Université P. et M. Curie (Paris VI) code UE : MMAT4020
Deuxième semestre 2010/2011 code Scolar : MM020

Master de sciences et technologies 1ère année - Mention : Mathématiques et applications 12 ects
Spécialité : Mathématiques Fondamentales

Théorie des nombres

Michel Waldschmidt

Exercices 25/01/2011

Éléments de corrigé

1. Dans le texte *De duobus hominibus habentibus panes* de Fibonacci (voir le texte de Marie–José Pestel [MJP] p. 51), un des hommes a deux pains, l'autre en a trois, le soldat donne 5 pièces. Dire quel est le partage juste si l'un des hommes a un nombre de pains égal à un entier $a \geq 0$, l'autre en a $b \geq 0$, et le soldat donne $a+b$ pièces ?

Réponse. *Dans le cas $a/2 \leq b \leq 2a$, le premier doit recevoir $2a-b$ pièces, le second $2b-a$. Dans le cas $2a \leq b$, le second prend toutes les pièces du soldat et doit en recevoir $b-2a$ du premier. Dans le cas $a \geq 2b$, le premier prend toutes les pièces du soldat et doit en recevoir $a-2b$ du second.*

2. Déduire la conjecture de Pillai de la conjecture *abc*. Plus précisément, on admet la conjecture *abc* suivante :

> *Étant donné un nombre réel $\epsilon > 0$, il existe une constante $\kappa(\epsilon) > 0$ telle que, pour tout triplet (a, b, c) de nombres entiers premiers entre eux deux-à-deux et satisfaisant $a+b=c$, on a*
> $$c < \kappa(\epsilon) R(abc)^{1+\epsilon},$$
> *où $R(n)$ désigne le radical de n :*
> $$\textit{pour } n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \textit{ on a } R(n) = p_1 \cdots p_s.$$

En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $\lambda(\epsilon) > 0$ telle que, si x, y, p, q sont des entiers positifs satisfaisant $x^p \neq y^q$, alors

$$|x^p - y^q| \geq \lambda(\epsilon) \max\{x^p, y^q\}^{1-(1/p)-(1/q)-\epsilon}.$$

Déduire de ce dernier énoncé que la différence entre deux puissances successives (dans la liste des puissances parfaites, comprenant les carrés, les cubes, les puissances p-ièmes pour chaque $p \geq 2$) tend vers l'infini.

Réponse. *Dans un premier temps, on se donne ϵ dans l'intervalle $0 < \epsilon < 1$ et on admet la conjecture abc sous la forme*

$$c < \kappa(\epsilon) R(abc)^{1+\epsilon}.$$

Soient x, y, p, q des entiers positifs satisfaisant $x^p > y^q$. On pose $k = x^p - y^q$, on note d le pgcd de x^p et y^q et on pose $a = y^q/d$, $b = k/d$, $c = x^p/d$. Ainsi a, b, c sont des entiers premiers entre eux *satisfaisant $a + b = c$. Le radical R de abc est majoré par xyk/d. Comme $d^\epsilon \geq 1$ et $y < x^{p/q}$, on déduit de la conjecture abc :*

$$x^p < \kappa(\epsilon) x^{(1+\epsilon)(1+p/q)} k^{1+\epsilon},$$

ce qui s'écrit

$$x^{(1+\epsilon)(p-1-(p/q))-p\epsilon} < \kappa(\epsilon) k^{1+\epsilon}.$$

Comme

$$p - 1 - \frac{p}{q} - \epsilon\left(1 + \frac{p}{q}\right) > (1+\epsilon)\left(p - 1 - \frac{p}{q} - p\epsilon\right),$$

on obtient

$$k \geq \lambda(\epsilon)(x^p)^{1-(1/p)-(1/q)-\epsilon} \quad \text{avec} \quad \lambda(\epsilon) = \kappa(\epsilon)^{-1/(1+\epsilon)}.$$

