THESE de DOCTORAT
de
L'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité : **MATHEMATIQUES PURES - THEORIE DES NOMBRES**

présentée par

DANIEL DELBOS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de L'UNIVERSITE PARIS 6

CRITERES DE TRANSCENDANCE POUR LES FONCTIONS ENTIERES D'UNE OU PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES

soutenue le Jeudi 17 Octobre 2002

devant le jury composé de

M. Peter BUNDSCHUH	
M. Michel EMSALEM	
M. Michel LAURENT	Rapporteur
M. Michel WALDSCHMIDT	Directeur

REMERCIEMENTS

La présentation de cette thèse est l'occasion pour moi d'exprimer ma profonde gratitude à Michel WALDSCHMIDT qui m'a proposé ce sujet de recherche passionnant. Sans lui ce travail n'aurait pu aboutir. Il a toujours su, avec patience et gentillesse, me redonner confiance lors des inévitables moments de doute et ses conseils avisés m'ont permis, maintes fois, d'améliorer la compréhension de mon travail.

Ma reconnaissance va aussi à tous les enseignants qui m'ont fait partager leur passion pour les mathématiques ; je pense tout particulièrement à Raymond COUTY de l'université de Limoges qui a su lors de mes premières années de formation, par son talent de pédagogue, me donner le goût des mathématiques.

Je remercie aussi :

- Michel EMSALEM qui, avant que je ne travaille sur les critères de transcendance, m'a initié au problème inverse de Galois. Je le remercie pour toutes les connaissances acquises à ses cotés et lui suis reconnaissant pour l'honneur qu'il me fait en faisant partie du jury.

- Peter BUNSCHUH qui a accepté de faire partie du jury et dont les récents travaux sur les critères de transcendance pour les fonctions réelles ont motivé mes recherches.

- Michel LAURENT qui a accepté d'être rapporteur de cette thèse et d'être membre du jury. Ses travaux m'ont été d'une grande utilité.

- D. W. MASSER d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse.

- Patrice PHILIPPON dont les travaux sur les lemmes de zéros m'ont été très précieux.

Je remercie également mes parents et tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé à poursuivre mon travail de recherche ; cette thèse contient aussi une part d'eux même.

Enfin, je remercie CATHERINE, mon épouse, PAULINE et LOUISE, mes deux filles, à qui je dédie mes travaux, pour leur soutien inestimable.

Résumé : **C**ette thèse a pour objet la recherche de nouveaux critères de transcendance des valeurs prises par des fonctions entières d'une ou plusieurs variables complexes. On s'intéresse principalement à la construction de polynômes de fonctions qui s'annulent avec multiplicité sur des ensembles donnés. Nous démontrons notamment un analogue du critère de Schneider-Lang concernant les fonctions qui vérifient des équations différentielles. Nous en déduisons le théorème de Baker grâce à un lemme de zéros dans les groupes algébriques dû à P.Philippon. Un autre énoncé précise les conséquences arithmétiques de l'indépendance algébrique des fonctions $f(z_iw_j), (1 \leq i \leq \delta, 1 \leq j \leq \lambda)$ définies à partir d'une fonction f entière et transcendante dans $\mathbb{C}$. Nous en déduisons le théorème des six exponentielles et le théorème de Gelfond-Schneider.

Summary : The goal of this thesis is to produce new criteria of transcendence of values of analytic functions of one or several complex variables. We are chiefly interested in construction of polynomial functions satisfie vanishing conditions at given points. The more striking result is a analogue of a Criterion of Schneider-Lang for entire functions satisfying differential equations. We deduce Baker's theorem, thanks to a zero estimate in the context of linear commutative algebraic groups due to P.Philippon. We also study arithmetic consequences of the algebraic independence of functions $f(z_iw_j), (1 \leq i \leq \delta, 1 \leq j \leq \lambda)$ related with an entire transcendental function f in $\mathbb{C}$. We deduce the six exponentials Theorem and the Gelfond-Schneider Theorem.

Chapitre 1

Introduction.

1.1 Position du problème

Un nombre est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme non nul dont les coefficients sont des entiers relatifs. Un nombre est dit transcendant s'il n'est pas algébrique.

Soient $f_1, \ldots, f_s$ des fonctions entières dans $\mathbb{C}^d$ et $\mathcal{E}$ un sous-ensemble de $\mathbb{C}^d$; le problème que nous traitons peut s'énoncer simplement de la façon suivante : existe-t-il des conditions suffisantes portant sur $f_1, \ldots, f_s$ et $\mathcal{E}$ permettant d'affirmer que l'un des nombres $f_\sigma(\omega)$, $(1 \leq \sigma \leq s,\ \omega \in \mathcal{E})$ est transcendant ?
Tout énoncé apportant une réponse à cette question est un "critère de transcendance" même si les conditions qu'il propose ne sont que suffisantes et non nécessaires.

Cette thèse est consacrée à la recherche de nouveaux critères de transcendance des valeurs des fonctions entiéres à une ou plusieurs variables.

1.2 Rappel historique

Les critères de transcendance sont des réponses particulières au problème plus général suivant : *étant donnés $\mathcal{E}$ un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{C}^d$, $\mathcal{F}$ un sous-ensemble dense de $\mathbb{C}$ et f une fonction entière dans $\mathbb{C}^d$; à quelle condition l'image de $\mathcal{E}$ par f est-elle contenue dans $\mathcal{F}$?*
Ce type de recherche voisine donc avec l'étude des fonctions arithmétiques, c'est à dire des fonctions entières prenant des valeurs entières en des points à coordonnées entières, à laquelle elle emprunte parfois les méthodes.
En 1915, G. Polya [pol15] démontre que toute fonction f entière dans $\mathbb{C}$ qui n'est pas un polynôme et qui vérifie $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$, satisfait à :

$$\limsup_{R\to\infty} \log \mid f \mid_R / R \geq \log 2,$$

où, pour tout nombre réel $R > 0$, $\mid f \mid_R = \sup_{|z|\leq R} \mid f(z) \mid$.
Deux ans plus tard, G. H. Hardy ([Har17], [Har69]) obtient la meilleure estimation possible :

$$\limsup_{R\to\infty} 2^{-R} \mid f \mid_R \geq 1.$$

Il montre que 2^z est la fonction entière non polynômiale qui a le plus petit ordre de croissance parmi les fonctions entières qui envoient $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Depuis, plusieurs extensions de ce résultat ont été démontrées.
- Dans [Gra77] et [Gra78], F. Gramain étudie les fonctions entières qui envoient $\mathbb{N}^n$ dans l'anneau des entiers d'un corps de nombres.
- F. Gramain et M. Mignote étudient dans [GM82] et [GM83] le cas d'une fonction entière qui envoie un sous-groupe du corps des nombres algébriques complexes (en plusieurs variables d'un réseau dont les points ont des coordonnées algébriques) dans l'anneau des entiers d'un corps de nombres.

Pour démontrer son résultat, Polya utilise des séries d'interpolation ; il ouvre ainsi la voie aux travaux publiés en 1929 ([Gel29a], [Gel29b]) par Gelfond qui, par la même démarche, établissent l'existence d'une constante réelle δ (avec $0 < \delta < \frac{\pi}{2}(1 + e^{164/\pi})^{-2}$) telle que toute fonction entière transcendante f qui vérifie $f(\mathbb{Z}[i]) \subset \mathbb{Z}[i]$ vérifie aussi :

$$\limsup_{R \to \infty} \log \mid f \mid_R R^{-2} > \delta,$$

Par la suite, Gelfond adapte sa démonstration à l'étude de la fonction entière transcendante $f(z) = e^{\pi z}$ afin d'établir la transcendance du nombre e^π (cf. [Gel29b]) (Il remarque que, si e^π était un nombre algébrique, alors la fonction f prendrait en tous les points de $\mathbb{Z}[i]$ des valeurs algébriques dans le corps de nombres $\mathbb{Q}(e^\pi)$).

Inversement, les méthodes utilisées en théorie de la transcendance s'appliquent aussi parfois en théorie des fonctions arithmétiques ; un analogue du théorème de Polya pour les fonctions entières d'ordre de croissance fini est établi par M. Waldschmidt dans [Wal78] par la méthode de Schneider et P. Bundschuh démontre dans [Bund92], toujours par la méthode de Schneider, un analogue d'un théorème de Gelfond ([Gel33]).

1.3 Motivations

Une généralisation d'un cas réel

En 1996, P.Bundschuh ([Bun96a], [Bun96b]) axiomatise les méthodes employées par A. O. Gelfond et Yu. V. Linnik dans leur livre commun ([GL66]) *"Elementary method in the analytic theory of numbers"* pour démontrer, avec les seuls moyens de l'analyse réelle (Le théorème de Rolle et ses conséquences), les théorèmes de Hermite-Lindemann et de Gelfond-Schneider dans le cas des nombres réels. Il obtient ainsi, par la méthode de Gelfond, dans ([Bun96a]), un critère de transcendance réel analogue à celui de Schneider-Lang en une variable réelle (cf. Th. 1.2) et dans ([Bun96b]), par la méthode de Schneider, un critère de transcendance réel proche de celui obtenu par Lang par la méthode de Schneider (cf. Th. 1.8).
Les énoncés qu'il démontre concernent des fonctions $f_1, \ldots, f_s$ dont les ordres de croissance sont finis (cf. Déf. 2.1) et qui présentent la particularité de vérifier le lemme de zéros suivant : *Il existe une constante réelle positive γ telle que, quels que soient $(L_1, \ldots, L_s) \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_s] \setminus \{0\}$ dont les degrés partiels* $\deg_{X_i} P$ *sont respectivement $< L_i$, pour $(1 \leq i \leq s)$, la fonction $P(f_1, \ldots, f_s)$ admet au plus $\gamma L_1 \cdots L_s$ zéros dans $\mathbb{R}$.*

Leurs démonstrations consistent donc, pour l'essentiel, à construire un polynôme dont l'existence contredit ce lemme de zéros.

Les trois premières parties de cette thèse ont pour objectif de généraliser cette démarche aux fonctions entières à une ou plusieurs variables complexes et, par conséquent, de produire des énoncés d'existence de polynômes suffisamment précis pour entrer en contradiction avec un lemme de zéros lorsque nous voulons démontrer certains résultats de transcendance.

Un critère de transcendance en une variable

La quatrième et dernière partie de ce mémoire est consacrée à l'extension au domaine de la transcendance d'une méthode déjà utilisée par M. Waldschmidt dans [Wal97] et [Wal99] pour démontrer l'énoncé suivant :

Théorème 1.1 - *Soient α, β, ρ, c_1, c_2 des nombres réels positifs vérifiant*

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{\rho}.$$

Il existe un constante $\eta > 0$ vérifiant la propriété suivante. Soient X et Y deux sous-ensembles de $\mathbb{C}$ tels que :

$$\#X \cap D(0,R) \geq c_1 R^{\alpha} \text{ et } \#Y \cap D(0,R) \geq c_2 R^{\beta}$$

pour tout nombre réel $R > 0$ suffisamment grand. Soit f une fonction entière telle que :

$$\begin{array}{ll} (1) & \log \mid f \mid_R \leq \eta R^{\rho} \\ (2) & f(xy) \in \mathbb{Z} \text{ pour tout } (x,y) \in X \times Y. \end{array}$$

Alors, f est un polynôme.

1.4 Rappel des résultats antérieurs

Critères de transcendance

Les critères de transcendances concernent aussi bien les fonctions vérifiant des équations différentielles que les fonctions vérifiant des relations algébriques sans dérivation. Les premiers consistent en une généralisation de la méthode utilisée par Gelfond pour résoudre le septième problème de Hilbert (cf. [Hil00]) de la transcendance des nombres de la forme α^{β} pour α et β algébriques, les seconds de la méthode utilisée par Schneider pour résoudre le même problème.

1.4.1 Les généralisations de la méthode de Gelfond

Le critère de Schneider

Le premier critère de transcendance des valeurs des fonctions méromorphes, est dû à Schneider ([Sch34], voir aussi [Sch57] ou [Sch59], Chap. II, Th.12) en 1934. Sous des hypothèses convenables mais assez techniques, son résultat permet en l'appliquant à deux fonctions entières ou méromorphes f_1 et f_2 en une seule variable, d'ordres de croissance finis (cf. § 2.2.1, Def. 2.1) et algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$ (cf. § 2.2.2, Def. 2.2) , d'obtenir une majoration du cardinal de l'ensemble des points où elles prennent, ainsi que leurs dérivées, des valeurs algébriques.

Schneider en donne, par la suite (cf. [Sch57] ou [Sch59], Chap. II, Th.13) une version plus maniable dans le cas où les fonctions vérifient une équation différentielle particulière de la forme :

$$f^{(k)} = P(f, f^{(1)}, \ldots, f^{(k-1)}),$$

pour un entier naturel $k \geq 1$ et un polynôme P en k variables et à coefficients algébriques.

Il obtient alors, en généralisant la méthode que Gel'fond a utilisé pour résoudre le septième problème de Hilbert sur la transcendance des nombres de la forme α^{β}, une majoration du nombre de points où elles prennent des valeurs algébriques en fonction du degré D du corps de nombres les contenant et du maximum ϱ de leurs ordres de croissance par le nombre

$$(2\varrho + 1)(3D - 1/2).$$

Le critère de Schneider-Lang en une seule variable

Lang poursuit cette étude vers 1962 ([Lan66], [Lang93]) en généralisant, comme Schneider, la méthode utilisée par Gelfond pour établir le théorème de Gel'fond-Schneider ([Gel29a],[Gel29b]). Il retient une partie des hypothèses de Schneider (les fonctions considérées sont toujours entières ou méromorphes d'ordres de croissance finis), mais en imposant une condition de stabilité par la dérivation $\partial/\partial z$ de l'algèbre $K[f_1, f_2]$, K étant un corps de nombres.

Il obtient l'énoncé suivant (cf. [Lan66], Chap. III, §1, Th.1 ; [Lang93] ; [Wal74], Chap. 3, Th. 3.3.1) :

Théorème 1.2 (Critère de Schneider-Lang en une variable) - *Soient K un corps de nombres de degré D, ϱ un nombre réel > 0, $f_1, \ldots, f_s$ des fonctions d'ordres $\leq \varrho$.*
On suppose que la K-algèbre de fonctions $K[f_1, \ldots, f_s]$ est stable par la dérivation $\frac{\partial}{\partial z}$ et a un degré de transcendance ≥ 2.
Soient $w_1, \ldots, w_M$ des nombres complexes distincts qui ne sont pas des pôles des fonctions f_k, $(1 \leq k \leq d)$ et tels que $f_k(w_i) \in K$, $(1 \leq k \leq s,\ 1 \leq i \leq M)$.
Alors :

$$M \leq 2\varrho D.$$

Ce critère de Schneider-Lang en une variable contient le théorème de Hermite-Lindemann ([Her73], [lin82]) et le théorème de Gelfond-Schneider ([Gel34a], [Gel34b], [Sch34] et [Lan93], Appendix 1 : *The transcendence of e and π*) :

Théorème 1.3 (Hermite-Lindemann.) - *Si α est un nombre complexe algébrique non nul, alors $\exp(\alpha)$ est un nombre transcendant.*

Théorème 1.4 (Gelfond-Schneider) - *Soient α un nombre complexe différent de 1, et β un nombre complexe non rationnel. Alors l'un au moins des trois nombres α, β, α^{β} est transcendant.*

Le critère de Schneider-Lang en plusieurs variables

La méthode de Lang permet d'obtenir en plusieurs variables l'énoncé suivant (cf. [Lan66], Chap. VI, §1, th.1 ; [Wal87], Chap.5, Th. 5.1.1) :

Théorème 1.5 (Schneider-Lang sur un produit cartésien) *Soient K un corps de nombres de degré D, $\varrho_1, \ldots, \varrho_{d+1}$ des nombres réels strictement positifs, $f_1, \ldots, f_s$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}^d$. Nous supposons que la K-algèbre de fonctions $K[f_1, \ldots, f_s]$ est stable par les dérivations partielles $\frac{\partial}{\partial z_i}$, $(1 \leq i \leq d)$ et que les fonctions méromorphes $f_1, \ldots, f_{d+1}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathcal{K}$ et d'ordres respectivement inférieurs ou égaux à $\varrho_1, \ldots, \varrho_{d+1}$. Soit un produit cartésien $\underline{S} = S_1 \times \cdots \times S_d$ de sous-ensembles finis S_i de $\mathbb{C}$, $(1 \leq i \leq d)$ contenant chacun le même nombre d'éléments M et tel que chacune des fonctions f_k, $(1 \leq k \leq s)$, soit définie sur $\underline{S}$ et vérifie $f_k(\underline{S}) \subset K$.*
Alors,

$$M \leq d(\varrho_1 + \ldots + \varrho_{d+1})D.$$

Lang rapporte dans son "*Introduction to transcendental numbers*" ([Lang66]) la conjecture de Nagata, selon laquelle tout sous-ensemble de $\mathbb{C}^d$, sur lequel des fonctions méromorphes satisfont à des équations différentielles et prennent des valeurs dans un corps de nombres, est contenu dans une hypersurface algébrique. [1]

Le théorème de Bombieri

La conjecture de Nagata est démontrée, en 1970, par E. Bombieri (Voir [Bom70a] ; [Bom70b] et [Wal87], Chap.5, Th. 5.1.1).

Théorème 1.6 (Bombieri) - *Soient $\varrho_1, \ldots, \varrho_{d+1}$ des nombres réels strictement positifs, K un corps de nombres de degré D sur $\mathbb{Q}$ et $f_1, \ldots, f_s$ des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^d$, avec $s \geq d+1$.*
On suppose que :

(A) Les fonctions $f_1, \ldots, f_{d+1}$ sont respectivement d'ordres inférieurs ou égaux à $\varrho_1, \ldots, \varrho_{d+1}$.

(B) Les dérivations $\frac{\partial}{\partial z_i}$, $(1 \leq i \leq d)$, laissent stable l'algèbre $K[f_1, \ldots, f_s]$.

(C) Les fonctions $f_1, \ldots, f_{d+1}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.

Alors, l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}^d$ sur lequels les fonctions $f_1, \ldots, f_s$ sont régulières et prennent leurs valeurs dans K est contenu dans une hypersurface algébrique de degré au plus $dD(\varrho_1 + \cdots + \varrho_{d+1})$.

Ce n'est que bien plus tard, en 1980, que D. Bertrand et D.W.Masser (Voir [BM80] et [Wal00], Chapitre 4) établirent que le théorème de Baker ([Bak66]), qui généralise à la fois le théorème de Hermite-Lindemann et le théorème de Gelfond-Schneider, est une conséquence du critère de Schneider-Lang pour les produits cartésiens.

Théorème 1.7 (Baker (1966).) - *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres complexes linéairement indépendants sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et si les nombres $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$, alors les nombres $1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont linéairement indépendants sur le corps des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$.*

---

[1] Une hypersurface algébrique $\mathcal{S}$ de $\mathbb{C}^d$ est l'ensemble des zéros d'un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d]$. Le degré de $\mathcal{S}$ est le minimum atteint par les degrés des polynômes non nuls qui s'annulent sur $\mathcal{S}$.

1.4.2 Les généralisations de la méthode de Schneider

Le critère de Lang par la méthode de Schneider
La fonction exponentielle satisfait le théorème d'addition algébrique

$$f(z+z') = f(z)f(z'). \tag{1.1}$$

Dans sa démonstration du théorème de Gelfond-Schneider, Schneider l'utilise pour majorer la taille des valeurs de la fonction exponentielle sans faire intervenir de dérivation. Mais, si l'on veut étendre la méthode de Schneider à d'autres fonctions que la fonction exponentielle, elle ne peut être utilisée directement .
S.Lang ([Lan66] ; Th. 2, p12.) la remplace par une condition faisant intervenir l'ordre de croissance de la fonction considérée et permettant de majorer la taille des valeurs de cette fonction aux points d'une filtration d'un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Il obtient ainsi un critère de dépendance algébrique de deux fonctions entières sur $\mathbb{C}$. M.Waldschmidt en donne une généralisation dans [Wal74] (Th. 2.2.1, p50 ; références, p58.) au cas d'un nombre arbitraire de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes.
Dans l'énoncé ci-dessous nous notons $s(\alpha)$ la taille du nombre algébrique α.

