pour $D > 0$, $D \neq 7$, l'équation $x^2 + D = 2^n$ a au plus 2 solutions.

Examples avec 2 solutions:

$$D = 23: \qquad 3^2 + 23 = 32, \quad 45^2 + 23 = 2^{11} = 2\,048$$

$$D = 2^{\ell+1} - 1, \ell \geq 3: \quad (2^\ell - 1)^2 + 2^{\ell+1} - 1 = 2^{2\ell}$$

Nagell (1948): pas d'autre solution

Apéry (1960): pour $D > 0$, $D \neq 7$, l'équation $x^2 + D = 2^n$ a au plus 2 solutions.

Examples avec 2 solutions:

$$D = 23: \qquad 3^2 + 23 = 32, \quad 45^2 + 23 = 2^{11} = 2\,048$$

$$D = 2^{\ell+1} - 1, \ell \geq 3: \quad (2^\ell - 1)^2 + 2^{\ell+1} - 1 = 2^{2\ell}$$

Beukers (1980): au plus une solution dans les autres cas.

M. Bennett (1995): étude du cas $D < 0$.

Partitions

$$\begin{array}{lll} 1 & & \\ 2 & = & 1+1 \\ 3 & = & 2+1 = 1+1+1 \\ 4 & = & 3+1 = 2+2 = 2+1+1 \\ & = & 1+1+1+1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} p(1)=1 \\ p(2)=2 \\ p(3)=3 \\ \\ p(4)=5 \end{array}$$

$$p(5)=7, \quad p(6)=11, \quad p(7)=15, \ldots$$

MacMahon: table des 200 premières valeurs

Ramanujan:

$$\begin{array}{ll} p(5n+4) & \text{est multiple de } 5 \\ p(7n+5) & \text{est multiple de } 7 \\ p(11n+6) & \text{est multiple de } 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} p(25n+24) & \text{est multiple de } 25 \\ p(49n+47) & \text{est multiple de } 49 \\ p(121n+116) & \text{est multiple de } 121 \end{array}$$

Euler:

$$1 + p(1)x + p(2)x^2 + \cdots + p(n)x^n + \cdots$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^n)\cdots}$$

Euler:

$$1 + p(1)x + p(2)x^2 + \cdots + p(n)x^n + \cdots$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^n)\cdots}$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-1}$$

Fonction zêta de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}$$

Fonction zêta de Riemann:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-p^{-s}\right)^{-1}$$

Fonction tau de Ramanujan:

$$x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n.$$

Fonction zêta de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}$$

Fonction tau de Ramanujan:

$$x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \tau(p) p^{-s} + p^{11-2s}\right)^{-1}$$

Fonction zêta de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}$$

$$x(1-x)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Fonction tau de Ramanujan:

$$x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \tau(p) p^{-s} + p^{11-2s}\right)^{-1}$$

Congruences de Ramanujan:

$\tau(pn)$ est divisible par p pour $p = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 23.$

Aussi: congruences modulo 691 (numérateur du nombre de Bernoulli B_{12})

Conjecture de Ramanujan, démontrée par Deligne en 1974

$$|\tau(p)| < 2p^{11/2}$$

Hardy-Ramanujan:

pour presque tout entier n*, le nombre de facteurs premiers de* n *est* $\log \log n$*.*

Hardy-Ramanujan:

pour presque tout entier n*, le nombre de facteurs premiers de* n *est* $\log\log n$.

$$A_\epsilon(x) = \#\{n \le x \ ; \\ (1-\epsilon)\log\log n < \omega(n) < (1+\epsilon)\log\log n\}$$

Hardy-Ramanujan:

pour presque tout entier n, le nombre de facteurs premiers de n est $\log\log n$.

$$A_\epsilon(x) = \#\{n \le x\ ;\ (1-\epsilon)\log\log n < \omega(n) < (1+\epsilon)\log\log n\}$$

$$\frac{1}{x}A_\epsilon(x) \to 1 \quad \text{quand} \quad x \to \infty.$$

Nombres hautement composés
(Proc. London Math. Soc. 1915)

$$\begin{array}{rcccccccccc} n = & & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{12} & \mathbf{24} & \mathbf{36} & \mathbf{48} & \mathbf{60} & \mathbf{120}\ldots \\ d(n) = & & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{12} & \mathbf{16}\ldots \end{array}$$

Formules de Ramanujan pour π

$$\pi = \frac{9\,801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1\,103 + 26\,390n)}{(n!)^4 396^{4n}} \right)^{-1}$$

Formules de Ramanujan pour π

$$\pi = \frac{9\,801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1\,103 + 26\,390n)}{(n!)^4 396^{4n}} \right)^{-1}$$

$n = 0$: 6 décimales exactes $3,141592\dots$

$n \rightarrow n + 1$: 8 décimales de plus

1985: 17 millions de décimales de π *(1999: 200 milliards)*

Formules de Ramanujan pour π

$$\pi = \frac{9\,801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1\,103 + 26\,390n)}{(n!)^4 396^{4n}} \right)^{-1}$$

$n = 0$: 6 décimales exactes $3,141592\ldots$

$n \to n + 1$: 8 décimales de plus

1985: 17 millions de décimales de π *(1999: 200 milliards)*

Formules de Ramanujan pour $1/\pi$

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m}{m} \frac{42m + 5}{2^{12m+4}}.$$

Ramanujan Notebooks

Écrits de 1903 à 1914

Premier: 16 chapitres, 134 pages
Deuxième: 21 chapitres, 252 pages
Troisième: 33 pages

B.M. Wilson, G.N.Watson

Édités en 1957 à Bombay

The lost notebook: George Andrews, 1976

Bruce Berndt, 1985–87 (5 volumes)