On en déduit maintenant que pour chaque entier $k \geq 1$, l'ensemble des quadruplets (x, y, p, q) formés d'entiers tous ≥ 2 tels que $x^p - y^q = k$ est fini. Pour cela on considère d'abord le cas $p = q = 2$, et on minore $x^2 - y^2$ par $x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1$, ce qui montre que toute solution (x, y) de l'équation $x^2 - y^2 = k$ satisfait $y < x \leq (k+1)/2$. Supposons maintenant $(p, q) \neq (2, 2)$; alors $pq \geq p + q + 1$, donc

$$1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geq \frac{1}{6}.$$

La conséquence que nous venons d'établir de la conjecture abc, avec $\epsilon = 1/12$, implique que si $x^p - y^q = k$, alors

$$y^q < x^p < \lambda(1/12)^{-12} k^{12},$$

donc x^p et y^q sont bornés, et par conséquent x, y, p et q aussi.

La finitude, pour tout $k \geq 1$, du nombre de solutions (x, y, p, q) de l'équation $x^p - y^q = k$ équivaut à dire que la différence entre deux éléments consécutifs de la suite des puissances parfaites tend vers l'infini. Plus précisément, étant donnée une suite croissante $(x_n)_{n\geq 0}$ d'entiers positifs, les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $x_{n+1} - x_n$ tend vers l'infini avec n.
(ii) Pour tout entier positif k, l'ensemble $\{n \geq 0\ ;\ x_{n+1} - x_n = k\}$ est fini.
(iii) Pour tout entier positif k, l'ensemble $\{n \geq 0\ ;\ x_{n+1} - x_n \leq k\}$ est fini.
(iv) Pour tout entier positif k, l'ensemble $\{(n, m) \in \mathbf{Z}^2\ m > n \geq 0\ ;\ x_m - x_n = k\}$ est fini.
On applique ceci à la suite des puissances parfaites pour conclure.

3. Soit A un ensemble d'entier positifs de densité supérieure positive :

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathrm{Card}\{n \in A\ ;\ 1 \leq n \leq N\} > 0.$$

Vérifier

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Réponse. *Par hypothèse, il existe un nombre positif $\alpha \leq 1$ et une suite croissante d'entiers $N_1 < N_2 < \cdots$ telle que*

$$\mathrm{Card}\{n \in A\ ;\ 1 \leq n \leq N_k\} \geq \alpha N_k.$$

Soit ℓ un entier $> 2/\alpha$. Quitte à remplacer la suite N_k par une sous–suite, on peut supposer $N_{k+1} > \ell N_k$ pour $k \geq 1$. Alors

$$\mathrm{Card}\{n \in A\ ;\ N_k < n \leq N_{k+1}\} \geq \alpha N_{k+1} - N_k \geq \left(\alpha - \frac{1}{\ell}\right) N_{k+1} \geq \frac{1}{\ell} N_{k+1} \geq \frac{1}{\ell}(N_{k+1} - N_k).$$

On décompose l'intervalle $(N_k, N_{k+1}]$ en ℓ intervalles ; la somme des $1/n$ pour $N_k < n \leq N_{k+1}$ se trouve ainsi décomposée en ℓ sous–sommes, la plus petite est celle sur les entiers de l'intervalle $N_{k+1} - (1/\ell)(N_{k+1} - N_k) < n \leq N_{k+1}$, et cette somme est supérieure à celle des $1/n$ pour n dans A satisfaisant $N_k < n \leq N_{k+1}$:

$$\sum_{\substack{n \in A \\ N_k < n < N_{k+1}}} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{\ell} \sum_{N_k < n \leq N_{k+1}} \frac{1}{n}.$$

Par conséquent

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{n \in A \\ N_k < n \leq N_{k+1}}} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{\ell} \sum_{k \geq 1} \sum_{N_k < n \leq N_{k+1}} \frac{1}{n} = \frac{1}{\ell} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Remarque. *L'énoncé ne s'étend pas aux ensembles de nombres premiers de densité relative positive, c'est–à–dire aux sous–ensembles A de l'ensemble $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7 \ldots\}$ vérifiant*