Théorème 1.8 - *Soit $\mathcal{K}$ un corps de nombres, soient $f_1,\dots,f_s$ des fonctions entières dans $\mathbb{C}$ algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, d'ordres respectivement inférieurs ou égaux à $\rho_1,\dots,\rho_s$, avec $s>2$. Soient ℓ un nombre réel positif et $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles finis de $\mathbb{C}$, tels que :*
(A) $f_i(S_N)\subset\mathcal{K}$, $(1\le i\le s)$.
(B) Il existe un nombre réel $c_1>0$ tel que
$$\max_{z\in S_N} s(f_i(z)) \le c_1 N^{\rho_i},\ (1\le i\le s,\ N\in\mathbb{N}).$$
(C) Il existe un nombre réel $c_2>0$ tel que
$$\sharp S_N \le c_2 N^{\ell},\ (N\in\mathbb{N}).$$
(D) Il existe un nombre réel $c_3>0$ tel que
$$\max_{z\in S_N} \mid z \mid \le c_3 N,\ (N\in\mathbb{N}).$$
Alors
$$\ell \le \frac{\rho_1+\cdots+\rho_s}{s-1}.$$

Cet énoncé contient le théorème des six exponentielles dû à Lang (cf. [Lang66]) et à Ramachandra (cf. [Ram68]).

Théorème 1.9 (Théorème des six exponentielles) - *Soient ℓ et d deux entiers positifs satisfaisant $d\ell > d+\ell$. Soient $x_1,\dots,x_d$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et soient $y_1,\dots,y_\ell$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors l'un au moins des $d\ell$ nombres $\exp(x_iy_j)$, $(1\le i\le d,\ 1\le j\le \ell)$ est transcendant.*

Le critère de Ramachandra.
Ramachandra ([Ram68], Th. 1 p.74) démontre un résultat analogue pour des fonctions méromorphes algébriquement additives[2].
Soient f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ et $y\in\mathbb{C}$; y est un *point pseudo-algébrique de f* si : ou bien y est un pôle de f, ou bien $f(y)$ est un nombre algébrique.

[2] Une fonction f est algébriquement additive s'il existe un polynôme $P\in\mathbb{C}[T_1,T_2,T_3]$ à coefficients algébriques tel que $P(f(z_1+z_2),z_1,z_2)=0$ pour tout $(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3$

Théorème 1.10 (Ramachandra's δ-Theorem) - *Soient s un nombre entier ≥ 2, $\rho_1, \ldots, \rho_s$ des nombres réels > 0 et $f_1, \ldots, f_s$ fonctions méromorphes algébriquement indépendantes, algébriquement additives et d'ordres respectifs inférieurs ou égaux à $\rho_1, \ldots, \rho_s$. On définit :*

A) $\delta(f_1, \ldots, f_s)$ comme le supremum des nombres entiers ℓ tels qu'il existe ℓ nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants $y_1, \ldots, y_\ell$ qui sont respectivement des points pseudo-algébriques de chacune des fonctions $f_1, \ldots, f_s$.

B) $$\kappa = \begin{cases} 1 & \text{si les fonctions } f_1, \ldots, f_s \text{ ont une période commune non nulle,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors
$$\delta(f_1, \ldots, f_s) \leq \frac{\rho_1 + \cdots + \rho_s - \kappa}{d - 1}.$$

$\diamond$

1.5 Résultats principaux

1.5.1 Un analogue du critère de Schneider-Lang

Nous commençons par démontrer un énoncé trés général (cf. Th. 3.1) qui permet de majorer le rang d'une matrice dont les coefficients sont des nombres complexes algébriques images de fonctions entières par des fonctionnelles.
Nous en déduisons un analogue en plusieurs variables complexes des énoncés de Bundschuh (cf. Th. 4.1) que nous appliquons au chapitre 6 afin d'établir le résultat suivant (cf. [Wal00], Chap.1, Th. 1.16) :

Théorème 1.11 - *Soit $\mathcal{M} = (\lambda_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq d\\ 1\leq j\leq \ell}}$ une matrice dont les coefficients sont des logarithmes de nombres algébriques, vérifiant la condition :*
($\mathcal{I}$) Pour tout $(t_1,\dots,t_d) \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ et pour tout $(s_1,\dots,s_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \setminus \{0\}$,

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{\ell} t_i s_j \lambda_{i,j} \neq 0.$$

Alors, le rang de $\mathcal{M}$ est supérieur ou égal à $d\ell/(d+\ell)$.

Cet énoncé contient le théorème des six exponentielles (Th. 1.9) dû à Lang ([Lang66]) et Ramachandra ([Ram68]).

Au chapitre 7, nous déduisons du théorème 4.1 le théorème de Baker (Th. 1.7) par la méthode de Schneider.
Les démonstrations se font en deux temps : nous commençons par démontrer, en utilisant le théorème 4.1, l'existence d'un polynôme qui s'annule en certains points d'un groupe algébrique, puis nous concluons grâce à un lemme de zéros dans les groupes algébriques (cf. Th. 5.2 et Th. 5.3) dû à P. Philippon (cf. [Phi86], [Phi96]).

La troisième partie de cette thèse est consacrée à la démonstration, sous des hypothèses analogues à celles du théorème de Bombieri (Th. 1.6), du critère d'existence de polynômes ci-dessous.

Théorème 1.12 - *Soient s et d deux nombres entiers avec $s > d \geq 1$, K un corps de nombres de degré D engendré par les nombres algébriques $\alpha_1,\dots,\alpha_p$, $f_1,\dots,f_s$ des fonctions entières dans $\mathbb{C}^d$ et dont les ordres sont inférieurs ou égaux à un nombre réel ϱ strictement positif, $\mu > 0$ un nombre réel, M un nombre entier ≥ 1 et $\omega_1,\dots,\omega_M$ des éléments de $\mathbb{C}^d$.*
On suppose que :

(A) Les dérivations $\frac{\partial}{\partial z_i}$, $(1 \leq i \leq d)$, laissent stable la K-algèbre $K[f_1,\dots,f_s]$.
(B) $f_\sigma(\omega_k) \in K$, $(1 \leq \sigma \leq s,\ 1 \leq k \leq M)$.
(C) $\mu^s M > 2^s.e^d\left(1+\varrho s+\varrho s D(1+h)\right)^d$ avec $h = \sum_{q=1}^{p} h\left(\alpha_q\right)$.

Alors, il existe un entier $N_0 \geq 1$ ayant la propriété suivante :
Quel que soit l'entier $N \geq N_0$, il existe un polynôme Q_N non nul de $K[X_1,\dots,X_s]$

dont les degrés partiels en chacune des indéterminées X_σ, $(1 \le \sigma \le s)$ *sont* $\le \mu M^{1/s} N^{d/s}$ *et tel que la fonction* $F_N = Q_N(f_1, \ldots, f_s)$ *s'annule en chacun des points* $\omega_1, \ldots, \omega_M$ *avec une multiplicité* $\ge N$.

Nous en déduisons ensuite, au chapitre 10, le théorème de Baker par la méthode de Gelfond.

Comparaison des théorèmes 1.6 et 1.12

Le théorème 1.12 est une variante du théorème de Bombieri puisque dans les deux énoncés nous posons en hypothèses que les fonctions considérées sont entières et d'ordres finis et que les dérivations partielles laissent stable la K-algèbre $K[f_1, \ldots, f_s]$. Si l'hypothèse d'indépendance algébrique (C) du théorème 1.6 n'apparaît pas dans le théorème 1.12, cela tient au fait que des fonctions algébriquement dépendantes en vérifient trivialement la conclusion.
De plus, nous montrons au chapitre 10 que le théorème 1.12 permet, lui aussi, d'établir le théorème de Baker.

Toutefois, les deux théorèmes diffèrent clairement par leurs conclusions. Le théorème de Bombieri montre que l'ensemble des *points* où les fonctions prennent des valeurs algébriques est contenu dans l'ensemble des zéros d'un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d]$. Alors que le théorème 1.12 établit que ce sont les *images des points* où les fonctions prennent des valeurs algébriques, par l'application $\underline{f} : \mathbb{C}^d \longmapsto \mathbb{C}^s$ définie par $\underline{f}(\underline{w}) = (f_1(\underline{w}), \ldots, f_s(\underline{w}))$, qui annulent un certain polynôme non nul de $K[X_1, \ldots, X_s]$. Plus précisément, le théorème 1.12 montre l'existence d'une fonction de $K[f_1, \ldots, f_s]$ qui s'annule avec multiplicité en chacun des points concernés, ce qui le désigne comme une axiomatisation et une généralisation en plusieurs variables de la méthode de Gel'fond plutôt que de la méthode de Baker puisqu'à aucun moment les points $\omega_1, \ldots, \omega_M$ ne sont supposés alignés.

Les méthodes de démonstration sont, elles aussi, trés différentes : la démonstration du théorème de Bombieri repose sur la construction d'une fonction auxiliaire, alors que nous établissons le théorème 1.12 en utilisant un déterminant d'interpolation selon une méthode mise en oeuvre pour la première fois par Michel Laurent ([Lau89]). Nous pourrions cependant aussi démontrer le théorème 1.12 en utilisant une fonction auxiliaire construite à l'aide du principe des tiroirs. En revanche, il n'existe pas actuellement de démonstration publiée du théorème de Bombieri à l'aide d'un déterminant d'interpolation de Laurent. Même pour le cas particulier d'un produit cartésien (Critère de Schneider-Lang en plusieurs variables) la démonstration la plus récente ([Wal00], Chapitre 4) utilise une fonction auxiliaire.

D'autre part, Bombieri majore sa fonction auxiliaire par un lemme de Schwarz en plusieurs variables alors que nous n'utilisons que le classique lemme de Schwarz en un point complexe.

Enfin, au niveau des applications : lorsque nous voulons établir que des fonctions prennent des valeurs transcendantes sur un ensemble de points $\mathcal{E}$; nous sommes obligés (deuxième temps de la démonstration) d'avoir recours à un lemme de zéros. Le théorème de Bombieri, quant à lui, permet généralement de conclure directement, mais à condition que l'ensemble $\mathcal{E}$ contienne un produit cartésien dont le cardinal excède la borne $[dD(\varrho_1 + \cdots + \varrho_{d+1})]^d$.

1.5.2 Un critère de transcendance sur un produit cartésien.

Soit X et Y deux sous-ensembles infinis et dénombrables du corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. La quatrième partie de cette thèse est consacrée à l'étude des fonctions f entières dans $\mathbb{C}$ qui prennent des valeurs algébriques sur l'ensemble des produits $\{xy,\ (x,y) \in X \times Y\}$.
Nous obtenons, par la méthode de Schneider, l'énoncé suivant :

Théorème 1.13 - *Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{K}$ un corps de nombres, $(X_N)_{N\geq 1}$, $(Y_N)_{N\geq 1}$ deux suites strictement croissantes de sous-ensembles non vides et finis de $\mathbb{C}$, ϕ une application de $\mathbb{R}_{>0}$ dans $\mathbb{R}_{>0}$, $(r_N, \mu_N)_{N\geq 1}$ une suite d'éléments de $(\mathbb{R}_{>0})^2$, θ et c_0 deux nombres réels vérifiant $0 < \theta < 1$ et $c_0 > 0$. On suppose que la suite $(\mu_{N+1}/\mu_N)_{N\geq 1}$ est majorée et que, pour chaque entier $N \geq 1$, les conditions suivantes sont vérifiées.*
(i) $\#X_N = \#Y_N = \mu_N$.
(ii) $\sup\{\mid zw \mid,\ (z,w) \in X_N \times Y_N\} \leq r_N$ *et* $\lim_{n\to+\infty} r_N = +\infty$.
(iii) Pour tout $(z,w) \in X_N \times Y_N$, $f(zw) \in \mathcal{K}$ *et* $h\left(f(zw)\right) \leq c_0\mu_N^{\theta}$.
(iv) $\log \mid f \mid_{kr_N} \leq \phi(k)\mu_N^{\theta}$, $(k \in \mathbb{R}_{>0})$.
Alors la fonction f est un polynôme.

Nous en déduisons un analogue du théorème 1.1 ($h(\alpha)$ désignant la hauteur logarithmique de Weil (cf. § 2.1.2) d'un nombre algébrique α) :

Théorème 1.14 - *Soient $\alpha,\ \beta,\ \rho,\ k_0,\ c_1,\ c_2$ des nombres réels positifs vérifiant*

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\rho}.$$

Soient X et Y deux sous-ensembles de $\mathbb{C}$, K un corps de nombres et f une fonction entière telle que $f(xy) \in K$ pour tout $(x,y) \in X \times Y$.
On suppose que, pour tout nombre réel $R > 0$,

$$\begin{array}{ll} (1) & \#X \cap D(0,R) \geq c_1 R^{\alpha} \ \text{et}\ \#Y \cap D(0,R) \geq c_2 R^{\beta} \\ (2) & \max\{\log \mid f(u) \mid,\ h(f(u)),\ u \in D(0,R)\} \leq k_0 R^{\rho}. \end{array}$$

Alors, f est un polynôme.

Le théorème 14.1 est ensuite adapté aux fonctions entières d'ordres de croissance fini (cf. Th. 14.2) prenant leur valeurs dans le même corps de nombres, afin d'obtenir un critère général de transcendance pour les fonctions transcendantes à une seule variable, dont le théorème des six exponentielles (cf. Th. 1.9) est une conséquence.

Nous poursuivons avec un deuxième critère de transcendance (cf. Th. 13.1) qui pose, cette fois, en hypothèse que l'ensemble X et toutes les dérivées successives de f en chacun des produits $zw,\ (z,w) \in X \times Y$, sont contenus dans le même corps de nombres.
Lorsque les fonctions ont des ordres de croissance finis nous en déduisons une nouvelle version (cf. Th. 13.2), qui permet ensuite d'établir le théorème de Gelfond-Schneider (cf. Th. 13.3).

1.6 Contenu de la thèse

1.6.1 Construction de polynômes dans les parties 1, 2 et 3

L'inégalité de Liouville

A l'origine de la théorie des nombres transcendants les premières constructions de nombres transcendants se fondèrent sur le fait qu'en un certain sens l'approximation des nombres algébriques par des nombres rationnels "s'effectue mal" selon les termes de Liouville ; le théorème de Liouville ([Lio44], [Lio51] ; [Sch59], ,Chap. I, § 1, Th. 1 ; [Wal00], Chap. I, § 1, Th. 1.1) montre que si α est un nombre algébrique, il existe un nombre $c > 0$ ne dépendant que de α, tel que, pour tout nombre rationnel p/q différent de α, $\mid \alpha - p/q \mid > c/q^s$, où s est le degré de α.

Etendue au cas de plusieurs nombres algébriques, cette propriété est "l'inégalité de Liouville" (cf. Prop. 2.1, Inégalité (2.2)) ; considérons des nombres algébriques $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ et un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_q]$ tels que

$$P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \neq 0,$$

alors la quantité $\mid P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \mid$ se minore en fonction de

$$\sup_{|z_k| \leq 1,\ 1 \leq k \leq q} \mid P(z_1, \ldots, z_q) \mid,$$

des degrés de P en chacune des indéterminées et des hauteurs logarithmiques (cf. § 2.1.2) des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$.

Nous montrons ci-dessous que l'inégalité de Liouville peut être utilisée de manière plus ou moins directe pour obtenir des critères de transcendance.

Polynômes et critères de transcendance

Lorsque des fonctions $f_1, \ldots,\ f_s$ prennent des valeurs algébriques en chacun des points d'un ensemble $\mathcal{E}$, il en est de même des fonctions $\varphi_{\underline{\lambda}} = f_1^{\lambda_1} \cdots f_s^{\lambda_s}$, ($\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^s$). Les démonstrations de critères de transcendance se ramènent donc généralement à la question suivante : *Etant données une suite $\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots$ de fonctions définies dans $\mathbb{C}^d$ et une suite $\underline{\omega}_1,\ \underline{\omega}_2, \ldots$ d'éléments de $\mathbb{C}^d$, comment démontrer, sous certaines conditions, que l'un des nombres $\varphi_\lambda(\underline{\omega}_\mu)$,*
$(\lambda \geq 1,\ \mu \geq 1)$ est transcendant ?

Pour y répondre, nous disposons de la conséquence suivante (démontrée dans [Wal00], Lem. 2.1) de l'inégalité de Liouville[3] (cf. Prop. 2.1, inégalité (2.2)) :

Lemme 1.1 - *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ des nombres complexes. Supposons que, pour tout nombre réel $\kappa > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_q]$ et un nombre entier positif T tels que :*

$$\deg P + \log H(P) \leq T \ \text{et}\ 0 < \mid P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \mid \leq e^{-\kappa T}. \tag{1.2}$$

Alors, l'un au moins des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ est transcendant.

[3]Soit $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_m]$ nous notons $\deg P$ le degré total de P et $H(P)$ le plus grand de ses coefficients en valeur absolue.

Supposons les nombres $\varphi_\lambda(\underline{\omega}_\mu)$, $(\lambda \geq 1,\ \mu \geq 1)$ dans un même corps de nombres K. Dans ce cas, il existe des nombres algébriques $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ et des polynômes $P_{\lambda,\mu}$, $(\lambda \geq 1,\ \mu \geq 1)$ de $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_q]$ tels que

$$\varphi_\lambda(\underline{\omega}_\mu) = P_{\lambda,\mu}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q),\ (\lambda \geq 1,\ \mu \geq 1).$$

On peut se servir du Lemme 1.1 pour démontrer que, sous certaines conditions, ces hypothèses sont fausses, en établissant "directement" que, pour tout nombre réel $\kappa > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_q]$ et un nombre entier positif T vérifiant les inégalités (1.1) ; le lemme 1.1 permet de conclure (C'est ce que fait M. Waldschmidt pour démontrer le théorème de Gelfond-Schneider dans le cas réel dans ([Wal00], prop. 2.7) et le théorème de Hermite-Lindemann dans le cas réel dans ([Wal00], prop. 2.8)).

Dans ce cas là, l'objectif premier des démonstrations de transcendance est la construction de polynômes non nuls prenant des valeurs trés petites aux points où la transcendance est étudiée.

Mais on peut aussi, *et c'est notre démarche*, utiliser les inégalités de Liouville "indirectement" pour établir l'existence de polynômes à coefficients dans K qui s'annulent en chacun des nombres algébriques $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ et conclure la démonstration de transcendance en ayant recours à un "lemme de zéros".

La construction de ces polynômes se fait soit par l'utilisation d'un lemme dû à Siegel ([Sie29]) fondé sur le principe des tiroirs (cf. les lemmes 11.1 et 11.2), soit par l'utilisation, plus simple dans le cas qui nous occupe, d'un déterminant d'interpolation selon une méthode dûe à M. Laurent ([Lau89]). On part du fait que l'existence d'un polynôme $P \in K[X_1, \ldots, X_m] \setminus \{0\}$ vérifiant les relations $P(f_1, \ldots,\ f_s)(\underline{\omega}) = 0,\ (\underline{\omega} \in \mathcal{E})$, équivaut à l'existence d'une relation de dépendance linéaire entre les colonnes d'une matrice

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \varphi_{\lambda_1}(\underline{\omega}_{\mu_1}) & \ldots & \varphi_{\lambda_L}(\underline{\omega}_{\mu_1}) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_{\lambda_1}(\underline{\omega}_{\mu_{L'}}) & \ldots & \varphi_{\lambda_L}(\underline{\omega}_{\mu_{L'}}) \end{pmatrix} \text{ avec } (L, L') \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq L \leq L'.$$

Le problème se ramène ainsi à l'étude du rang de la matrice $\mathcal{M}$.

L'algèbre linéaire nous apprend que ce rang est $< L$ si tout déterminant Δ d'une sous-matrice $L \times L$ de $\mathcal{M}$ est nul.

Or, un tel déterminant peut être considéré, du point de vue algébrique, comme la valeur d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_q]$ en $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$, que l'inégalité de Liouville permet de minorer (s'il n'est pas nul) et, du point de vue analytique, ainsi que le remarque M. Laurent, comme la valeur d'une fonction entière à une variable complexe que le lemme de Schwarz permet de majorer.

La comparaison des minorations et majorations obtenues permet d'en déduire, pour L assez grand, la nullité de tout mineur $L \times L$ de $\mathcal{M}$.

