Université P. et M. Curie (Paris VI) code UE : MMAT4020
Deuxième semestre 2010/2011 code Scolar : MM020

Master de sciences et technologies 1ère année - Mention : Mathématiques et applications 12 ects
Spécialité : Mathématiques Fondamentales

Théorie des nombres

Michel Waldschmidt

Exercices 12/01/2011

1. Dans le texte *De duobus hominibus habentibus panes* de Fibonacci (voir le texte de Marie–José Pestel [MJP] p. 51), un des hommes a deux pains, l'autre en a trois, le soldat donne 5 pièces. Dire quel est le partage juste si l'un des hommes a un nombre de pains égal à un entier $a \geq 0$, l'autre en a $b \geq 0$, et le soldat donne $a + b$ pièces ?

2. Déduire la conjecture de Pillai de la conjecture *abc*. Plus précisément, on admet la conjecture *abc* suivante :

> *Étant donné un nombre réel $\epsilon > 0$, il existe une constante $\kappa(\epsilon) > 0$ telle que, pour tout triplet (a, b, c) de nombres entiers premiers entre eux deux-à-deux et satisfaisant $a + b = c$, on a*
> $$c < \kappa(\epsilon) R(abc)^{1+\epsilon},$$
> *où $R(n)$ désigne le radical de n :*
> $$\textit{pour } n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \textit{ on a } R(n) = p_1 \cdots p_s.$$

En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $\lambda(\epsilon) > 0$ telle que, si x, y, p, q sont des entiers positifs satisfaisant $x^p \neq y^q$, alors

$$|x^p - y^q| \geq \lambda(\epsilon) \max\{x^p, y^q\}^{1-(1/p)-(1/q)-\epsilon}.$$

Déduire de ce dernier énoncé que la différence entre deux puissances successives (dans la liste des puissances parfaites, comprenant les carrés, les cubes, les puissances p-ièmes pour chaque $p \geq 2$) tend vers l'infini.

3. Soit A un ensemble d'entier positifs de densité supérieure positive :

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathrm{Card}\{n \in A \,;\, 1 \leq n \leq N\} > 0.$$

Vérifier

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = +\infty.$$

4. (*Suites récurrentes linéaires*). Soient $a_1, \ldots, a_k$ des nombres complexes. On considère l'ensemble $V = V(a_1, \ldots, a_k)$ des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que, pour tout $n \geq 0$, on ait

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \cdots + a_k u_n.$$

a) Vérifier que V est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ de dimension k. Montrer que l'application

$$(u_n)_{n\geq 0} \longmapsto (u_0, \ldots, u_{k-1})$$

est un isomorphisme de V sur $\mathbf{C}^k$.
b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes α tels que la suite $(\alpha^n)_{n\geq 0}$ appartienne à V [1].
c) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ des racines complexes distinctes du polynôme

$$P(X) := X^k - a_1 X^{k-1} - \cdots - a_k.$$

Vérifier que les m suites $(\alpha_j^n)_{n\geq 0}$ pour $j = 1, \ldots, m$ sont des éléments linéairement indépendants de V. Dans le cas où P n'a pas de racine multiple, en déduire une base de V sur $\mathbf{C}$.
d) On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \geq 0$. On désigne par $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ le nombre d'or. Vérifier que F_n est l'entier le plus proche de $\Phi^n/\sqrt{5}$.
e) Vérifier que pour tout $q \geq 1$ et tout $p \in \mathbf{Z}$,

$$\left|\Phi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{\sqrt{5}q^2 + (1/\sqrt{5})}.$$

f) Vérifier

$$\lim_{n\to\infty} F_{n-1}^2 \left|\Phi - \frac{F_n}{F_{n-1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

g) Donner le développement en fraction continue régulière des quotients F_{n+1}/F_n de deux nombres de Fibonacci consécutifs.

5.
a) Écrire le développement en fraction continue des nombres $\sqrt{D}$ pour $D = 2$, 3, 5, 6, 7 et 8.
b) Soient a et b deux entiers positifs. Écrire le développement en fraction continue de $\sqrt{a^2b^2 + 2b}$ et $\sqrt{a^2b^2 + b}$.
c) Quels sont les entiers positifs N qui sont à la fois carrés ($N = x^2$ avec x entier) et triangulaires ($N = m(m+1)/2$ avec m entier) ?

6 On utilise la notation

$$a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \frac{b_3|}{|a_3} + \cdots := a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}}$$

a) Étant donné deux suites $(a_0, a_1, \ldots)$ et $(b_1, b_2, \ldots)$ d'entiers avec $a_n \geq 1$, $b_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$ et $a_n \geq b_n$ pour tout n suffisamment grand, montrer que si on définit, pour $n \geq 0$,

$$u_n = a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \cdots + \frac{b_{n-1}|}{|a_{n-1}} + \frac{b_n|}{|a_n},$$

1. On convient que $\alpha^0 = 1$, même si $\alpha = 0$.

alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers un nombre réel x irrationnel.
On notera
$$x = a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \cdots + \frac{b_{n-1}|}{|a_{n-1}} + \frac{b_n|}{|a_n} + \cdots$$

b) Inversement, étant donné un nombre réel irrationnel x et une suite $b_1, b_2, \dots$ d'entiers positifs, vérifier qu'il existe une unique suite d'entiers $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ satisfaisant $a_n \geq b_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$ telle que
$$x = a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \cdots + \frac{b_{n-1}|}{|a_{n-1}} + \frac{b_n|}{|a_n} + \cdots$$

[MJP] Marie-José Pestel. *2000 ans d'énigmes mathématiques.* Gazette de la Société Mathématique de France, **126** (2010), 47-57.
http ://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2010/126/smf_gazette_126_47-57.pdf

Michel WALDSCHMIDT
Université Pierre et Marie Curie-Paris 6
Institut de Mathématiques de Jussieu IMJ UMR 7586
Théorie des Nombres Case Courrier 247
4 Place Jussieu
F–75252 Paris Cedex 05 France
e-mail : miw@math.jussieu.fr
URL : http://www.math.jussieu.fr/∼miw/