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{1}{\pi(x)} \mathrm{Card}\{p \in A\ ;\ 1 \leq p \leq x\} > 0.$$

On a noté $\pi(x)$ la fonction qui compte les nombres premiers $\leq x$:

$$\pi(x) = \mathrm{Card}\{p \in \mathcal{P}\ ;\ 1 \leq p \leq x\} = \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq x}} 1.$$

En voici un exemple explicite. On définit, pour k entier positif, l'intervalle $I_k = [(1/2)e^{k^2}, e^{k^2}]$ et on prend pour A la réunion, sur $k \geq 1$, des $\mathcal{P} \cap I_k$. Nous allons vérifier que la densité relative de A dans $\mathcal{P}$ est positive mais la somme $\sum_{p \in A} 1/p$ converge. Pour le montrer, nous utilisons le théorème des nombres premiers qui donne, pour $x \to \infty$,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq x}} \frac{1}{p} = \log\log x + c_1 + \mathcal{O}(1/\log x)$$

avec une constante absolue $c_1 > 0$. On a

$$\pi(e^{k^2}) \geq \frac{e^{k^2}}{k^2}(1 - \epsilon_1) \qquad \text{et} \qquad \pi((1/2)e^{k^2}) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{k^2}}{k^2 - \log 2}(1 + \epsilon_2)$$

avec ϵ_1 et ϵ_2 (de même que ϵ_3 et ϵ_4 ci–dessous) fonctions positives de k qui tendent vers 0 pour k tendant vers l'infini ; mais

$$(1 + \epsilon_2)k^2 \leq (k^2 - \log 2)(1 + \epsilon_3),$$

donc

$$\pi(e^{k^2}) - \pi((1/2)e^{k^2}) \geq \frac{e^{k^2}}{2k^2}(1-\epsilon_4) \geq \frac{1}{3}\pi(e^{k^2})$$

pour k suffisamment grand, ce qui montre que l'ensemble A considéré a une densité supérieure relative positive.

D'autre part

$$\sum_{p\in I(k)} \frac{1}{p} = \sum_{p\leq e^{k^2}} \frac{1}{p} - \sum_{p\leq (1/2)e^{k^2}} \frac{1}{p}$$

avec

$$\sum_{p\leq e^{k^2}} \frac{1}{p} \leq \log(k^2) + c_1 + \frac{c_2}{k^2}$$

et

$$\sum_{p\leq (1/2)e^{k^2}} \frac{1}{p} \geq \log(k^2 - \log 2) + c_1 - \frac{c_3}{k^2}\cdot$$

On a noté c_2, c_3 (de même que c_4, c_5 ci–dessous) des constantes positives absolues. On utilise la majoration

$$\log \frac{k^2}{k^2 - \log 2} \leq \frac{c_4}{k^2}$$

pour en déduire

$$\sum_{p\in I(k)} \frac{1}{p} \leq \frac{c_5}{k^2}\cdot$$

5.
a)

$$\sqrt{2} = [1;\overline{2}], \quad \sqrt{3} = [1;\overline{1,2}], \quad \sqrt{5} = [2;\overline{4}], \quad \sqrt{6} = [2;\overline{2,4}], \quad \sqrt{7} = [2;\overline{1,1,1,4}], \quad \sqrt{8} = [2;\overline{1,4}].$$

b) et c) : *voir le texte* `http://www.math.jussieu.fr/ miw/articles/pdf/BamakoPell2010.pdf` § *1.1.*

6. *Voir le texte* `http://www.math.jussieu.fr/ miw/articles/pdf/BamakoPell2010.pdf` § *2.1 Proposition 18.*

Michel WALDSCHMIDT
Université Pierre et Marie Curie-Paris 6
Institut de Mathématiques de Jussieu IMJ UMR 7586
Théorie des Nombres Case Courrier 247
4 Place Jussieu
F–75252 Paris Cedex 05 France
e-mail : miw@math.jussieu.fr
URL : http://www.math.jussieu.fr/∼miw/