La contradiction provient d'un lemme de zéros, c'est à dire d'un énoncé qui permet d'affirmer qu'il existe un nombre réel c ($c \geq 1$) pour lequel toute matrice

$$\begin{pmatrix} \varphi_{\lambda_1}(\underline{\omega}_{\mu_1}) & \dots & \varphi_{\lambda_L}(\underline{\omega}_{\mu_1}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_{\lambda_1}(\underline{\omega}_{\mu_{cL}}) & \dots & \varphi_{\lambda_L}(\underline{\omega}_{\mu_{cL}}) \end{pmatrix}$$

est de rang L.

1.6.2 Les méthodes employées dans la quatrième partie

Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$, soient X et Y des sous-ensembles infinis de $\mathbb{C}$. Nous supposons que les nombres $f(xy)$, $(x, y) \in X \times Y$ sont dans le même corps de nombres. Un lemme de Siegel fondé sur le principe des tiroirs (un déterminant d'interpolation donnerait le même résultat) nous permet de construire, sous certaines conditions, pour deux nombres entiers δ et λ convenables, une relation de dépendance linéaire non triviale entre les fonctions $f_{i,j}$, $(1 \leq i \leq \delta\ ,\ 1 \leq j \leq \lambda)$, entières sur $\mathbb{C}^{\delta+\lambda}$, définies chacune en $(\underline{z}, \underline{w}) = (z_1, \dots, z_\delta, \omega_1, \dots, \omega_\lambda)$ par $f_{i,j}(\underline{z}, \underline{w}) = f(z_i w_j)$. On en déduit d'aprés un énoncé récent dû à J.P.Bézivin (cf. Lem. 11.5) que la fonction f est un polynôme.

L'inégalité de Liouville (cf. Prop. 2.1, inégalité (2.2)) et un lemme de Schwarz sur les produits cartésiens (cf. Lem. 11.3) sont utilisés pour montrer qu'une fonction auxiliaire nulle sur une partie $X' \times Y'$ de $X \times Y$ est nulle sur $X \times Y$.

1.7 Remarques et prolongements

1) Les démonstrations effectuées dans la quatrième partie peuvent être allégées par l'emploi de déterminants d'interpolation.
2) Il est vraisemblable que les énoncés de la quatrième partie sont généralisables aux fonctions de plusieurs variables complexes de façon à contenir le théorème de Baker.
3) Les théorèmes que nous obtenons pour des fonctions entières peuvent être généralisés aux fonctions méromorphes vérifiant une propriété analogue à celle qu'énonce Lang dans ([Lang66], Chap. II, § 2, "AO 2").

1.8 Plan

Cette thèse est constituée de quatre parties dont les trois premières se déduisent les unes des autres dans leur ordre de présentation, la dernière partie peut être lue indépendamment des trois autres.

La première partie est composée des chapitres 3, 4.
Nous démontrons dans le troisième chapitre un résultat fondamental, le théorème 3.1, permettant dans certains cas de majorer le rang d'une matrice d'interpolation dont les coefficients sont les valeurs que prennent des fonctionnelles en des fonctions entières sur $\mathbb{C}^d$. Il repose, dans sa partie algébrique, sur la condition "arithmétique", notée "condition (AR)" et, dans sa partie analytique, sur la condition "lemme de

Schwarz", notée "condition (L.S.)".

Nous démontrons au quatrième chapitre un énoncé d'existence de polynômes liés aux ordres de croissance des fonctions utilisées : le théorème 4.1.

La deuxième partie est composé des chapitres 5,6 et 7.
Elle est consacrée aux démonstrations du théorème des six exponentielles et du du théorème de Baker par la méthode de Schneider.

La troisième partie est composée des chapitres 8, 9 et 10.
Nous montrons au chapitre 8 que lorsque les dérivations $\partial/\partial z_\sigma,\ 1 \leq \sigma \leq s$, laissent stable la K-algèbre de fonctions $K[f_1, \ldots, f_s]$ alors la condition arithmétique (AR.) du théorème 3.1 est vérifiées pour un bon choix de fonctionnelles. Ensuite, au chapitre 9, nous démontrons le théorème 1.9 en appliquant Le théorème 3.1.

Le chapitre 10 est consacré à une nouvelle démonstration du théorème de Baker par la méthode de Gelfond.

La quatrième partie est indépendante des trois autres. Elle est composée des chapitres 11, 12 et 13.
On y étudie la transcendance des valeurs que prend une fonction transcendante entière dans $\mathbb{C}$ sur l'ensemble des produits xy, $x \in X$, $y \in Y$, X et Y étant deux parties dénombrables de $\mathbb{C}$. Nous en déduisons au chapitre 12 le théorème des six exponentielles par la méthode de Schneider et au chapitre 13 le théorème de Gelfond-Schneider par la méthode de Gelfond.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Préliminaires algébriques

2.1.1 Notations algébriques

Les ensembles
Nous travaillons avec les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}$ définis ci-dessous.

$\diamond$ $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$.

$\diamond$ $\mathbb{Z}$ désigne l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}$.

$\diamond$ $\mathbb{Q}$ désigne le corps des nombres rationnels, $\mathbb{Q} = \{a/b, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

$\diamond$ $\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels défini comme le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue usuelle définie pour chaque nombre réel x par $\mid x \mid = x$ si $x \geq 0$ et $\mid x \mid = -x$ si $x \leq 0$.
La partie entière $\lceil x \rceil$ d'un nombre réel x est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.
Par définition nous avons toujours :

$$\lceil x \rceil \leq x < \lceil x \rceil + 1.$$

$\diamond$ Si E est un des quatre ensembles ordonnés précédents $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et si a est un nombre réel, nous définissons les sous-ensembles de E suivants $E_{\geq a} = \{x \in E,\ x \geq a\}$ et $E_{>a} = \{x \in E,\ x > a\}$.

$\diamond$ $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes $\mathbb{C} = \{a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ avec $i^2 = -1$, muni de la norme usuelle $\mid a + ib \mid = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$\diamond$ $\overline{\mathbb{Q}}$ désigne le corps des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$, c'est à dire l'ensemble des racines complexes des polynômes non nuls à une inconnue à coefficients dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ constitue donc l'ensemble des nombres transcendants.

$\diamond$ Si E est l'un des six ensembles précédents et n un entier, la notation E^n désigne le produit $E \times \cdots \times E = \{(x_1, \ldots, x_n), x_i \in E, (1 \leq i \leq n)\}$.
E^n est muni, sauf mention contraire, de la norme "max des coordonnées"

$$\mid (x_1, \ldots, x_n) \mid = \max\{|x_i|, (1 \leq i \leq n)\}$$

et nous notons

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\| = \sum_{1\le i\le n} |x_i|$$

On a donc, pour tout nombre complexe z, $\mid z \mid = \|z\|$.

$\diamond$ Si A est un ensemble fini nous notons $\sharp A$ le nombre d'éléments de A.

Une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^n$

Soient un entier $n \ge 1$ et deux éléments $\underline{u} = (u_1,\ldots,u_n)$, $\underline{U} = (U_1,\ldots,U_n)$ de l'ensemble $\mathbb{N}^n$.
Nous écrirons l'inégalité $\underline{u} \le \underline{U}$(resp. $\underline{u} < \underline{U}$) si et seulement si $u_i \le U_i$ (resp. $u_i < U_i$), pour tout entier i vérifiant $(1 \le i \le n)$.

Permutations

Soit L un entier≥ 1, nous notons $\mathcal{S}(L)$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\ldots,L\}$ et pour tout élément σ de $\mathcal{S}(L)$, $\epsilon(\sigma)$ la signature de σ.

Polynômes

Soit $P = \sum a_{\underline{\lambda}} X_1^{\lambda_1}\cdots X_m^{\lambda_m}$ un élément de $\mathbb{C}[X_1,...,X_m]$, le degré de P par rapport à la variable X_i est noté $\deg_{X_i} P$, le degré total de P est $\deg P = \sum_{i=1}^m \deg_{X_i} P$.
La hauteur $H(P)$ de P est le maximum des valeurs absolues de ses coefficients et la longueur de P est $\mathcal{L}(P) = \sum \mid a_{\underline{\lambda}} \mid$.
Nous désignons par $\mid P \mid_1$ le maximum des valeurs prises par la fonction $z \longmapsto \mid P(\underline{z}) \mid$ sur la boule unité fermée $\{\underline{z} \in \mathbb{C}^m, \mid \underline{z} \mid \le 1\}$.
Pour tout polynôme P, nous avons l'inégalité

$$\mid P \mid_1 \le \mathcal{L}(P).$$

Nous définissons le nombre $\chi(P)$ par

$$\begin{cases} \chi(P) = 0 \text{ si } P = 0. \\ \chi(P) = \log |P|_1 + \deg P \text{ si } P \neq 0. \end{cases}$$

Nous aurons donc toujours $|P|_1 \le \exp(\chi(P))$.

Matrices

Soit $\mathcal{A} = (a_{i,j})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le m}$ une matrice à coefficients dans un ensemble $\mathcal{E}$, elle possède n lignes et m colonnes.

2.1.2 Hauteur logarithmique absolue d'un nombre algébrique

Dans la partie arithmétique des démonstration nous utiliserons la notation $h(\alpha)$ pour désigner la hauteur logarithmique absolue de Weil ([Lan83]) d'un nombre algébrique α ; nous en rappelons la définition ci-dessous.

Polynôme irréductible et polynôme minimal

Soit α un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$ (nous dirons simplement que α est algébrique), le *polynôme irréductible de* α est le générateur unitaire du noyau de l'homomorphisme canonique de $\mathbb{Q}[X]$ dans $\mathbb{C}$ qui associe à tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ le nombre $P(\alpha)$.

Le degré du polynôme irréductible de α est appelé le *degré de* α, il est égal à la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}(\alpha)$. Le *polynôme minimal de* α est le polynôme irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ de coefficient dominant > 0 qui s'annule en α. On dit que α est un entier algébrique sur $\mathbb{Z}$ si son polynôme minimal est unitaire.

La mesure de Mahler d'un nombre algébrique

Soit α un nombre algébrique de degré d et de polynôme minimal $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$. On définit la mesure de Mahler (Voir [Mah76]) de P par

$$\mathcal{M}(P) = \exp\left(\int_0^1 \log \mid P(e^{2i\pi t}) \mid dt\right)$$

et la hauteur logarithmique absolue de α par

$$h(\alpha) = \frac{1}{d} \log \mathcal{M}(P)$$

Quand nous voudrons minorer la valeur non nulle d'un polynôme de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_q]$ en un point de $\overline{\mathbb{Q}}^q$ nous utiliserons les inégalités de Liouville ci-dessous.

Dénominateur et hauteur logarithmique d'un nombre algébrique

Soit α un nombre algébrique, notons $P = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ son polynôme minimal et N un dénominateur commun des coefficients de P. Nous remarquons que le polynôme $N^d P = \sum_{i=0}^d a_i N^{d-i} X^i$ s'annule en $N\alpha$ et donc que le nombre $N\alpha$ est entier sur $\mathbb{Z}$. Nous en déduisons que l'ensemble

$$D(\alpha) = \{n \in \mathbb{Z}; n\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}\}$$

est un idéal non nul de $\mathbb{Z}$.
Les éléments de l'ensemble $D(\alpha)$ sont appelés des dénominateurs du nombre algébrique α et le générateur positif de $D(\alpha)$ en tant qu'idéal de $\mathbb{Z}$ est le *dénominateur* de α ([Dur90]), on le note $\mathrm{den}(\alpha)$. Il est facile de majorer le dénominateur d'un nombre algébrique en fonction de sa hauteur logarithmique (cf. [Lan83]).

Lemme 2.1 - *Pour tout nombre algébrique α de degré d.*

$$\mathrm{den}(\alpha) \leq \exp(dh(\alpha)).$$

Inégalités de Liouville (cf. [Lan83])

Proposition 2.1 - *Soit P un polynôme non nul, en q variables à coefficients entiers rationnels. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ des nombres complexes algébriques. Alors*

$$h(P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)) \leq \log \mid P \mid_1 + \sum_{i=1}^q \deg_{X_i} P.h(\alpha_i) \tag{2.1}$$

Si, de plus, $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ est différent de zéro, alors,en notant
$D = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) : \mathbb{Q}]$, on a

$$\log \mid P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \mid \geq -D \log \mid P \mid_1 - D \sum_{i=1}^q \deg_{X_i} P.h(\alpha_i) \tag{2.2}$$

2.2 Préliminaires analytiques

2.2.1 Notations

Les ensembles $\mathcal{H}(\mathbb{C}^d)$ et $\mathcal{F}(\mathbb{C}^d)$ - Soit d un entier, $\mathcal{H}(\mathbb{C}^d)$ désigne la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions entières dans $\mathbb{C}^d$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{C}^d)$ désigne la $\mathbb{C}$-algèbre des formes linéaires de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^d)$ dans $\mathbb{C}$.

Polydisques de $\mathbb{C}^d$ - Soit R un nombre réel> 0, le polydisque fermé $D(0, R)$ de rayon R de $\mathbb{C}^d$ est défini par :

$$D(0,R) = \{\underline{z} = (z_1, \ldots, z_d),\ \underline{z} \in \mathbb{C}^d / \mid \underline{z} \mid \leq R\}.$$

Soit $\underline{R} = (R_1, \ldots, R_d)$ un élément de $(\mathbb{R}_{>0})^d$ nous notons :

$$D(0,\underline{R}) = \{\underline{z} = (z_1, \ldots, z_d),\ \underline{z} \in \mathbb{C}^d / \mid z_i \mid \leq R_i,\ (1 \leq i \leq d)\}.$$

Si pour tout nombre réel $R > 0$ nous posons $\underline{\tilde{R}}$ l'élément de $(\mathbb{R}_{>0})^d$ défini par $\underline{\tilde{R}} = (R, \ldots, R)$, alors

$$D(0,\underline{R}) = D_d(0,R).$$

Maximum sur un polydisque.
Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathcal{H}(C^d)$, R un nombre réel > 0 tel que le polydisque fermé $D(0, R)$ soit contenu dans Ω et $\underline{R} = (R_1, \ldots, R_d)$ un élément de $(\mathbb{R}_{>0})^d$ tel que $D(0, \underline{R})$ soit contenu dans Ω.
Nous notons :

$$\mid f \mid_R = \sup\{\mid f(\underline{z}) \mid,\ \underline{z} \in D(0,R)\}$$

et

$$\mid f \mid_{\underline{R}} = \sup\{\mid f(\underline{z}) \mid,\ \underline{z} \in \mathbb{C}^d,\ \mid z_i \mid \leq R_i,\ (1 \leq i \leq d)\}.$$

Les dérivations partielles
Les opérateurs de dérivations partielles selon les d variables respectives $z_1, \ldots, z_d$ sont $\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_d}$.
Soit $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, nous notons

$$\partial^{\underline{k}} = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_d}\right)^{k_d}.$$

Puissances, combinaisons, factorielles, somme des coordonnées
Soient s un nombre entier ≥ 0 et $\underline{t} = (t_1, \ldots, t_d)$ un élément de $\mathbb{N}^d$. Nous notons :

$$\frac{s!}{\underline{t}!} = \frac{s!}{t_1! \cdots t_d!}.$$

Soient $\underline{z} \in \mathbb{C}^d$, $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ et $\underline{\tau} \in \underline{k} - \mathbb{N}^d$, $\underline{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_d)$
(dans ses conditions : $k_i - \tau_i \in \mathbb{N}, (1 \leq i \leq d)$). Nous posons :

$$\underline{z}^{\underline{k}} = z_1^{k_1}\cdots z_d^{k_d},\ \underline{k}! = k_1!\cdots k_d!,\ \|\underline{k}\| = \sum_{i=1}^{d} k_i \text{ et } \binom{\underline{k}}{\underline{\tau}} = \prod_{i=1}^{d}\binom{k_i}{\tau_i},$$
$$\text{avec } \binom{k_i}{\tau_i} = \frac{k_i!}{(k_i-\tau_i)!\tau_i!}.$$

Ordre de croissance d'une fonction entière

Nous utilisons la définition suivante de l'ordre de croissance d'une fonction entière (équivalente à celle qu'utilise Lang dans ([Lang66], Chap. II, p 9)).

Définition 2.1 - *Soient f un élément de $\mathcal{H}(C^d)$ et ϱ un nombre réel ≥ 0. La fonction f est d'ordre inférieur ou égal à ϱ s'il existe deux nombres réels positifs α et β vérifiant, pour tout nombre réel positif R,*

$$|\ f\ |_R \leq \beta\exp(\alpha R^{\varrho}).$$

2.2.2 Fonctions algébriquement indépendantes

Définition 2.2
1) Soient $\mathcal{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $f_1,\dots,f_s$ des fonctions définies dans $\mathbb{C}^d$.
Les fonctions $f_1,\dots,f_s$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathcal{K}$ s'il existe un polynôme non nul P de $\mathcal{K}[X_1,\dots,X_s]$ tel que la fonction $F = P(f_1,\dots,f_s)$ soit identiquement nulle dans $\mathbb{C}^d$.
2) Une fonction f définie sur $\mathbb{C}$ est algébrique si et seulement si les fonctions f et z sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{C}$; la fonction f est transcendante dans le cas contraire.

Des fonctions sont dites algébriquement indépendantes sur $\mathcal{K}$ si elles ne sont pas algébriquement dépendantes sur $\mathcal{K}$.

Remarques

1) Si les fonctions entières $f_1,\dots,f_s$ sont algébriquement dépendantes sur un corps $\mathcal{K}$, alors, quel que soit l'élément z de $\mathbb{C}^d$, les nombres complexes $f_1(z),\dots,f_s(z)$ sont algébriquement dépendants sur $\mathcal{K}$; la réciproque est fausse.

2) Dire que les fonctions sont algébriquement indépendantes sur un corps $\mathcal{K}$ ou bien sur une extension algébrique de $\mathcal{K}$ revient au même.

3) Pour les questions qui nous occupent, considérer des fonctions algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ ou sur $\mathbb{C}$ ne fait pas grande différence (cf. aussi le lemme 5.1 où nous donnons d'autres arguments).

En effet, considérons $\omega_1,\dots,\omega_M$ des points de $\mathbb{C}^d$. Pour étudier la nature arithmétique de $f_1,\dots,f_s$ des fonctions entières dans $\mathbb{C}^d$ en chacun des points $\omega_1,\dots,\omega_M$, on commence généralement par supposer que les valeurs $f_i(\omega_k)$, $(1\leq i\leq s,\ 1\leq k\leq M)$ sont contenues dans le même corps de nombres $\mathcal{K}$, puis on suit l'un des deux schémas de démonstration ci-dessous :

1^{er} *schéma* - On construit par un lemme de Siegel une fonction auxiliaire de la forme

$$\Phi = \sum_{0 \leq \underline{\lambda} < \underline{L}} a_{\underline{\lambda}} \prod_{i=1}^{s} f_i^{\lambda_i}, \ a_{\underline{\lambda}} \in \mathcal{K},$$

qui s'annule, éventuellement avec multiplicité, en $\omega_1, \ldots, \omega_M$,

$2^{ème}$ *schéma* - On utilise un déterminant d'interpolation de la forme

$$\Delta = \left| \prod_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)^{\tau_{p,j}} \prod_{i=1}^{s} f_i^{\lambda_{q,i}}(\omega_{k_p}) \right|_{(1 \leq p,q \leq L_0)}.$$

Le nombre entier L_0 désignant le rang de la matrice

$$\mathcal{M}(\underline{T}, M, \underline{L}) = \left(\prod_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)^{\tau_j} \prod_{i=1}^{s} f_i^{\lambda_i}(\omega_k) \right)_{(0 \leq \underline{\tau} < \underline{T},\ 1 \leq k \leq M \ ; \ 0 \leq \underline{\lambda} < \underline{L})},$$

d'indice de ligne $(\underline{\tau}, k)$ et d'indice de colonne $\underline{\lambda}$.

Dans le premier schéma l'hypothèse d'indépendance algébrique sur $\mathcal{K}$ est suffisante (quels que soient les paramètres) pour s'assurer de la non nullité de la fonction auxiliaire que l'on va construire ; il en est de même dans le deuxième schéma pour pouvoir affirmer que le rang de la matrice $\mathcal{M}(\underline{T}, M, \underline{L})$ n'est pas majoré par un nombre indépendant de $\underline{T}, M, \underline{L}$. Enfin, comme le corps de nombres $\mathcal{K}$ est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$, l'indépendance algébrique sur $\mathcal{K}$ équivaut à l'indépendance algébrique sur $\mathbb{Q}$.

4) Pour une fonction entière d'une variable, dire qu'elle est algébrique équivaut à dire que c'est un polynôme.

2.2.3 Le lemme de Schwarz en dimension un

Nous commençons par définir l'ordre d'un zéro d'une fonction d'une seule variable complexe (cf. [Car85], §4, p 41 et[Rud80], 10.18.th., p 203).

Définition 2.3 *Soient f une fonction d'une variable complexe analytique dans un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant l'origine et k un entier ≥ 1. La fonction f admet l'origine pour zéro d'ordre $\geq k$ si et seulement si la fonction f admet un développement en série de Taylor à l'origine $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ dont les k premiers coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ sont nuls.*

Cela équivaut à dire que la fonction g définie par $g(z) = f(z)/z^k$ se prolonge en l'origine en une fonction holomorphe.

Nous étendons la définition précédente aux points du plan complexe autres que l'origine.

Définition 2.4 *Soient z_0 un nombre complexe , f une fonction d'une variable complexe analytique dans un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant z_0 et k un nombre entier ≥ 1 ; nous dirons que f admet un zéro d'ordre $\geq k$ en z_0 si et seulement si la fonction g définie par $g(z) = f(z + z_0)$, admet l'origine pour zéro d'ordre $\geq k$.*

Rappelons le Lemme de Schwarz en une variable pour un seul point (cf. [Car85], §3, p 84 et [Rud80], 12.2.th, p 232).

Lemme 2.2 - *Soient r et R deux nombres réels vérifiant $0 < r < R$, k un entier ≥ 1 et f une fonction continue dans le disque fermé $\{z \in \mathbb{C},$
$\mid z \mid \leq R\}$ et holomorphe dans le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C}, \mid z \mid < R\}$. Supposons que f admette l'origine pour zéro d'ordre $\geq k$. Alors*

$$\mid f \mid_r \leq \left(\frac{R}{r} \right)^{-k} \mid f \mid_R .$$

Démonstration du Lemme 2.2
D'aprés les hypothèses, la fonction f admet dans le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C}, \mid z \mid < R\}$ un développement en série de Taylor à l'origine $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ dont les k premiers coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ sont nuls. Il s'ensuit que la fonction g définie par $g(z) = f(z)/z^k$ est holomorphe dans le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C}, \mid z \mid < R\}$ de plus, comme nous supposons $r < R$, nous avons $\mid g \mid_r \leq \mid g \mid_R$. Le principe du maximum (cf. [Car85], III §2, remarque p. 84) permet de plus d'affirmer qu'il existe deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que :
$\mid z_1 \mid = r$, $\mid z_2 \mid = R$ et $\mid g(z_1) \mid = \mid g \mid_r$, $\mid g(z_2) \mid = \mid g \mid_R$; alors on a $\mid f(z_1) \mid = \mid f \mid_r$, $\mid f(z_2) \mid = \mid f \mid_R$ et par suite : $\mid f \mid_r / r^k \leq \mid f \mid_R / R^k$, d'où le résultat.

2.2.4 Zéro d'une multiplicité donnée en plusieurs variables

Nous utiliserons les définitions suivantes en dimension d :

Définition 2.5 *Soient f une fonction entière sur $\mathbb{C}^d$ et $\underline{z}_0 = (z_1, \ldots, z_d)$ un point de $\mathbb{C}^d$.*
(A) Soit $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ un élément de $(\mathbb{N}_{>0})^d$.
La fonction f s'annule en $\underline{z}_0$ avec une multiplicité $\geq \underline{k}$ si pour tout élément $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_d)$ de $\mathbb{N}^d$ satisfaisant à $s_i \leq k_i - 1$, $(1 \leq i \leq d)$,

$$\prod_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \right)^{s_i} f(\underline{z}_0) = 0.$$

(B) Soit K un entier ≥ 1.
La fonction f s'annule en $\underline{z}_0$ avec une multiplicité $\geq K$ si pour tout élément $\underline{s}$ de $\mathbb{N}^d$ satisfaisant à $\|\underline{s}\| \leq K - 1$, $(1 \leq i \leq d)$,

$$\prod_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \right)^{s_i} f(\underline{z}_0) = 0.$$

Remarque :
Pour $d = 1$ les définitions (A) et (B) se confondent.

2.2.5 Les inégalités de Cauchy

Soit un entier $d \geq 1$, un élément $\underline{R} = (R_1, \ldots, R_d)$ de $(\mathbb{R}_{>0})^d$ et une fonction f analytique dans le polydisque $D(0, \underline{R})$ de $\mathbb{C}^d$.
Le développement de la fonction f en série entière en un point $\underline{z}$ de $D(0, \underline{R})$ s'écrit :

$$f(\underline{z}) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} a_{\underline{k}} \underline{z}^{\underline{k}} \text{ avec } a_{\underline{k}} = \frac{\partial^{\underline{k}} f(0)}{\underline{k}!}.$$

L'identité de Parseval (cf. [Rud80], 4.18.th, p 81) permet d'établir l'inégalité suivante :

$$\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} | a_{\underline{k}} |^2 \, \underline{R}^{2\underline{k}} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 | f(R_1 e^{2i\pi\theta_1}, \ldots, R_d e^{2i\pi\theta_d}) |^2 \, d\underline{\theta} \leq | f |_{\underline{R}}^{\,2}.$$

Par suite, quel que soit $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, nous avons : $| a_{\underline{k}} | \, \underline{R}^{\underline{k}} \leq | f |_{\underline{R}}$. On obtient ainsi les "inégalités de Cauchy" en l'origine pour la fonction f sur le polydisque $D(0, \underline{R})$:

$$| \partial^{\underline{k}} f(0) | \leq \frac{\underline{k}!}{\underline{R}^{\underline{k}}} | f |_{\underline{R}} \; .$$

Lemme 2.3 - *Soient f un fonction entière dans $\mathbb{C}^d$, R un nombre réel > 0, $\underline{k} = (k_1, ..., k_d)$ un élément de $\mathbb{N}^d$ et $\underline{u}$ un élément de $\mathbb{C}^d$. Alors*

$$| \partial^{\underline{k}} f(\underline{u}) | \leq \frac{\underline{k}!}{R^{\|\underline{k}\|}} | f |_{R+|\underline{u}|} \; .$$

Démonstration du Lemme 2.3
On applique les inégalités de Cauchy en l'origine à la fonction $\tilde{f}_{\underline{u}}$ définie par : $\tilde{f}_{\underline{u}}(\underline{z}) = f(\underline{u} + \underline{z})$, $(\underline{z} \in D(0; \underline{\tilde{R}}) \subset \mathbb{C}^d)$. On obtient ainsi l'inégalité :

$$| \partial^{\underline{k}} \tilde{f}_{\underline{u}}(0) | \leq \frac{\underline{k}!}{R^{\|\underline{k}\|}} | \tilde{f}_{\underline{u}} |_{\underline{\tilde{R}}} \; .$$

Or,

$$\begin{array}{rcl} | \tilde{f}_{\underline{u}} |_{\underline{\tilde{R}}} & = & \sup\{| f(\underline{z} + \underline{u}) |, | \underline{z} | \leq R\} \\ & \leq & \sup\{| f(\underline{w}) |, | \underline{w} | \leq R + | \underline{u} |\} \\ & \leq & | f |_{R+|\underline{u}|} \; . \end{array}$$

Ceci démontre le lemme 2.3. On en déduit le corollaire suivant :

Lemme 2.4 *Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}^d$, R un nombre réel > 0, $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ un élément de $\mathbb{N}^d$. Alors :*

$$| \partial^{\underline{k}} f |_R \;\; \leq \;\; \frac{\underline{k}!}{R^{\|\underline{k}\|}} | f |_{2R} \; .$$

◇ ◇ ◇ ◇ ◇
◇ ◇ ◇ ◇ ◇

Première partie

Rang de matrices et existence de polynômes

Chapitre 3

Majoration du rang d'une matrice

La partie transcendante des démonstrations de nos résultats ultérieurs se trouve réunie dans ce court chapitre.

3.1 Deux conditions

Soient d un entier ≥ 1, $\tilde{\Phi}$ un ensemble fini et ordonné de fonctions appartenant à $\mathcal{H}(\mathbb{C}^d)$ (cf. 2.2.1), $\tilde{\Psi}$ un ensemble dénombrable et ordonné (non nécessairement fini) de fonctionnelles appartenant à $\mathcal{F}(\mathbb{C}^d)$ (cf. 2.2.1). On définit la matrice

$$\mathcal{M}(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi}) = (\Psi(\Phi))_{\Psi \in \tilde{\Psi}, \Phi \in \tilde{\Phi}},$$

les lignes et les colonnes de $\mathcal{M}(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$ étant rangées respectivement dans l'ordre des éléments de $\tilde{\Psi}$ et de $\tilde{\Phi}$.
Notation.
Nous désignons dans ce chapitre par la lettre L le plus petit des deux nombres $\sharp\tilde{\Psi}$ et $\sharp\tilde{\Phi}$.

Nous nous proposons d'abord de montrer que le rang de la matrice $\mathcal{M}(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$ est strictement inférieur à L lorsque les deux conditions (L.S.) et (A.R.), ci-dessous, sont satisfaites. Ce résultat nous permettra ensuite d'extraire de $\mathcal{M}(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$ une matrice carrée de dimensions $L \times L$ dont le déterminant est égal à zéro.

3.1.1 La condition (L.S.), comme "Lemme de Schwarz"

Soit H un nombre réel positif. Nous dirons que le couple $(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$ vérifie la condition (L.S.) relative au nombre réel H si :
Tout mineur de dimensions $L \times L$ de la matrice $\mathcal{M}(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$ a un déterminant de valeur absolue $\leq \exp(-H)$.

3.1.2 La condition (AR.), comme "Arithmétique"

Soient $\mathcal{K}$ un corps de nombres et c et h deux nombres réels.
Nous dirons que le couple $(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$ vérifie la condition (AR.) pour le couple de réels (c, h) et le corps de nombres $\mathcal{K}$, s'il existe un entier naturel q, des éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$

de $\mathcal{K}$ et, pour chaque couple $(\Psi, \Phi) \in \tilde{\Psi} \times \tilde{\Phi}$, un polynôme $P_{\Psi,\Phi}$ appartenant à $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_q]$ tels que :

(A) $\Psi(\Phi) = P_{\Psi,\Phi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$.

(B) $c \geq \log \mid P_{\Psi,\ \Phi} \mid_1$ et $c \geq \max\{\deg_{X_i} P_{\Psi,\Phi},\ 1 \leq i \leq q\}$.

(C) $h \geq \sum_{k=1}^{q} h(\alpha_k)$.

3.2 Enoncé du résultat

Avec les notations précédentes, nous obtenons :

Théorème 3.1 (Majoration du rang d'une matrice) - *Soient un corps de nombres $\mathcal{K}$ de degré D sur $\mathbb{Q}$ et trois nombres réels H, c et h strictement positifs. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites.*

$(\mathcal{C}_1)$ Le couple $(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$ vérifie la condition (L.S.) relative au nombre réel H.

$(\mathcal{C}_2)$ Le couple $(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$ vérifie la condition (AR.) pour le couple de réels (c, h) et le corps de nombres $\mathcal{K}$.

$(\mathcal{C}_3)$ $H/L > D \log L + Dc(1 + h)$.

Alors la matrice $\mathcal{M}(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$ est de rang strictement inférieur à L.

Remarque

Les conditions (L.S.) et (AR.) sont indépendantes de la façon dont les éléments des ensembles $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Psi}$ sont rangés. Leurs conséquences, dont le résultat ci-dessus fait partie, en sont donc, elles aussi, totalement indépendantes. Remarquons, d'autre part, que tout changement de l'ordre de rangement les éléments des ensembles $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Psi}$ correspond à une permutation des lignes et des colonnes de la matrice $\mathcal{M}(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$, ce qui ne change pas son rang. Il est donc inutile pour appliquer le théorème 3.1 de préciser l'ordre choisi pour définir la matrice $\mathcal{M}(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$.

3.3 Démonstration

Une majoration de $\log \mid \Delta \mid$

Considérons un mineur $(\Psi_k(\Phi_p))_{1 \leq k,p \leq L}$ de dimension $L \times L$, de $\mathcal{M}(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$ et notons Δ son déterminant ; en convenant de poser $\log 0 = -\infty$, la condition (C_1) s'écrit :

$$\log \mid \Delta \mid \leq -H.$$

La condition (C_3) entraîne donc l'inégalité suivante.

$$\log \mid \Delta \mid < -L(D \log L + Dc(1 + h)). \tag{3.1}$$

Existence d'un polynôme

Or, Δ peut s'écrire sous la forme développée

$$\Delta = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(L)} \epsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{L} \Psi_k(\Phi_{\sigma(k)}).$$

Mais, d'aprés la condition $(\mathcal{C}_2)$, il existe des éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ de $\mathcal{K}$ et un ensemble fini de polynômes $\{P_{\Psi,\Phi},\ (\Psi,\Phi) \in \tilde{\Psi} \times \tilde{\Phi}\}$ de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_q]$ tels que

$$\Psi(\Phi) = P_{\Psi,\Phi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q),\ \forall (\Psi,\Phi) \in \tilde{\Psi} \times \tilde{\Phi}.$$

Nous pouvons donc écrire grâce à l'égalité (3.2)

$$\Delta = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(L)} \epsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{L} P_{\Psi_k, \Phi_{\sigma(k)}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q).$$

Il s'ensuit que le polynôme Q de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_q]$ défini par

$$Q = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(L)} \epsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{L} P_{\Psi_k, \Phi_{\sigma(k)}}$$

vérifie l'égalité

$$\Delta = Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_q). \tag{3.2}$$

Une conséquence de l'inégalité de Liouville lorsque $\Delta \neq 0$

Dans le cas où Δ est différent de zéro, l'égalité (3.2) nous permet d'appliquer l'inégalité de Liouville (Proposition 2.1, inégalité 2.2) au polynôme Q au point $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ de $\overline{\mathbb{Q}}^q$.

Nous obtenons :

$$\log |\Delta| \geq -D \log \mid Q \mid_1 - D \sum_{i=1}^{q} \deg_{X_i} Q.h(\alpha_i). \tag{3.3}$$

Mais, d'aprés la définition du polynôme Q, nous pouvons écrire

$$\mid Q \mid_1 \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(L)} \prod_{k=1}^{L} \mid P_{\Psi_k, \Phi_{\sigma(k)}} \mid_1 \ \text{ et } \ \deg_{X_i} Q \leq \sum_{k=1}^{L} \deg_{X_k} P_{\Psi,\Phi},\ (1 \leq i \leq q),$$

et la condition (C_2) implique les inégalités :

$$\mid Q \mid_1 \leq L! \exp(cL) \ \text{ et } \ \deg_{X_i} Q \leq cL.$$

Par suite, en majorant $L!$ par L^L, on déduit de l'inégalité (3.3) :

$$\log \mid \Delta \mid \geq -LD \left(\log L + c(1+h) \right). \tag{3.4}$$

Conclusion

Les inégalités (3.1) et (3.4) étant incompatibles nous venons d'établir que tout mineur de dimensions $L \times L$ de la matrice $\mathcal{M}(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$ à son déterminant nul. La matrice $\mathcal{M}(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$ est donc de rang $< L$.

◇◇◇◇◇

Chapitre 4

Une première extension des résultats de Bundschuh

4.1 Le résultat principal

Dans ce chapitre nous généralisation en plusieurs variables complexes les critères de transcendance démontrés par Bundschuh en une variable réelle (cf. [Bund96]) ; nous considérons pour cela des fonctions $f_1, \ldots, f_s$ entières dans $\mathbb{C}^d$ d'ordres de croissance finis (cf. Définition 2.1), ainsi qu'une suite $(\underline{\omega_k})_{k\geq 1}$ de points de $\mathbb{C}^d$ qui vérifie, pour une nombre réel positif ℓ, la propriété de répartition suivante :

$(\mathcal{C}(\ell))$: Il existe un nombre réel $c_0 > 0$ tel que, pour chaque nombre entier $N \geq 1$, $\max\left\{\mid \underline{\omega_k} \mid,\ 1 \leq k \leq \lceil N^\ell \rceil\right\} \leq c_0 N$.

Nous supposons de plus que les valeurs des fonctions $f_1, \ldots, f_s$ en chacun des termes de la suite $(\underline{\omega_k})_{k\geq 1}$ appartiennent à un corps de nombres K. Alors, sous certaines conditions, le théorème 3.1 s'applique aux ensembles de fonctions $\tilde{\Phi}_{\underline{b},\mu}(N)$ et de fonctionnelles $\tilde{\Psi}_{\underline{a},\ell}(N)$ définis ci-dessous.

Notations

Soient $(\underline{\omega_k})_{k\geq 1}$ une suite de points de $\mathbb{C}^d$, μ un nombre réel positif, $(\underline{a}, \underline{b})$ un élément de $\mathbb{N}^d \times (\mathbb{R}_{\geq 0})^d$.

Pour chaque nombre entier $N \geq 1$, nous définissons les ensembles respectifs de fonctions et de fonctionnelles :

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_{\underline{b},\mu}(N) &= \{\Phi_{\underline{\lambda}} = f_1^{\lambda_1} \cdots f_s^{\lambda_s} \ ; \ \underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \mathbb{N}^s,\ \lambda_\sigma < \lceil \mu N^{b_\sigma} \rceil,\ (1 \leq \sigma \leq s)\},\\
\hat{\Psi}_{\underline{a},\ell}(N) &= \{\Psi_{\underline{\tau},k} \ ; \ \underline{\tau} \in \mathbb{N}^d,\ k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq \lceil N^\ell \rceil,\ \tau_i < N^{a_i},\ (1 \leq i \leq d)\},
\end{aligned}$$

avec, pour tout $(k, \underline{\tau}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d$,

$$\Psi_{\underline{\tau},k}(\Phi) = \partial^{\underline{\tau}}(\Phi)(\underline{\omega_k}),\ (\Phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^d)).$$

Nous obtenons plusieurs énoncés généraux d'existence de polynômes et nous clôturons ce chapitre par la démonstration du théorème ci-dessous.

Théorème 4.1 - *Soient un corps de nombres K, des nombres réels $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$ strictement positifs , des fonctions $f_1, \ldots, f_s$ entières dans $\mathbb{C}^d$ dont les ordres sont respectivement inférieurs ou égaux à $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$. Considérons une suite $(\underline{\omega}_k)_{k\geq 1}$ de points de $\mathbb{C}^d$, $(c_N, h_N)_{N\geq 1}$ une suite d'éléments de $(\mathbb{R}_{\geq 0})^2$, un nombre réel μ tel que $0 < \mu < 1$, $(\ell, \underline{a})$ un élément de $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{N}^d$.*
On définit le nombre réel $\omega = (\varrho_1 + \cdots + \varrho_s + \ell + \|\underline{a}\|)/s$, ainsi que le s-uplet de nombres réels $\underline{b} = (\omega - \varrho_\sigma)_{1\leq\sigma\leq s}$.
On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites.
(C_1) Pour chaque nombre entier $N \geq 1$, le couple $(\hat{\Psi}_{\underline{a},\ell}(N), \hat{\Phi}_{\underline{b},\mu}(N))$ vérifie la condition (AR.) relativement au couple de nombres réels (c_N, h_N) et au corps de nombres K.
(C_2) La suite $(\underline{\omega}_k)_{k\geq 1}$ vérifie la condition de répartition $(\mathcal{C}(\ell))$.
(C_3) $(\ell + \|\underline{a}\|)(s - d) > (\varrho_1 + \cdots + \varrho_s)d$ et $\ell + \|\underline{a}\| > d \max\{a_k, 1 \leq k \leq d\}$.
(C_4) $\lim_{N\to\infty} c_N(1 + h_N)N^{-(\ell+\|\underline{a}\|)/d} = 0$.
Alors, il existe un nombre entier N_0 vérifiant la propriété suivante : quel que soit le nombre entier $N \geq N_0$, il existe un polynôme non nul P_N de $K[X_1, \ldots, X_s]$ dont le degré partiel en chacune des indéterminée X_σ vérifient $deg_{X_\sigma} P_N < \lceil \mu N^{\omega-\varphi_\sigma} \rceil$ et tel que la fonction $F_N = P_N(f_1, \ldots, f_s)$ s'annule sur l'ensemble $\{\underline{\omega}_k,\ 1 \leq k \leq \lceil N^\ell \rceil\}$ avec une multiplicité $\geq (N^{a_i})_{1\leq i\leq d}$.

Nous démontrons le théorème 4.1 en plusieurs étapes :
Nous commençons, tout d'abord, par montrer que la condition (L.S.) est vérifiée pour les produits de fonctions d'ordres de croissance finis, nous utilisons pour cela une méthode de majoration des déterminants d'interpolation essentiellement dûe à M. Laurent (cf. [Wal00]).
Nous obtenons ainsi la proposition 4.1.
Ensuite, en utilisant le théorème 3.1 et la proposition 4.1, nous démontrons au paragraphe 4.2 un premier énoncé général d'existence de polynômes.
Au paragraphe 4.3, nous faisons dépendre une partie les paramètres qui interviennent dans l'énoncé du théorème 4.2 d'un même paramètre entier N, de manière à obtenir une version asymptotique du théorème 4.2 dans laquelle la condition (C_3) du théorème 3.1 devient de la forme :

$$H(N)/L(N) > D \log L(N) + Dc_N(1 + h_N)$$

et peut être remplacée par des hypothèses portant sur les rapidités de croissance des suites impliquées. Le théorème 4.1 est une conséquence du théorème 4.3 ; il est démontré au dernier paragraphe.

4.2 La condition (L.S.) pour des produits de fonctions

4.2.1 Introduction

Soient $f_1, \ldots, f_s$ des fonctions entières dans $\mathbb{C}^d$ et d'ordres de croissance finis (cf. Définition 2.1), des points $\omega_1, \ldots, \omega_M$ de $\mathbb{C}^d$, un élément $(\underline{S}, \underline{T})$ de $\mathbb{N}^s \times \mathbb{N}^d$, $\underline{S} = (S_1, \ldots, S_s)$, $\underline{T} = (T_1, \ldots, T_d)$.
Nous utilisons dans ce paragraphe et les paragraphes 4.3 et 4.4 les notations suivantes pour désigner l'ensemble fini $\tilde{\Phi}_{\underline{S}}$ de fonctions :

$$\tilde{\Phi}_{\underline{S}} = \{\Phi_{\underline{\lambda}} = f_1^{\lambda_1} \cdots f_s^{\lambda_s} \ ; \ \underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \mathbb{N}^s, \ \underline{\lambda} < \underline{S}\},$$

ainsi que l'ensemble fini de fonctionnelles $\tilde{\Psi}_{\underline{T},M}$:

$$\tilde{\Psi}_{\underline{T},M} = \{\Psi_{\underline{\tau},k} \ ; \ \underline{\tau} \in \mathbb{N}^d, \ k \in \mathbb{N}, \ \underline{\tau} < \underline{T}, \ 1 \leq k \leq M\},$$

avec, pour tout élément Φ de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^d)$, $k \in \mathbb{N}$, $\underline{\tau} \in \mathbb{N}^d$:

$$\Psi_{\underline{\tau},k}(\Phi) = \partial^{\underline{\tau}}(\Phi)(\omega_k).$$

Nous allons établir que si $\underline{S}$, $\underline{T}$ et M vérifient les inégalités suivantes :

$$(4d)^{2d} \leq S_1 \cdots S_s \leq M T_1 \cdots T_d, \tag{4.1}$$

alors le couple $(\tilde{\Phi}_{\underline{S}}, \tilde{\Psi}_{\underline{T},M})$ vérifie la condition (L.S.) pour un réel H que nous pouvons expliciter.
Nous démontrons l'énoncé suivant :

Proposition 4.1 - *Soient des fonctions $f_1, \ldots, f_s$ entières sur $\mathbb{C}^d$ d'ordres respectivement inférieurs ou égaux à des nombres réels strictement positifs $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$, deux nombres réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ vérifiant pour tout nombre réel $R > 0$ les inégalités*

$$|f_\sigma|_R \leq \beta \exp(\alpha R^{\varrho_\sigma}), \ (1 \leq \sigma \leq s). \tag{4.2}$$

Soient un nombre réel $r > 0$, un nombre réel $E \geq 1$ et des points $\omega_1, \ldots, \omega_M$ de $\mathbb{C}^d$ contenus dans le disque $D(0, r)$.
On définit l'application H_E de $\mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^s$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} H_E(\underline{T}, \underline{S}) \quad &= \quad \frac{d}{e} L^{\frac{d+1}{d}} \log E - L\|\underline{T}\| \log E - L \log L - L \sum_{k=1}^{d} T_k \log T_k \\ &\quad - L\|\underline{S}\| \log \hat{\beta} - L\alpha \sum_{\sigma=1}^{s} S_\sigma (2Er)^{\varrho_\sigma}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

en posant $L = S_1 \cdots S_s$ et $\hat{\beta} = \sup\{\beta, \ 1\}$.
Alors, pour tout nombre réel $E \geq 1$ et pour tout élément $(\underline{T}, \underline{S})$ de $\mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^s$ satisfaisant à la condition (4.1), le couple $(\tilde{\Psi}_{\underline{T},M}, \tilde{\Phi}_{\underline{S}})$ vérifie la condition (L.S.) relative au nombre réel $H_E(\underline{T}, \underline{S})$.

4.2.2 Résultats préliminaires

4.2.2.a Majoration d'un produit de fonctions

Afin de majorer les éléments de la famille $\tilde{\Phi}_{\underline{S}}$ qui sont des produits de fonctions, nous faisons l'hypothèse non restrictive $\beta \geq 1$, puis nous utilisons le résultat technique suivant :

Lemme 4.1 - *Soient R un nombre réel > 0 et $\underline{S}$ un élément de $\mathbb{N}^s$. Soient $\underline{\lambda}_j = (\lambda_{1,j}, \ldots, \lambda_{s,j})$, $(1 \leq j \leq L)$, des éléments de $\mathbb{N}^s$ tels que $\underline{\lambda}_j \leq \underline{S}$, $(1 \leq j \leq L)$. Alors :*

$$\prod_{j=1}^{L} |\Phi_{\underline{\lambda}_j}|_R \leq \beta^{L\|\underline{S}\|} \exp(\alpha L \sum_{\sigma=1}^{s} S_\sigma R^{\varrho_\sigma}). \tag{4.4}$$

Démonstration du lemme 4.1
L'inégalité (4.2) permet d'écrire, pour tout j,

$$\begin{aligned} | f_1^{\lambda_{1,j}} \cdots f_s^{\lambda_{s,j}} |_R &\leq \prod_{\sigma=1}^{s} \left(\beta^{\lambda_{\sigma,j}} \exp(\alpha R^{\varrho_\sigma} \lambda_{\sigma,j})\right) \\ &\leq \beta^{\|\underline{\lambda}_j\|} \exp(\alpha \sum_{\sigma=1}^{s} R^{\varrho_\sigma} \lambda_{\sigma,j}) \\ &\leq \beta^{\|\underline{\lambda}_j\|} \exp(\alpha \sum_{\sigma=1}^{s} R^{\varrho_\sigma} S_\sigma). \end{aligned}$$

D'où

$$\prod_{j=1}^{L} |\Phi_{\underline{\lambda}_j}|_R \leq \prod_{j=1}^{L} \left(\beta^{\|\underline{\lambda}_j\|} \exp(\alpha \sum_{\sigma=1}^{s} R^{\varrho_\sigma} S_\sigma) \right),$$

et finallement

$$\prod_{j=1}^{L} |\Phi_{\underline{\lambda}_j}|_R \leq \hat{\beta}^{L\|\underline{S}\|} \exp(\alpha L \sum_{\sigma=1}^{s} S_\sigma R^{\varrho_\sigma}).$$

4.2.2.b Zéro à l'origine d'une fonction définie par un déterminant

En vue d'appliquer le Lemme de Schwarz 2.1, nous minorons l'ordre du zéro à l'origine d'une fonction définie par un déterminant, selon une méthode dûe essentiellement à M. Laurent (cf. [Wal00], lemme 9.2).

Proposition 4.2 - *Soient $\Phi_1, \ldots, \Phi_L$ des fonctions entières dans $\mathbb{C}^d$, $\underline{\xi}_1, \ldots, \underline{\xi}_L$ des points de $\mathbb{C}^d$, $\underline{\tau}_\mu = (\tau_{\mu,1}, \ldots, \tau_{\mu,d}), (1 \leq \mu \leq L)$ des éléments de $\mathbb{N}^d$. Si $L > (4d)^{2d}$, la fonction Ξ, définie dans $\mathbb{C}$ par*

$$z \rightarrow \Xi(z) = \det\left((\partial^{\underline{\tau}_i}(\Phi_j))(z\underline{\omega}_{k_i})_{1 \leq i,j \leq L}\right),$$

admet un zéro à l'origine d'ordre $\geq \frac{d}{e} L^{\frac{d+1}{d}} - \sum_{\mu=1}^{L} \|\underline{\tau}_\mu\|$.

Démonstration de la proposition 4.2.
Comme chacune des fonctions utilisées est somme de sa série de Taylor à l'origine, les propriétés de linéarité du déterminant nous permettent de limiter notre preuve au cas où chacune des fonctions Φ_λ, $(1 \leq \lambda \leq L)$, est un monôme $\underline{w}^{\underline{k}_\lambda}$, avec $\underline{k}_\lambda = (k_{\lambda,1}, \ldots, k_{\lambda,d}) \in \mathbb{N}^d$ et $\underline{w}^{\underline{k}_\lambda} = w^{k_{\lambda,1}} \cdots z^{k_{\lambda,d}}$. Nous avons alors :

$$\partial^{\underline{\tau}}\Phi_\lambda(\underline{w}) = \begin{cases} \underline{\tau}!\binom{\underline{k}_\lambda}{\underline{\tau}}\underline{w}^{\underline{k}_\lambda - \underline{\tau}}, \ si\ \underline{k}_\lambda - \underline{\tau} \in \mathbb{N}^d. \\ 0, \ si\ \underline{k}_\lambda - \underline{\tau} \notin \mathbb{N}^d. \end{cases}$$

La fonction Ξ s'écrit alors :

$$\Xi(z) = \det\left(\underline{\tau}_\mu!\widetilde{\binom{\underline{k}_\lambda}{\underline{\tau}_\mu}} z^{\|\underline{k}_\lambda - \underline{\tau}_\mu\|}\underline{\xi}_\mu^{\underline{k}_\lambda - \underline{\tau}_\mu}\right)_{1 \leq \lambda,\mu \leq L},$$

en convenant que $\widetilde{\binom{\underline{k}_\lambda}{\underline{\tau}_\mu}}$ représente 0 si $\underline{k}_\lambda - \underline{\tau}_\mu \notin \mathbb{N}^d$ et $\binom{\underline{k}_\lambda}{\underline{\tau}_\mu}$ si $\underline{k}_\lambda - \underline{\tau}_\mu \in \mathbb{N}^d$.
Multiplions par $\underline{z}^{\|\underline{\tau}_\mu\|}$ la colonne d'indice μ, on obtient par multilinéarité :

$$\prod_{\mu=1}^{L} z^{\|\underline{\tau}_\mu\|}\Xi(z) = \prod_{\lambda=1}^{L} z^{\|\underline{k}_\lambda\|} \det\left(\underline{\tau}_\mu!\widetilde{\binom{\underline{k}_\lambda}{\underline{\tau}_\mu}}\underline{\xi}_\mu^{\underline{k}_\lambda - \underline{\tau}_\mu}\right)_{1 \leq \lambda,\mu \leq L},$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\Xi(z) = z^{\sum_{\lambda=1}^{L}\|\underline{k}_\lambda\| - \sum_{\mu=1}^{L}\|\underline{\tau}_\mu\|} \det\left(\underline{\tau}_\mu!\widetilde{\binom{\underline{k}_\lambda}{\underline{\tau}_\mu}}\underline{\xi}_\mu^{\underline{k}_\lambda - \underline{\tau}_\mu}\right)_{1 \leq \lambda,\mu \leq L}.$$

Remarquons que le terme de droite de cette égalité est nul si les éléments $\underline{k}_1, ..., \underline{k}_L$ de $\mathbb{N}^d$, ne sont pas tous distincts. Dans le cas contraire Ξ admet un zéro d'ordre supérieur où égal à $\sum_{\lambda=1}^{L}\|\underline{k}_\lambda\| - \sum_{\mu=1}^{L}\|\underline{\tau}_\mu\|$.
Nous définissons, pour tout couple d'entiers (d, L), le nombre :

$$\Theta_d(L) = \min\{\sum_{\lambda=1}^{L}\|\underline{k}_\lambda\|, \ \underline{k}_\lambda \in \mathbb{N}^d / \ \underline{k}_i \neq \underline{k}_j, \ i \neq j, \ 1 \leq i, j \leq L\}.$$

D'aprés ce qui précède, pour tout L-uplet $(\Phi_1, ..., \Phi_L)$ de fonctions entières, la fonction Ξ qui lui est associée, admet un zéro à l'origine d'ordre $\geq \Theta_d(L) - \sum_{\mu=1}^{L}\|\underline{\tau}_\mu\|$.
La conclusion de la proposition 4.2 provient du résultat suivant :

Lemme 4.2 *Pour tout entier $d \geq 1$ et pour tout entier L vérifiant $L > (4d)^{2d}$,*

$$\Theta_d(L) > \frac{d}{e}L^{\frac{d+1}{d}}.$$

Démonstration du lemme 4.2 (Voir [Wal00], Chap.6, Lemme 6.5).

4.2.3 Démonstration de la Proposition 4.1

Nous commençons par établir le premier énoncé ci-dessous ; la proposition 4.1 est une conséquence directe de son corollaire.

Proposition 4.3 - *Soient r et R deux nombres réels vérifiant $0 < r \leq R$, $(\underline{S}, \underline{T}, M, d)$ un élément de l'ensemble $\mathbb{N}^s \times \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$ satisfaisant les inégalités (4.1), $\Phi_1, \ldots, \Phi_L$ des fonctions entières dans $\mathbb{C}^d$, $\underline{\omega}_1, \ldots, \underline{\omega}_M$ des points de $\mathbb{C}^d$ contenus dans le disque $D(0, r)$ et $\mathcal{E} = \{(\underline{\tau}_i, k_i), 1 \leq i \leq L\}$ un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^d \times \mathbb{N}$ dont les éléments sont tous $\leq (\underline{T}, M)$. Alors, le nombre*

$$\Delta_{\mathcal{E}} = \det\left(\partial^{\underline{\tau}_i}(\Phi_j)(\underline{\omega}_{k_i})_{1 \leq i,j \leq L}\right)$$

est majoré par

$$|\, \Delta_{\mathcal{E}} \,| \quad \leq \quad E^{-\frac{d}{e}L^{\frac{d+1}{d}} + L\|\underline{T}\|} L^L ({T_1}^{T_1} \cdots {T_d}^{T_d})^L \prod_{j=1}^{L} |\, \Phi_j \,|_{2R}, \tag{4.5}$$

avec $E = R/r$.

Corollaire 4.1 - *Soient $f_1, \ldots, f_s$ des fonctions entières dans $\mathbb{C}^d$ d'ordres respectivement inférieurs ou égaux à des nombres réels positifs $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$ et α et β deux nombres réels satisfaisant pour tout nombre réel $R > 0$ les relations (4.2). Soient $(\underline{S}, \underline{T}, M, d)$ un élément de l'ensemble $\mathbb{N}^s \times \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$ satisfaisant les inégalités (4.1). Nous posons $L = S_1 \cdots S_s$ et $\hat{\beta} = \sup\{\beta,\ 1\}$.*
Soient $\underline{\lambda}_j = (\lambda_{1,j}, \ldots, \lambda_{s,j})$, $(1 \leq j \leq L)$ des éléments de $\mathbb{N}^s$ tous $\leq \underline{S}$ et $\mathcal{E} = \{(\underline{\tau}_i, k_i), 1 \leq i \leq L\}$ un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^d \times \mathbb{N}$ dont les éléments sont tous $\leq (\underline{T}, M)$.
On définit les L fonctions $\Phi_j = f_1^{\lambda_{1,j}} \cdots f_s^{\lambda_{s,j}}$, $(1 \leq j \leq L)$.
Alors, avec les notations de la proposition 4.1,

$$|\, \Delta_{\mathcal{E}} \,| \leq E^{-\frac{d}{e}L^{\frac{d+1}{d}} + L\|\underline{T}\|} L^L ({T_1}^{T_1} \cdots {T_d}^{T_d})^L \hat{\beta}^{L\|\underline{S}\|} \exp(\alpha L \sum_{j=1}^{s} S_j (2Er)^{\varrho_j}). \tag{4.6}$$

Démonstration de la Proposition 4.3
Nous savons, d'aprés la proposition 4.2, que la fonction

$$\Xi \ : \ z \to \Xi(z) = \det\left((\partial^{\underline{\tau}_i}(\Phi_j))(z\underline{\omega}_{k_i})_{1 \leq i,j \leq L}\right),$$

admet en l'origine un zéro d'ordre $\geq \frac{d}{e}L^{\frac{d+1}{d}} - \sum_{i=1}^{L} \|\underline{\tau}_i\|$; nous pouvons donc appliquer le lemme de Schwarz en un point complexe à la fonction Ξ définie dans $\mathbb{C}$ par

$$z \to \Xi(z) = \det\left((\partial^{\underline{\tau}_i}(\Phi_j))(z\underline{\omega}_{k_i})_{1 \leq i,j \leq L}\right).$$

Il vient

$$|\, \Xi(1) \,| \leq E^{-\frac{d}{e}L^{\frac{d+1}{d}} + \sum_{i=1}^{L} \|\underline{\tau}_i\|} \,|\, \Xi \,|_E\ .$$

Or, par définition du déterminant,

$$|\, \Xi \,|_E \leq L! \sup_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}(L) \\ |z| \leq E}} \prod_{j=1}^{L} |\, \partial^{\underline{\tau}_{\sigma(j)}} \Phi_j (z\underline{\omega}_{k_{\sigma(j)}}) \,|$$

Les inégalités de Cauchy permettent d'écrire :

$$| \partial^{\underline{\tau}_i} \Phi_j(z\underline{\omega}_{k_i}) | \leq \frac{\underline{\tau}_i!}{E^{\|\underline{\tau}_i\|}} | \Phi_j |_{2R}, \ (1 \leq i, j \leq L).$$

Par conséquent en majorant : $L!$ par L^L, $\underline{\tau}_i!/E^{\|\underline{\tau}_i\|}$ par $\prod_{k=1}^{L} T_k^{T_k}$, et $\sum_{i=1}^{L} |\underline{\tau}_i|$ par $L|\underline{T}|$, on obtient l'inégalité escomptée :

$$| \Xi(1) | \leq E^{-\frac{d}{e}L^{\frac{d+1}{d}} + \sum_{i=1}^{L} \|\underline{\tau}_i\|} L^L (\prod_{k=1}^{d} T_k^{T_k})^L \prod_{j=1}^{L} | \Phi_j |_{2R} .$$

Démonstration du Corollaire 4.1 Il suffit dans l'inégalité (4.4) de la Proposition 4.1 de majorer le produit $\prod_{j=1}^{L} | \Phi_j |_{2R}$ en utilisant la majoration (4.4) obtenue au Lemme 4.1.

4.3 Un énoncé général d'existence de polynômes

4.3.1 Une application du théorème 3.1

Avec les notations précédentes, pour tout nombre réel $E \geq 1$, le couple $(\tilde{\Psi}_{\underline{T},M}, \tilde{\Phi}_{\underline{S}})$ vérifie la condition (L.S.) relative au nombre réel $H_E(\underline{T}, \underline{S})$ explicité dans la proposition (4.3) ; par conséquent, lorsque la condition (A.R) est satisfaite, le théorème 3.1 établit l'existence d'un polynôme P appartenant à l'algèbre $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_s]$ tel que la fonction $F = P(f_1, \ldots, f_s)$ s'annule avec multiplicité en chacun des points $\underline{\omega}_1, \ldots, \underline{\omega}_M$.
Nous obtenons :

Théorème 4.2 - *Soient (c, h, r) un élément de $(\mathbb{R}_{>0})^3$, K un corps de nombres de degré D sur $\mathbb{Q}$, $\underline{\omega}_1, \ldots, \underline{\omega}_M$ des points du disque D(0,r) de $\mathbb{C}^d$ et $(\underline{T}, \underline{S})$ de $\mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^s$ satisfaisant les inégalités (4.1).*
Soient $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$ des nombres réels strictement positifs, $f_1, \ldots, f_s$ des fonctions entières dans $\mathbb{C}^d$ dont les ordres sont respectivement inférieurs ou égaux à $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$ et deux nombres réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ vérifiant pour tout nombre réel $R > 0$ les inégalités (4.2). On pose $L = S_1 \cdots S_s$ et $\hat{\beta} = \sup\{\beta,\ 1\}$.
On suppose que les deux conditions ci-dessous sont satisfaites.
(C_1) Le couple $(\tilde{\Psi}_{\underline{T},M}, \tilde{\Phi}_{\underline{S}})$ vérifie la condition (AR.) relativement au couple de nombres réels (c,h) et au corps de nombres K.

$$
\begin{aligned}
(C_2) \qquad \frac{d}{e} L^{\frac{1}{d}} \quad > \quad & \|\underline{T}\| \log L + \sum_{i=1}^{d} T_i \log T_i + \|\underline{S}\| \log \tilde{\beta} + \alpha \sum_{\sigma=1}^{s} S_\sigma (2er)^{\varrho_\sigma} \\
& + D \log L + Dc(1+h). \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Alors, il existe un polynôme non nul P de $K[X_1, \ldots, X_s]$ dont le degré partiel en chaque indéterminée X_σ vérifient $deg_{X_\sigma} P_N < S_\sigma$ et tel que la fonction $F_N = P_N(f_1, \ldots, f_s)$ s'annule en chacun des points $\underline{\omega}_1, \ldots, \underline{\omega}_M$ avec une multiplicité $\geq \underline{T}$.

4.3.2 Démonstration du théorème 4.2

Démarche
Nous utilisons le théorème 3.1 pour montrer que la matrice

$$
\mathcal{M} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{\tau_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_d} \right)^{\tau_d} \left(f_1^{\lambda_1} \cdots f_s^{\lambda_s} \right) (\underline{\omega}_k) \right)_{\substack{\underline{\tau} < \underline{T},\ 1 \leq k \leq M \\ \underline{\lambda} < \underline{S}}}
$$

est de rang $< L$.
Cela établi l'existence d' éléments $m_{\underline{\lambda}}$, $(\underline{\lambda} < \underline{S}, \underline{\lambda} \in \mathbb{N}^s)$, non tous nuls de K, tels que

$$
\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{\tau_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_d} \right)^{\tau_d} \left(\sum_{\substack{\underline{\lambda} < \underline{S}, \\ \underline{\lambda} \in \mathbb{N}^s}} m_{\underline{\lambda}} f_1^{\lambda_1} \cdots f_s^{\lambda_s} \right) (\underline{\omega}_k) = 0,\ (\underline{\tau} < \underline{T},\ 1 \leq k \leq M),
$$

et donc du polynôme non nul $P = \sum_{\underline{\lambda} < \underline{S}} m_{\underline{\lambda}} X_1^{\lambda_1} \cdots X_s^{\lambda_s}$ de $K[X_1, \ldots, X_s]$ qui vérifie la conclusion du théorème 4.2.

Mise en oeuvre du théorème 3.1. La matrice $\mathcal{M}$ peut s'exprimer en fonction des ensembles $\tilde{\Psi}_{\underline{T},M}$ et $\tilde{\Phi}_{\underline{S}}$ en écrivant :

$$\mathcal{M} = (\Psi(\Phi))_{\Phi \in \tilde{\Phi}_{\underline{S}},\ \Psi \in \tilde{\Psi}_{\underline{T},M}} .$$

D'aprés l'hypothèse (C_1) la condition (A.R) est satisfaite relativement au couple de nombres réels (c,h) et au corps de nombres K ; de plus, d'aprés la proposition 4.1, la condition (L.S) est elle aussi vérifiée pour le nombre réel $H_e(\underline{T}, \underline{S})$ défini par l'égalité (4.3) en prenant $E = e$; enfin l'inégalité (C_2) du théorème 4.1 est équivalente à l'inégalité (C_3) du théorème 3.1. Par conséquent le théorème 3.1 s'applique et la matrice $\mathcal{M}$ est de rang $< L$.

◇ ◇ ◇

4.4 Une version asymptotique du théorème 4.2

4.4.1 Enoncé du résultat

Définition des paramètres.
Soient $(\underline{a}, \underline{b})$ un élément de $(\mathbb{N})^d \times (\mathbb{R}_{\geq 0})^s$, avec $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_d)$, $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_s)$ et μ un nombre réel vérifiant $0 < \mu < 1$.
Nous définissons la suite $(\underline{T}^{(\underline{a})}(N), \underline{S}^{(\underline{b},\mu)}(N))_{N \geq 1}$ d'éléments de de $\mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^s$, avec :

$$\underline{T}^{(\underline{a})}(N) = (T_1^{(\underline{a})}(N), \ldots, T_d^{(\underline{a})}(N)) \text{ et } \underline{S}^{(\underline{b},\mu)}(N) = (S_1^{(\underline{b},\mu)}(N), \ldots, S_s^{(\underline{b},\mu)}(N)),$$

en posant pour chaque nombre entier $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} T_i(N) &= N^{a_i} \ ; \ (1 \leq i \leq d), \\ S_\sigma^{(\underline{b},\mu)}(N) &= \lceil \mu N^{b_\sigma} \rceil + 1 \ ; \ (1 \leq \sigma \leq s). \end{aligned}$$

Nous démontrons l'énoncé suivant.

Théorème 4.3 - *Soient un corps de nombres K, des nombres réels $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$ strictement positifs , des fonctions $f_1, \ldots, f_s$ entières dans $\mathbb{C}^d$ dont les ordres sont respectivement inférieurs ou égaux à $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$.*
Considérons un nombre réel $\ell > 0$, une suite $(\underline{\omega}_k)_{k \geq 1}$ de points de $\mathbb{C}^d$, un nombre réel μ tel que $0 < \mu < 1$, un élément $(\underline{a}, \underline{b})$ de $(\mathbb{N})^d \times (\mathbb{R}_{\geq 0})^s$ et une suite $(c_N, h_N)_{N \geq 1}$ d'éléments de $(\mathbb{R}_{\geq 0})^2$.
Nous supposons que les conditions suivantes sont vérifiées.
(C_1) *Pour chaque nombre entier $N \geq 1$, le couple $(\tilde{\Psi}_{\underline{T}^{(\underline{a})}(N), \lceil N^\ell \rceil}, \ \tilde{\Phi}_{\underline{S}^{(\underline{b},\mu)}(N)})$ vérifie la condition (AR.) relativement au couple de nombres réels (c_N, h_N) et au corps de nombres K.*
(C_2) *La suite $(\underline{\omega}_k)_{k \geq 1}$ vérifie la condition $(\mathcal{C}(\ell))$.*
(C_3) $\ell + \|\underline{a}\| \geq \|\underline{b}\| > d \max\{a_i, 1 \leq i \leq d\} \cup \{b_\sigma + \varrho_\sigma, 1 \leq \sigma \leq s\}$.
(C_4) $\lim_{N \to \infty} c_N (1 + h_N) N^{-\|\underline{b}\|/d} = 0$.
Alors, il existe un nombre entier N_0 vérifiant la propriété suivante : quel que soit le nombre entier $N \geq N_0$, il existe un polynôme non nul P_N de $K[X_1, \ldots, X_s]$ dont le degré partiel en chaque indéterminée X_σ vérifient $deg_{X_\sigma} P_N < \lceil \mu N^{b_\sigma} \rceil$ et tel que la fonction $F_N = P_N(f_1, \ldots, f_s)$ s'annule sur l'ensemble $\{\underline{\omega}_k, \ 1 \leq k \leq \lceil N^\ell \rceil\}$ avec une multiplicité $\geq (N^{a_i})_{1 \leq i \leq d}$.

4.4.2 Démonstration du théorème 4.3

Posons, pour tout nombre entier $N \geq 1$, $M(N) = \lceil N^\ell \rceil$.
Il suffit de démontrer que les conditions (C_3) et (C_4) de l'énoncé ci-dessus entraîne l'existence d'un nombre entier N_0 tel que, pour tout nombre entier $N \geq N_0$, le triplet $(M(N), \ \underline{T}^{(\underline{a})}(N), \underline{S}^{(\underline{b},\mu)}(N))$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^s \times \mathbb{N}^d$ vérifie les inégalités (4.1) et la condition (C_3) du théorème 4.2 ; les conditions d'application du théorème 4.2 seront réunies.

Vérification des inégalités (4.1).
Nous posons, pour tout nombre entier $N \geq 1$,

$$L^{(\underline{b},\mu)}(N) = \prod_{\sigma}^{s} S_\sigma^{(\underline{b},\mu)}(N).$$

Minoration. - D'aprés la condition (C_3), la somme des coordonnées de $\underline{b}$ est strictement positive, nous pouvons donc définir le nombre entier strictement positif

$$\eta_1 = \left\lceil \left((4d)^{2d}/\mu^s\right)^{1/\|\underline{b}\|} \right\rceil + 1.$$

Remarquons que, pour tout nombre entier $N \geq 1$,

$$L^{(\underline{b},\mu)}(N) > \prod_{\sigma}^{s} \left(\mu N^{b_\sigma}\right),$$

d'où

$$L^{(\underline{b},\mu)}(N) > \mu^s N^{\|\underline{b}\|}. \tag{4.8}$$

Par conséquent, quel que soit le nombre entier $N \geq \eta_1$ nous avons

$$L^{(\underline{b},\mu)}(N) \geq (4d)^{2d}.$$

Majoration. - Nous avons, pour tout entier $N \geq 1$,

$$\frac{L^{(\underline{b},\mu)}(N)}{\lceil N^\ell \rceil N^{\|\underline{a}\|}} \leq \left(\frac{N^{\ell+\|\underline{a}\|}}{\lceil N^\ell \rceil N^{\|\underline{a}\|}}\right)\left(\frac{L^{(\underline{b},\mu)}(N)}{N^{\ell+\|\underline{a}\|}}\right).$$

Or, $\ell + \|\underline{a}\| \geq \|\underline{b}\|$ d'aprés la condition (C_3), ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{L^{(\underline{b},\mu)}(N)}{\lceil N^\ell \rceil N^{\|\underline{a}\|}} &\leq \left(\frac{N^{\ell+\|\underline{a}\|}}{\lceil N^\ell \rceil N^{\|\underline{a}\|}}\right)\left(\frac{L^{(\underline{b},\mu)}(N)}{N^{\|\underline{b}\|}}\right) \\
&\leq \left(\frac{N^{\ell+\|\underline{a}\|}}{\lceil N^\ell \rceil N^{\|\underline{a}\|}}\right) \frac{\prod_{\sigma=1,b_\sigma>0}^{s}\left(\lceil \mu N^{b_\sigma} \rceil + 1\right)}{\prod_{\sigma=1,b_\sigma>0}^{s} N^{b_\sigma}}.
\end{aligned}$$

On a donc démontré l'inégalité

$$\frac{L^{(\underline{b},\mu)}(N)}{\lceil N^\ell \rceil N^{\|\underline{a}\|}} \leq \left(\frac{N^{\ell+\|\underline{a}\|}}{\lceil N^\ell \rceil N^{\|\underline{a}\|}}\right)\left(\prod_{\sigma=1,b_\sigma>0}^{s}\left(\mu + \frac{1}{N^{b_\sigma}}\right)\right).$$

Cependant

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^{\ell+\|\underline{a}\|}}{\lceil N^\ell \rceil N^{\|\underline{a}\|}}\right)\left(\prod_{\sigma=1,b_\sigma>0}^{s}\left(\mu + \frac{1}{N^{b_\sigma}}\right)\right) = \mu^{\#\{\sigma,\ b_\sigma>0\}},$$

et $\mu^{\#\{\sigma,\ b_\sigma>0\}} < 1$, puisque $0 < \mu < 1$ et $\{\sigma,\ b_\sigma > 0\} \neq \emptyset$ (car nous supposons $\|\underline{b}\| > 0$) ; il existe donc un nombre entier $N_1 \geq 1$ tel que pour tout nombre entier $N \geq N_1$,

$$\frac{L^{(\underline{b},\mu)}(N)}{\lceil N^\ell \rceil N^{\|\underline{a}\|}} < 1.$$

On a donc, pour tout nombre entier $N \geq N_1$,

$$L^{(\underline{b},\mu)}(N) < M(N) \prod_{i=1}^{d} T_i^{(\underline{a})}(N).$$

Conclusion. - Posons $N_2 = \max\{\eta_1,\ N_1\}$. La condition (4.1) est vérifiée pour tout nombre entier $N \geq N_2$.

Vérification de la condition (C_2) du théorème 4.2
Nous savons d'aprés l'inégalité (4.8) que

$$\left(L^{(\underline{b},\mu)}(N)\right)^{1/d} > \mu^{s/d} N^{\|\underline{b}\|/d},$$

par conséquent, il nous faut comparer le comportement, lorsque N tend vers $+\infty$, de $N^{\|\underline{b}\|/d}$ avec celui des termes qui composent le membre de droite de l'inégalité (4.7).

Pour cela, nous considérons un couple (α, β) vérifiant les inégalités (4.2) et nous posons

$$\hat{\beta} = \sup\{\beta,\ 1\}.$$

D'autre part, la condition (C_2) permet de prendre dans le membre de droite de l'inégalité (4.7) :

$$r = c_0 N.$$

Nous déduisons de la condition (C_3) les inégalités $\|\underline{b}\|/d > a_i$, pour tout nombre entier i tel que $1 \leq i \leq d$; par suite :

$$\lim_{N\to\infty} \left(\|\underline{T}^{(\underline{a})}(N)\| + \sum_{i=1}^{d} T_i^{(\underline{a})}(N) \log T_i^{(\underline{a})}(N) \right) N^{-\|\underline{b}\|/d} = 0.$$

D'aprés la condition (C_3), $\|\underline{b}\|/d > b_\sigma + \varrho_\sigma$, pour tout nombre entier σ tel que $1 \leq \sigma \leq s$; on a donc :

$$\lim_{N\to\infty} \left(\|\underline{S}^{(\underline{b},\mu)}(N)\| \log \hat{\beta} + \alpha \sum_{\sigma=1}^{s} S_\sigma^{(\underline{b},\mu)}(N)(2ec_0N)^{\varrho_\sigma} \right) N^{-\|\underline{b}\|/d} = 0$$

Avec les deux remarques précédentes, la condition (C_4) permet de conclure à l'existence d'un nombre entier $N_0 \geq N_2$, tel que, pour tout nombre entier $N \geq N_0$, la condition (C_2) du théorème 4.2 soit vérifiée ; d'où l'existence d'un polynôme vérifiant les propriétés requises par le théorème 4.3 lorsque $N \geq N_0$.

4.5 Démonstration du théorème 4.1

4.5.1 Une réduction du problème

Montrons qu'il suffit d'établir le résultat dans le cas particulier où

$$\omega > \sup\{\varrho_\sigma,\ 1 \leq \sigma \leq s\}. \tag{4.9}$$

Supposons par exemple que l'on ait

$$\varrho_s \geq \frac{\varrho_1 + \cdots + \varrho_s + \ell + \|\underline{a}\|}{s},$$

que l'on peut encore écrire

$$\varrho_s \geq \frac{\varrho_1 + \cdots + \varrho_{s-1} + \ell + \|\underline{a}\|}{s-1}. \tag{4.10}$$

La première inégalité de la condition (C_1) s'écrit

$$\ell + \|\underline{a}\| > \frac{(\varrho_1 + \cdots + \varrho_{s-1})d}{s-d} + \frac{\varrho_s d}{s-d},$$

ce qui entraîne d'après (4.10)

$$\ell + \|\underline{a}\| > \frac{(\varrho_1 + \cdots + \varrho_{s-1})d}{s-d} + \frac{(\varrho_1 + \cdots + \varrho_{s-1} + \ell + \|\underline{a}\|)d}{(s-1)(s-d)},$$

d'où

$$(\ell + \|\underline{a}\|)s(s-1-d) > (\varrho_1 + \cdots + \varrho_{s-1})sd.$$

On en déduit $s - 1 > d$ et

$$\ell + \|\underline{a}\| > \frac{(\varrho_1 + \cdots + \varrho_{s-1})d}{(s-1-d)}.$$

Il suffit donc de démontrer le théorème au rang $s-1$ puisque ses hypothèses sont satisfaites pour les fonctions $f_1, \ldots, f_{s-1}$. Par récurrence on se ramène ainsi au cas où l'inégalité (4.9) est vérifiée.

Fin de la démonstration

Supposons les hypothèses du théorème 4.1 et la condition (4.9) satisfaites, nous allons montrer que les hypothèses du théorème 4.3 le sont aussi, pour le triplet $(\ell, \underline{a}, \underline{b})$. Nous supposons $\omega > \max\{\varrho_\sigma,\ 1 \leq \sigma \leq s\}$ donc $\underline{b}$ est un élément de $(\mathbb{R}_{\geq 0})^s$.
De plus, d'aprés la définition de $\underline{b}$, $\|\underline{b}\| = \ell + \|\underline{a}\|$, on a donc successivement $\ell + \|\underline{a}\| \geq \|\underline{b}\|$ et, d'aprés la deuxième inégalité de la condition (C_3) du théorème 4.1, $\|\underline{b}\| > d\sup\{a_i, 1 \leq i \leq d\}$.
L'inégalité

$$\|\underline{b}\| > d\max\{b_\sigma + \varrho_\sigma, 1 \leq \sigma \leq s\}$$

de la condition (C_3) du théorème 4.3 est équivalente à

$$\ell + \|\underline{a}\| > d(\varrho_1 + \cdots + \varrho_s + \ell + \|\underline{a}\|)/s,$$

autrement dit, à la première inégalité de la condition (C_3) du théorème 4.1.
Enfin, les égalités d'ensembles

$$\tilde{\Psi}_{\underline{T}^{(\underline{a})}(N), \lceil N^\ell \rceil} = \hat{\Psi}_{\underline{a},\ell}(N) \text{ et } \tilde{\Phi}_{\underline{S}^{(\underline{b},\mu)}(N)} = \hat{\Phi}_{\underline{b},\mu}(N)$$

montrent que la condition (C_1) du théorème 4.3 est satisfaite. Les deux autres hypothèses étant identiques dans les deux théorèmes, le théorème 4.3 permet de conclure.

Deuxième partie

Exemples d'applications sans multiplicité

Chapitre 5

Les lemmes de zéros

5.1 Introduction

5.1.1 Position du problème

Soient $f_1, \ldots, f_s$ des fonctions entières dans $\mathbb{C}^d$, $\underline{\omega}_1, \ldots, \underline{\omega}_M$ des éléments de $\mathbb{C}^d$, $\underline{T} = (T_1, \ldots, T_d) \in (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})^d$ et $\underline{S} = (S_1, \ldots, S_s) \in \mathbb{N}^s$. Nous avons démontré, dans la première partie de cette thèse, que lorsque certaines conditions arithmétiques sont vérifiées il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_s]_{<\underline{S}}$ qui s'annule en chacun des points $\underline{\omega}_1, \ldots, \underline{\omega}_M$ avec une multiplicité $\geq \underline{T}$.
Nous nous intéressons à présent au problème inverse : la recherche de conditions qui nous assurent de l'impossibilité de l'existence d'un tel polynôme ; un lemme de zéros est un énoncé qui répond à cette question.
Nous en donnons un premier exemple au paragraphe 5.1.2, puis, en reprenant les notations et les définitions du texte de référence de D. Roy dans ([Wal00], Part III), nous énonçons aux paragraphes 5.2 et 5.3 les lemmes de zéros sur les groupes algébriques qui permettrons, par la suite, de conclure les démonstrations de transcendance.

5.1.2 Un lemme de zéros pour les fonctions entières

Une fonction entière dont toutes les dérivées sont nulles en un point de $\mathbb{C}^d$ est nulle en tout point de $\mathbb{C}^d$; cela permet d'énoncer avec $M = 1$, $\underline{\omega}_1 = \underline{0}$

Théorème 5.1 - *Soient $f_1, \ldots, f_s$ des fonctions entières dans $\mathbb{C}^d$, $\underline{\omega}$ un élément de $\mathbb{C}^d$ et P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_s]$ tels que :*
$D^{\underline{\tau}}P(f_1, \ldots, f_s)(\underline{\omega}) = 0$, pour tout $\underline{\tau} \in \mathbb{N}^d$, alors $P(f_1, \ldots, f_s) = 0$ sur $\mathbb{C}^d$.

Le théorème 5.1 intervient en particulier dans la démonstration du résultat suivant.

Lemme 5.1 - *Soient $\mathcal{K}$ un sous-corps d'un corps $\mathcal{K}'$ et $f_1, \ldots, f_s$ des fonctions entières sur $\mathbb{C}^d$, tels que, pour tout $(\underline{\tau}, \sigma) \in \mathbb{N}^d \times \{1, \ldots, s\}$, $D^{\underline{\tau}} f_\sigma(0)$ est un élément de $\mathcal{K}$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) Les fonctions $f_1, \ldots, f_s$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathcal{K}$.
(ii) Les fonctions $f_1, \ldots, f_s$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathcal{K}'$.

Démonstration du lemme 5.1.
L'assertion (i) implique l'assertion (ii) de manière évidente.
Pour démontrer l'implication réciproque nous supposons qu'il existe

$$\underline{S} = (S_1, \dots, S_s) \in \mathbb{N}^s$$

et un polynôme non nul de $\mathcal{K}'[X_1, \dots, X_s]$, $P = \sum_{\underline{\lambda} < \underline{S}} m_{\underline{\lambda}} X_1^{\lambda_1} \cdots X_s^{\lambda_s}$, tel que $P(f_1, \dots, f_s) = 0$. Cette égalité équivaut (d'après le théorème 5.1) aux égalités

$$D^{\underline{\tau}} P(f_1, \dots, f_s)(\underline{0}) = 0, \text{ pour tout } \underline{\tau} \in \mathbb{N}^d. \tag{5.1}$$

On pose $L = S_1 \cdots S_s$. Les égalités (5.1) signifient que le $\mathcal{K}'$-espace vectoriel $\mathcal{V}$ engendré par les L vecteurs

$$V_{\underline{\lambda}} = \left(D^{\underline{\tau}} f_1^{\lambda_1} \cdots f_s^{\lambda_s}(\underline{0}) \right)_{\underline{\tau} \in \mathbb{N}^d}, \ (\underline{\lambda} < \underline{S}).$$

est de dimension strictement inférieur à L.
La matrice

$$\mathcal{M} = \left(D^{\underline{\tau}} f_1^{\lambda_1} \cdots f_s^{\lambda_s}(\underline{0}) \right)_{\substack{\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^s, \ \underline{\lambda} < \underline{S} \\ \underline{\tau} \in \mathbb{N}^d}}$$

est donc de rang $< L$.
Il suffit donc de démontrer le résultat suivant :

Lemme 5.2 - *Soient $\mathcal{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $f_1, \dots, f_s$ des fonctions entières sur $\mathbb{C}^d$. On suppose que les conditions (i) et (ii) sont satisfaites :*
(i) Pour tout $(\underline{\tau}, \sigma) \in \mathbb{N}^d \times \{1, \dots, s\}$, $D^{\underline{\tau}} f_\sigma(0)$ est un élément de $\mathcal{K}$.
(ii) Il existe $\underline{S} = (S_1, \dots, S_s)$ un élément de $\mathbb{N}^s$ pour lequel la matrice $\mathcal{M} = \left(D^{\underline{\tau}} f_1^{\lambda_1} \cdots f_s^{\lambda_s}(\underline{0}) \right)_{\substack{\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^s, \ \underline{\lambda} < \underline{S} \\ \underline{\tau} \in \mathbb{N}^d}}$ est de rang $< S_1 \cdots S_s$.
Alors, les fonctions $f_1, \dots, f_s$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathcal{K}$.

Démonstration du lemme 5.2. D'aprés la condition (i) les vecteurs-colonnes de $\mathcal{M}$ sont tous dans $\mathcal{K}^L$; la condition (ii) signifie donc que le sous-$\mathcal{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $(\mathcal{K})^L$ engendré par les vecteurs-colonnes de $\mathcal{M}$ est de dimension $r < L$ sur $\mathcal{K}$.
Considérons une base $\underline{C}_{j_1}, \dots, \underline{C}_{j_r}$ de $\mathcal{F}$, avec $\underline{C}_{j_k} = (C_{i,j_k})_{1 \le i \le L}$, il existe un mineur non nul $r \times r$ de la matrice $(\underline{C}_{j_1}, \dots, \underline{C}_{j_r})$ à coefficients dans $\mathcal{K}$; autrement dit, il existe des nombres entiers $1 \le i_1 < \dots < i_r \le r$ tels que

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} C_{i_1,j_1} & \dots & C_{1,j_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{i_r,j_1} & \dots & C_{r,j_r} \end{pmatrix} \neq 0.$$

De plus comme $r < L$, nous pouvons choisir un nombre entier p tel que $1 \le p \le L$ et $p \notin \{i_1, \dots, i_r\}$.
Considérons $\underline{C} = (C_i)_{1 \le i \le L}$ un vecteur-colonne quelconque de $\mathcal{M}$.
La matrice

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} C_{i_1} & C_{i_1,j_1} & \dots & C_{1,j_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{i_r} & C_{i_r,j_1} & \dots & C_{r,j_r} \\ C_p & C_{p,j_1} & \dots & C_{p,j_r} \end{pmatrix}$$

est de dimensions $(r+1)\times(r+1)$, à coefficients dans $\mathcal{K}$ et de déterminant nul ; il existe donc $\Delta_1,\ldots,\Delta_r$ des éléments de $\mathcal{K}$, ne dépendants que de la base $\underline{C}_{j_1},\ldots,\underline{C}_{j_r}$ choisie, tels que :

$$\Delta_1 C_{i_1}+\cdots+\Delta_r C_{i_r}+\Delta C_p=0.$$

Ce résultat, vrai pour tout vecteur-colonne de $\mathcal{M}$, montre l'existence d'une relation de dépendance $\mathcal{K}$-linéaire non triviale entre les vecteurs-lignes de $\mathcal{M}$. En posant $C_k=D^{\underline{\tau}}f_1^{\lambda_{1,k}}\cdots f_s^{\lambda_{s,k}}(\underline{0})$ pour $k=i_1,\ldots,i_r,p$, nous en déduisons, pour tout $\underline{\tau}\in\mathbb{N}^d$, les égalités :

$$\Delta_1 D^{\underline{\tau}}f_1^{\lambda_{1,i_1}}\cdots f_s^{\lambda_{s,i_1}}(\underline{0})+\cdots+\Delta_r D^{\underline{\tau}}f_1^{\lambda_{1,i_r}}\cdots f_s^{\lambda_{s,i_r}}(\underline{0})+\Delta D^{\underline{\tau}}f_1^{\lambda_{1,p}}\cdots f_s^{\lambda_{s,p}}(\underline{0})=0$$

Soit, pour tout $\underline{\tau}\in\mathbb{N}^d$,

$$D^{\underline{\tau}}\left(\Delta_1 f_1^{\lambda_{1,i_1}}\cdots f_s^{\lambda_{s,i_1}}+\cdots+\Delta_r f_1^{\lambda_{1,i_r}}\cdots f_s^{\lambda_{s,i_r}}+\Delta f_1^{\lambda_{1,p}}\cdots f_s^{\lambda_{s,p}}\right)(\underline{0})=0.$$

Le lemme de zéros donné par le théorème 5.1 permet d'en déduire que la fonction $\Delta_1 f_1^{\lambda_{1,i_1}}\cdots f_s^{\lambda_{s,i_1}}+\cdots+\Delta_r f_1^{\lambda_{1,i_r}}\cdots f_s^{\lambda_{s,i_r}}+\Delta f_1^{\lambda_{1,p}}\cdots f_s^{\lambda_{s,p}}$ est nulle.

5.2 Un lemme de Zéros sans dérivation sur les groupes algébriques

5.2.1 Préliminaires

Le groupe algébrique G

Soient $\mathcal{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et d_0, d_1 deux nombres entiers positifs vérifiant $d=d_0+d_1>0$, nous désignons par $G=\mathbb{G}_a^{d_0}\times\mathbb{G}_m^{d_1}$ le groupe produit $\mathcal{K}^{d_0}\times(\mathcal{K}^\times)^{d_1}$. Ainsi défini G n'est pas un sous-ensemble algébrique de $\mathcal{K}^{d_0}\times(\mathcal{K})^{d_1}$, mais nous pouvons remédier à cela en considérant le sous-ensemble algébrique U de $\mathcal{K}^{d_0+2d_1}$ défini par

$$U=\{(\underline{x},\underline{y},\underline{z})\in\mathcal{K}^{d_0}\times\mathcal{K}^{d_1}\times\mathcal{K}^{d_1}\ ;\ y_1z_1=\ldots=y_{d_1}z_{d_1}=1\}$$

et la projection de $\mathcal{K}^{d_0}\times\mathcal{K}^{d_1}\times\mathcal{K}^{d_1}$ dans $\mathcal{K}^{d_0}\times\mathcal{K}^{d_1}$ qui envoie $(\underline{x},\underline{y},\underline{z})$ sur $(\underline{x},\underline{y})$ Cette projection induit une bijection $\pi:U\longmapsto G$ et permet de transporter sur G la structure algébrique de $\mathcal{K}^{d_0+2d_1}$ en posant qu'un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de G est algébrique si $\pi^{-1}(\mathcal{E})$ est un sous-ensemble algébrique de $\mathcal{K}^{d_0+2d_1}$.
Le sous-anneau du corps des fractions rationnelles $\mathcal{K}(X_1,\ldots,X_{d_0},Y_1,\ldots,Y_{d_1})$ engendré par les fonctions de base $X_1,\ldots,X_{d_0},Y_1,\ldots,Y_{d_1},Y_1^{-1},\ldots,Y_{d_1}^{-1}$ joue un rôle important dans les énoncés qui suivent, nous le notons

$$\mathcal{K}[G]=\mathcal{K}[X_1,\ldots,X_{d_0},Y_1,\ldots,Y_{d_1},Y_1^{-1},\ldots,Y_{d_1}^{-1}].$$

Le morphisme de $\mathcal{K}$-algèbres $\hat{\pi}$ de l'anneau des coordonnées

$$\mathcal{K}[\mathcal{K}^{d_0}\times\mathcal{K}^{d_1}\times\mathcal{K}^{d_1}]=\mathcal{K}[X_1,\ldots,X_{d_0},Y_1,\ldots,Y_{d_1},Z_1,\ldots,Z_{d_1}]$$

de l'espace affine $\mathcal{K}^{d_0+2d_1}$ dans $\mathcal{K}[G]$ défini par les égalités $\hat{\pi}(X_i)=X_i$ pour $i=1,\ldots,d_0$ et $\hat{\pi}(Y_j)=Y_j$, $\hat{\pi}(Z_j)=Y_j^{-1}$ pour $j=1,\ldots,d_1$ est surjectif.

Multidegré d'un élément de l'anneau de fonctions.

Tout polynôme de $\mathcal{K}[G]$ peut s'écrire de façon unique sous la forme d'une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathcal{K}$ des monômes

$$\prod_{(\underline{\lambda},\underline{\gamma})\in\Lambda} X_1^{\lambda_1}\cdots X_{d_0}^{\lambda_{d_0}} Y_1^{\gamma_1}\cdots Y_{d_1}^{\gamma_{d_1}},$$

où Λ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^{d_0}\times\mathbb{Z}^{d_1}$. L'unicité de cette décomposition en somme de monômes nous permet de définir pour tout entier $i,\ 1\leq i\leq d_0$, le degré total en $\underline{X}$ comme le maximum de l'ensemble

$$\{\|\underline{\lambda}\|,\ (\underline{\lambda},\underline{\gamma})\in\Lambda\}$$

et pour tout entier $j,\ 1\leq j\leq d_1$, le degré en Y_j comme le maximum de l'ensemble

$$\{\mid\gamma_j\mid,\ (\underline{\lambda},\underline{\gamma})\in\Lambda\}.$$

Soit $(D_0,\ D_1,\ldots,D_{d_1})$ un élément de $\mathbb{N}^{d_1+1}$, nous dirons qu'un polynôme P de $\mathcal{K}[G]$ est de multidegré $\leq (D_0,\ D_1,\ldots,D_{d_1})$ si son degré total en $\underline{X}$ est $\leq D_0$ et si, pour tout entier $j,\ 1\leq j\leq d_1$, son degré en Y_j est $\leq D_j$.

Le $\mathcal{K}$-espace vectoriel $\mathcal{K}[G]_{\leq D_0,\underline{D}_1}$ des polynômes de $\mathcal{K}[G]$ de multidegré $\leq (D_0,\underline{D}_1)$ est l'image par $\hat{\pi}$ de $\mathcal{K}[\underline{X},\underline{Y},\underline{Z}]_{\leq D_0,\underline{D}_1}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}[\underline{X},\underline{Y},\underline{Z}]$ constitué des polynômes de degré total en $\underline{X}\leq D_0$ et de degré total en Y_j et Z_j $\leq D_j$, pour tout $j=1,\ldots,d_1$.

Polynôme de Hilbert-Samuel d'un sous-ensemble algébrique.

Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble algébrique non vide de $\mathcal{K}^{d_0+2d_1}$, il existe un idéal I de $\mathcal{K}[\underline{X},\underline{Y},\underline{Z}]$ dont $\mathcal{F}$ constitue l'ensemble des zéros dans $\mathcal{K}^{d_0+2d_1}$.
La *fonction multihomogène de Hilbert* de $\mathcal{F}$, correspondant à la partition

$$\mathcal{P}=\{\{X_1,\ldots,X_{d_0}\},\{Y_1,Z_1\},\ldots,\{Y_{d_1},Z_{d_1}\}\}$$

de l'ensemble de variables $\{\underline{X},\underline{Y},\underline{Z}\}$, est l'application $H(\mathcal{F};\ ;\ ):\mathbb{N}\times\mathbb{N}^{d_1}\longmapsto\mathbb{N}$ définie par

$$H(\mathcal{F};D_0;\underline{D}_1)=\dim_{\mathcal{K}}((\mathcal{K}[\underline{X},\underline{Y},\underline{Z}]_{\leq D_0,\underline{D}_1}+I)/I).$$

On sait que pour des entiers $D_0,\ D_1,\ldots,D_{d_1}$ suffisamment grands elle est égale à la valeur d'un polynôme en $D_0,\ D_1,\ldots,D_{d_1}$ dont le degré total est la dimension de $\mathcal{F}$; ce polynôme est le *polynôme multihomogène de Hilbert-Samuel* de $\mathcal{F}$, il admet une écriture de la forme

$$H(\mathcal{F};D_0;\underline{D}_1)=\sum_{\underline{i}\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^{d_1};\ |\underline{i}|\leq d} a_{\underline{i}}\prod_{k=0}^{d_1} D_k^{i_k}\quad\text{avec } d=\dim(\mathcal{F}).$$

Nous définissons le polynôme

$$\mathcal{H}(\mathcal{F};D_0;\underline{D}_1)=d!\sum_{\underline{i}\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^{d_1};\ |\underline{i}|=d} a_{\underline{i}}\prod_{k=0}^{d_1} D_k^{i_k},$$

obtenu en multipliant la partie homogène de degré d de $H(\mathcal{F};D_0;\underline{D}_1)$ par $d!$.

Les sous-groupes algébriques de G.

Les sous-groupes algébriques de G sont les sous-groupes de G qui sont aussi des sous-ensembles algébriques de G. On montre (cf. [Wal00], Proposition 5.6) qu'il s'écrivent tous, de façon unique, sous la forme $\mathcal{V} \times T_\Phi$ où $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}^{d_0}$, Φ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^{d_1}$ et T_Φ est défini par

$$T_\Phi = \{(y_1, \ldots, y_{d_1}) \in \mathcal{K}^{\times d_1} \ ; \ y_1^{\varphi_1} \cdots y_{d_1}^{\varphi_{d_1}} = 1 \text{ pour tout } (\varphi_1, \ldots, \varphi_{d_1}) \in \Phi\}.$$

On montre (cf. [Wal00], Théorème 5.13) que la dimension de G^* est

$$d^* = d_0^* + d_1^* \text{ avec } d_0^* = \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{V} \text{ et } d_1^* = d_1 - rang(\Phi),$$

et que G^* est connexe si et seulement si Φ est un sous-groupe saturé [1] de $\mathbb{Z}^{d_1}$.
Nous désignons par r le rang de Φ, $\mathcal{L}_{(d_1,r)}$ l'ensemble des partitions de $\{1, \ldots, d_1\}$ en deux sous-ensembles disjoints

$$\tilde{i}_r = \{i_1, \ldots, i_r\} \text{ et } \tilde{j}_{d_0^*} = \{j_1, \ldots, j_{d_0^*}\},$$

avec $i_1 < \ldots < i_r$ et $j_1 < \ldots < j_{d_0^*}$, $\mathcal{M}$ une matrice $r \times d$ dont les r lignes forment un système générateur de Φ et, pour tout $\tilde{i}_r = \{i_1, \ldots, i_r\}$ tel que $0 \le i_1 < \ldots < i_r \le d_1$, $\mathcal{M}_{\tilde{i}_r}$ la matrice $r \times r$ formée des colonnes de $\mathcal{M}$ d'indices $i_1, \ldots, i_r$.
Alors, pour des entiers $D_0, \ D_1, \ldots, D_{d_1} \ge 0$ on montre (cf. [Wal00], proposition 5.14) que

$$\mathcal{H}(G^*; D_0; \underline{D}_1) = \frac{d^*!}{d_0^*!} 2^{d_1^*} D_0^{d_0^*} \sum_{\{\tilde{i}_r, \tilde{j}_{d_0^*}\} \in \mathcal{L}_{(d_1,r)}} |\det \mathcal{M}_{\tilde{i}_r}| \, D_{j_1} \cdots D_{j_{d_1^*}}. \tag{5.2}$$

Avec la convention que la matrice vide a son déterminant égal à 1.
Lorsque $G^* = G$ cette expression s'écrit :

$$\mathcal{H}(G; D_0; \underline{D}_1) = \frac{d!}{d_0!} 2^{d_1} D_0^{d_0} D_1 \cdots D_{d_1}. \tag{5.3}$$

5.2.2 Enoncé du lemme de Zéros sans dérivation

Théorème 5.2 - *Soient Σ un sous-ensemble du groupe algébrique $G = \mathbb{G}_a^{d_0} \times \mathbb{G}_m^{d_1}$ contenant $e = (\underline{0}, \underline{1})$ l'élément neutre de G, D_0 un nombre entier ≥ 0 et $\underline{D} = (D_1, \ldots, D_{d_1})$ un élément de $\mathbb{N}^{d_1}$. On suppose qu'il existe un polynôme non nul P de $\mathcal{K}[G]_{\le D_0, \underline{D}}$ qui s'annule sur*

$$\Sigma[d] = \{\sigma_1 + \cdots + \sigma_d \ ; \ (\sigma_1, \ldots, \sigma_d) \in \Sigma^d\}.$$

Alors, il existe un sous-groupe algébrique connexe G^* de G de dimension $< d$ tel que :

$$\# \left(\frac{\Sigma + G^*}{G^*} \right) \mathcal{H}(G^*; D_0; \underline{D}_1) \le \mathcal{H}(G; D_0; \underline{D}_1). \tag{5.4}$$

Pour la démonstration de ce résultat voir [Wal00], § 5.4.

[1] Un sous-groupe Φ de $\mathbb{Z}^{d_1}$ est saturé si $m \in \mathbb{Z} \setminus 0$, $\underline{\sigma} \in \mathbb{Z}^{d_1}$, $m\underline{\sigma} \in \Phi$ implique que $\underline{\sigma} \in \Phi$.

5.3 Le lemme de zéros avec dérivations sur les groupes algébriques

5.3.1 Préliminaires

Dérivations sur $\mathcal{K}[G]$

Soient $\mathcal{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et $d_0,\ d_1$ deux entiers positifs vérifiant $d = d_0 + d_1 > 0$.
En plus des notations et définitions du paragraphe 9.1.1, relatives au groupe algébrique

$$G = \mathbb{G}_a^{d_0} \times \mathbb{G}_m^{d_1} = \mathcal{K}^{d_0} \times (\mathcal{K}^\times)^{d_1},$$

nous utiliserons les dérivations sur

$$\mathcal{K}[G] = \mathcal{K}[X_1, \ldots, X_{d_0}, Y_1, \ldots, Y_{d_1}, Y_1^{-1}, \ldots, Y_{d_1}^{-1}],$$

définies, pour chaque élément $\underline{w} = (\xi_1, \ldots, \xi_{d_0}, \eta_1, \ldots, \eta_{d_1})$ de $\mathcal{K}^d$, par

$$\mathcal{D}_{\underline{w}} = \Sigma_{h=1}^{d_0} \xi_h \frac{\partial}{\partial X_h} + \Sigma_{k=1}^{d_1} \eta_k \frac{\partial}{\partial Y_i}.$$

Définition 5.1 - *Soit g un point de G, $\mathcal{W}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}^d$ et N un entier ≥ 0, un élément P de $\mathcal{K}[G]$ s'annule au point g avec une multiplicité $\geq N$ dans la direction $\mathcal{W}$ si et seulement si*

$$\mathcal{D}_{\underline{w}_1} \cdots \mathcal{D}_{\underline{w}_s} P(g) = 0$$

pour tout entier s, tel que $1 \leq s \leq N - 1$, et tout $(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s) \in \mathcal{W}^s$.

On déduit de cette définition l'énoncé suivant Ł Soit $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n$ une base quelconque de $\mathcal{W}$. Un élément P de $\mathcal{K}[G]$ s'annule en un point g de G avec une multiplicité $\geq N$ dans la direction $\mathcal{W}$ si et seulement si pour tout $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ appartenant à $\mathbb{N}^n$ et vérifiant $\|\underline{\sigma}\| \leq N - 1$, on a

$$\mathcal{D}_{\underline{b}_1}^{\sigma_1} \cdots \mathcal{D}_{\underline{b}_n}^{\sigma_n} P(g) = 0$$

Démonstration du lemme 9.2.
Soit $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{N}^n$, nous pouvons écrire chaque puissance de dérivation $\mathcal{D}_{\underline{b}_i}^{\sigma_i},\ (1 \leq i \leq n)$ sous la forme développée

$$\mathcal{D}_{\underline{b}_i}^{\sigma_i} = \mathcal{D}_{\underline{b}_i} \cdots \mathcal{D}_{\underline{b}_i}$$

dans laquelle le terme de droite est le produit des σ_i termes identiques $\mathcal{D}_{\underline{b}_i}$. Par suite, $\mathcal{D}_{\underline{b}_1}^{\sigma_1} \cdots \mathcal{D}_{\underline{b}_n}^{\sigma_n}$ est le produit de $\|\underline{\sigma}\|$ dérivations, chacune appartenant à l'ensemble $\{\mathcal{D}_{\underline{b}_i},\ 1 \leq i \leq n\}$, ce qui démontre le lemme 9.2.

Espace tangent

Soit G^* un sous-groupe algébrique de G, on note $I(G^*)$ l'idéal annulateur de G^*. Par définition $I(G^*)$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{K}[G]$ qui s'annulent identiquement sur G^*. On définit l'espace tangent de G^* en l'élément neutre e de G comme le sous-espace vectoriel $T_e(G^*)$ de $\mathcal{K}^d$ constitué de tous les points $\underline{w}$ de $\mathcal{K}^d$, tels que la dérivation $\mathcal{D}_{\underline{w}}$ laisse stable $I(G^*)$.
Soient $\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}^d$ et Φ le sous-groupe de type fini de $\mathbb{Z}^{d_1}$ tels que $G^* = \mathcal{V} \times T_\Phi$. On note L le sous-ensemble algébrique de $\mathcal{K}^{d_1}$ constitué des zéros communs aux formes linéaires $\mathcal{T}_{\underline{\varphi}}$, $\underline{\varphi} \in \Phi$ définies par

$$\mathcal{T}_{\underline{\varphi}} = \varphi_1 Y_1 + \cdots + \varphi_{d_1} Y_{d_1}, \ \underline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{d_1}) \in \Phi \ ;$$

D. Roy montre dans [Wal00] (lemme 8.13), que l'espace tangent de G^* en l'élément neutre e de G est égal au produit cartésien $\mathcal{V} \times L$.

5.3.2 Enoncé du lemme de Zéros avec dérivations

Théorème 5.3 *Soient G^- et G^+ des sous-groupes algébriques connexes de G, avec $G^- \subset G^+$, soit Σ un sous-ensemble de G^+ contenant e l'élément neutre de G, soit $\mathcal{W}$ un sous-espace vectoriel de $T_e(G^+)$, soit S_0 un entier ≥ 0 et $\underline{D} = (D_0, D_1, \ldots, D_{d_1})$ un élément de $\mathbb{N}^{d_1+1}$. On note d^+ la dimension de G^+.*
On suppose que pour tout sous-groupe connexe G^* de G^+ de dimension $< d^+$, contenant G^- on a

$$\binom{S_0 + \ell_0'}{\ell_0'} \# \left(\frac{\Sigma + G^*}{G^*}\right) \mathcal{H}(G^*; D_0; \underline{D}) > \mathcal{H}(G^+; D_0; \underline{D}),$$

avec

$$\ell_0' = \dim_{\mathcal{K}} \left(\frac{\mathcal{W} + T_e(G^*)}{T_e(G^*)}\right).$$

Alors il n'existe aucun élément P de $\mathcal{K}[G]_{\leq D_0, \underline{D}}$ non identiquement nul sur G^+ s'annulant en chacun des points de $\Sigma[d^+] + G^-$ avec une multiplicité $> (d^+)S_0$ dans la direction $\mathcal{W}$.

Pour la démonstration de ce résultat, voir [Wal00], § 8.4.

◇◇◇◇◇

Chapitre 6

Le théorème des six exponentielles

6.1 Minoration du rang d'une matrice en fonction de ses dimensions

Les premières démonstrations du théorème des six exponentielles énoncé ci-dessous, sont dûes à Lang (cf. [Lang66]) et à Ramachandra (cf. [Ram68]).

Théorème 6.1 - *Soient ℓ et d deux entiers positifs satisfaisant $d\ell > d + \ell$. Soient $x_1, \ldots, x_d$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et soient $y_1, \ldots, y_\ell$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors l'un au moins des $d\ell$ nombres $\exp(x_i y_j)$, $(1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq \ell)$ est transcendant.*

L'appellation du théorème provient de l'hypothèse $d\ell > d+\ell$ sur les nombres entiers d et ℓ, que l'on peut encore écrire $(d-1)(\ell-1) \geq 2$, ce qui équivaut à $d \geq 3$ et $\ell \geq 2$ (ou bien l'inverse). Le cas limite est donc celui où l'on obtient une liste de six exponentielles. Si $d = 1$ (ou bien $\ell = 1$) la conclusion du théorème n'est manifestement pas toujours vérifiée, et si $d = 2$ et $\ell = 2$, c'est à dire si $d\ell = d + \ell$, nous obtenons *la conjecture des quatre exponentielles*, formulée par Lang dans (cf. [Lang66], Chap.2, $1) et non démontrée à ce jour.

En notant $\mathcal{L}$ l'ensemble des nombres complexes dont l'image par la fonction exponentielle est un nombre algébrique,

$$\mathcal{L} = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \exp \lambda \in \overline{\mathbb{Q}}\},$$

le théorème des six exponentielles peut s'énoncer sous la forme équivalente suivante :

Théorème 6.2 - *Considérons une $d \times \ell$ matrice $\mathcal{M} = (\lambda_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq d \\ 1\leq j\leq \ell}}$ dont les coefficients sont des éléments de $\mathcal{L}$. Nous supposons que les d lignes de $\mathcal{M}$ définissent des vecteurs $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de $\mathbb{C}^\ell$ et que les ℓ colonnes de $\mathcal{M}$ définissent des vecteurs $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de $\mathbb{C}^d$. Alors, si $d\ell > d + \ell$, le rang de $\mathcal{M}$ est supérieur où égal à 2.*

L'équivalence des deux théorèmes provient du fait que la matrice $\mathcal{M}$ est de rang 1 si et seulement s'il existe des nombres complexes $x_1, \ldots, x_d$ et $y_1, \ldots, y_\ell$ tels que : $\lambda_{i,j} = \exp x_i y_j,\ (1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq \ell)$.

Il est naturel de se demander s'il est possible, pour $d\ell/(d+\ell)$ suffisamment grand, de minorer le rang de $\mathcal{M}$ par un nombre supérieur à 2. la réponse est généralement négative comme le montre l'exemple des matrices $\mathcal{M}_n$, $(n \in \mathbb{N}_{\geq 1})$, définies à partir de la suite strictement croissante des nombres premiers $(p_n)_{n\geq 1}$ par

$$\mathcal{M}_n = \begin{pmatrix} \log 2 & \log 3 & \dots & \log p_n \\ \log 3 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ \log p_n & & & \end{pmatrix}, \ (n \in \mathbb{N}).$$

Puisque, pour chaque nombre entier $n \geq 2$, $\mathcal{M}_n$ est de rang égal à 2.

L'énoncé suivant contient le théorème 6.2 et donne une condition pour que le rang de $\mathcal{M}$ soit supérieur ou égal à $d\ell/(d+\ell)$.

Théorème 6.3 - *Soit $\mathcal{M} = (\lambda_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq d\\ 1\leq j\leq \ell}}$ une matrice dont les coefficients sont des éléments de $\mathcal{L}$, vérifiant la condition :*
$(\mathcal{I})$ Pour tout $(t_1,\dots,t_d) \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ et pour tout $(s_1,\dots,s_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \setminus \{0\}$,

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{\ell} t_i s_j \lambda_{i,j} \neq 0.$$

Alors, le rang de $\mathcal{M}$ est supérieur ou égal à $d\ell/(d+\ell)$.

6.2 Démonstration du théorème 6.3

6.2.1 Existence de polynômes

Préliminaires.
Soit n le rang de $\mathcal{M}$, nous utilisons la notation

$$\underline{x}\cdot\underline{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

, pour $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\underline{y} = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{C}^n$. Il existe d vecteurs $\underline{x}_i = (x_{i,1},\dots,x_{i,n})$, $(1 \leq i \leq d)$, de $\mathbb{C}^n$ et ℓ vecteurs $\underline{y}_j = (y_{j,1},\dots,y_{j,n})$, $(1 \leq j \leq \ell)$, de $\mathbb{C}^n$ tels que

$$\lambda_{i,j} = \underline{x}_i \cdot \underline{y}_j, \ (1 \leq i \leq d, \ 1 \leq j \leq \ell).$$

Nous ordonnons par récurrence le sous-ensemble infini et dénombrable de $\mathbb{C}^n$

$$\mathcal{Y} = \left\{ \sum_{j=1}^{\ell} s_j \underline{y}_j \ ; \ (s_1,\dots,s_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \right\}$$

de façon à former une suite $(\underline{\omega}_k)_{k\geq 1}$ de $\mathbb{C}^n$ vérifiant, pour tout nombre entier $N \geq 1$,

$$\left\{ \underline{\omega}_k \ ; \ 1 \leq k \leq (2N-1)^\ell \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^{\ell} s_j \underline{y}_j \ ; \ (s_1,\dots,s_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \text{ avec } \mid s_j \mid < N, \ (1 \leq j \leq \ell) \right\}.$$

Cette suite vérifie la condition $\mathcal{C}(\ell)$ (cf. chapitre 4), puisque, pour tout nombre entier $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sup\left\{\mid \underline{\omega}_k \mid \,;\ 1 \leq k \leq \lceil N^\ell \rceil\right\} &\leq \sup\left\{\mid \underline{\omega}_k \mid \,;\ 1 \leq k \leq (2N-1)^\ell\right\} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\ell} \mid \underline{y}_j \mid\right) N. \end{aligned}$$

Nous appliquons le théorème 4.1 aux d fonctions $f_1, \ldots, f_d$ entières dans $\mathbb{C}^n$ définies par

$$f_i(\underline{z}) = \exp(\underline{z} \cdot \underline{x}_i),\ (1 \leq i \leq d),$$

à la suite $(\underline{\omega}_k)_{k\geq 1}$ et au corps de nombres $K = \mathbb{Q}\,(\alpha_{i,j},\ 1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq \ell)$, avec

$$\alpha_{i,j} = \exp(\lambda_{i,j}),\ (1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq \ell).$$

Les fonctions $f_1, \ldots, f_d$ étant chacune d'ordre de croissance inférieur ou égal à 1 ; nous prenons $\varrho_1 = \ldots = \varrho_d = 1$ et $\underline{a} = 0$; alors

$$\omega = (d+\ell)/d \text{ et } \underline{b} = (\ell/d, \ldots, \ell/d).$$

Nous supposons que $n < \ell d/(d+\ell)$, ce qui revient à dire que la condition (C_3) du théorème 4.1 est satisfaite.

Vérification de la condition (A.R.) du théorème 4.1.
Considérons les ensembles de fonctions et de fonctionnelles définis respectivement, pour tout nombre réel $\mu \in]0,\ 1[$ et tout nombre entier $N \geq 1$, par

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{\underline{b},\mu}(N) &= \{\Phi_{\underline{\theta}} = f_1^{\theta_1} \cdots f_d^{\theta_d} \ ;\ \underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_d) \in \mathbb{N}^d,\ \theta_\sigma < \lceil \mu N^{b_\sigma} \rceil,\ (1 \leq \sigma \leq d)\} \\ \hat{\Psi}_\ell(N) &= \{\Psi_k \ ;\ k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq \lceil N^\ell \rceil\}, \end{aligned}$$

avec,

$$\Psi_k(\Phi) = \Phi(\underline{\omega}_k),\ (\Phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^d),\ (k, \underline{\tau}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d).$$

De l'inégalité $N^\ell \leq (2N-1)^\ell$ on déduit :

$$\left\{\underline{\omega}_k \ ;\ 1 \leq k \leq N^\ell\right\} \subset \left\{\sum_{j=1}^{\ell} s_j \underline{y}_j \ ;\ (s_1, \ldots, s_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \text{ avec } \mid s_j \mid < N,\ (1 \leq j \leq \ell)\right\}.$$

Par conséquent, pour tout nombre entier k, $1 \leq k \leq N^\ell$, il existe un élément unique $(s_1^{(k)}, \ldots, s_\ell^{(k)})$ de $\mathbb{N}^\ell$ tel que

$$\mid s_j^{(k)} \mid < N,\ (1 \leq j \leq \ell) \text{ et } \underline{\omega}_k = \sum_{j=1}^{\ell} s_j^{(k)} \underline{y}_j.$$

D'autre part, pour toute fonction $\Phi_{\underline{\theta}} \in \hat{\Phi}_{\underline{b},\mu}(N)$,

$$\Phi_{\underline{\theta}}(\underline{\omega}_k) = \prod_{i=1}^{d} \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_{i,j}^{s_j^{(k)} \theta_i}.$$

Les polynômes $P_{k,\underline{\theta}}$ de $K[X_{i,j},\ (1 \le i \le d,\ 1 \le j \le \ell)]$ définis par

$$P_{k,\underline{\theta}}(\underline{X}) = \prod_{i=1}^{d} \prod_{j=1}^{\ell} X_{i,j}^{s_j^{(k)}\theta_i},$$

satisfont donc les égalités

$$\Psi_k(\Phi_{\underline{\theta}}) \;=\; P_{k,\underline{\theta}}(\alpha_{i,j},\ 1 \le i \le d,\ 1 \le j \le \ell),$$

pour tout $(k, \underline{\tau}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d$, vérifiant les conditions

$$1 \le k \le (2N-1)^{\ell},\ \theta_\sigma < \lceil \mu N^{b_\sigma} \rceil,\ (1 \le \sigma \le d).$$

On en déduit que, pour tout nombre réel $\mu \in]0,\ 1[$ et tout nombre entier $N \ge 1$, le couple $\left(\hat{\Psi}_\ell(N), \hat{\Phi}_{\underline{b},\mu}(N)\right)$ vérifie la condition (A.R.) relativement au couple de nombres réels $(N^{(d+\ell)/d}\ ,\ \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_{i,j})$.

Vérification de la condition (C_4) *du théorème 4.1.*
Il nous faut démontrer que

$$\lim_{N \to +\infty} N^{(d+\ell)/d} N^{-\ell/n} = 0.$$

Or,

$$(d+\ell)/d - \ell/n \;=\; \left(\frac{d+\ell}{dn}\right)\left(n - \frac{\ell d}{\ell + d}\right).$$

Comme nous supposons $n < \ell d/(\ell + d)$ la condition (C_4) est satisfaite.

Conséquences.
D'aprés le théorème 4.1, quel que soit le nombre réel μ vérifiant $0 < \mu < 1$, il existe un nombre entier N_0 tel que pour tout nombre entier $N \ge N_0$, il existe un polynôme non nul Q_N de $K[X_1, \ldots, X_d]$ dont le degré partiel en chaque indéterminée X_σ est $< \mu N^{\ell/d}$ et tel que la fonction $F_N = Q_N(f_1, \ldots, f_d)$ s'annule sur l'ensemble $\left\{\underline{\omega}_k\ ;\ 1 \le k \le N^{\ell}\right\}$.

6.2.2 Application d'un lemme de zéros

6.2.2.a Enoncé du résultat

Nous notons Γ le sous-groupe du groupe algébrique multiplicatif $(\mathbb{C}^*)^d$ défini par :

$$\Gamma = \left\{ \left(\prod_{j=1}^{\ell} \alpha_{1,j}^{s_j}, \ldots, \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_{d,j}^{s_j} \right)\ ;\ (s_1, \ldots, s_\ell) \in \mathbb{Z}^{\ell} \right\}\ ;$$

nous pouvons écrire

$$\Gamma = \bigcup_{N \in \mathbb{N}_{\ge 1}} \Gamma(N),$$

avec

$$\Gamma(N) = \left\{ \left(\prod_{j=1}^{\ell} \alpha_{1,j}^{s_j}, \ldots, \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_{d,j}^{s_j} \right) \; ; \; (s_1, \ldots, s_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \text{ avec } \mid s_j \mid < N, \; (1 \leq j \leq \ell) \right\}.$$

Remarquons que, pour tout nombre entier $N \geq 1$,

$$\Gamma(\lceil (N+1)/2 \rceil) \subset \left\{ (f_1(\underline{\omega}_k), \ldots, f_d(\underline{\omega}_k)) \; ; \; 1 \leq k \leq N^\ell \right\}.$$

En notant :

$$G = (\mathbb{C}^*)^d, \; \Sigma = \Gamma(\lceil (N+1)/2d \rceil) \text{ et } \underline{D}^{(\mu)}(N) = (\lceil \mu N^{\ell/d} \rceil, \ldots, \lceil \mu N^{\ell/d} \rceil) \in \mathbb{N}^d,$$

nous allons démontrer l'énoncé suivant, ce qui achèvera la démonstration du théorème 6.3 puisque l'hypothèse $n < \ell d/(\ell + d)$ conduit à une contradiction.

Proposition 6.1 - *Soient d et ℓ deux nombres entiers tels que $d\ell \geq d + \ell$ et $\lambda_{i,j}$, $(1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq \ell)$, des éléments de $\mathcal{L}$ vérifiant la condition $(\mathcal{I})$ du théorème 6.3. Considérons μ un élément de l'intervalle* $]0 \; ; \; 1/(2^{d+2}d!(2d)^\ell)[$.
Alors, pour tout nombre entier $N > 2d$, il n'existe pas de polynôme non nul de $K[X_1, \ldots, X_d]_{\leq \underline{D}^{(\mu)}(N)}$ qui s'annule sur $\left\{ (f_1(\underline{\omega}_k), \ldots, f_d(\underline{\omega}_k)) \; ; \; 1 \leq k \leq N^\ell \right\}$.

Soit μ un nombre réel tel que $0 < \mu < 1/(2^{d+2}d!(2d)^\ell)$, nous allons établir que, pour tout nombre entier $N > 2d$, tout sous-groupe algébrique connexe G^* de G, vérifie l'inégalité

$$\# \left(\frac{\Sigma + G^*}{G^*} \right) \mathcal{H}(G^*; \underline{D}^{(\mu)}(N)) > \mathcal{H}(G; \underline{D}^{(\mu)}(N)), \tag{6.1}$$

alors, d'aprés le théorème 5.2, nous aurons démontré qu'il n'existe pas de polynôme non nul de $K[X_1, \ldots, X_d]_{\leq \underline{D}^{(\mu)}(N)}$ qui s'annule sur $\Sigma[d]$ et donc à fortiori sur $\left\{ (f_1(\underline{\omega}_k), \ldots, f_d(\underline{\omega}_k)) \; ; \; 1 \leq k \leq N^\ell \right\}$ puisque $\Sigma[d] \subset \Gamma(\lceil (N+1)/2 \rceil)$.

6.2.2.b Une minoration de $\# (\Sigma + G^*/G^*)$.

Soit G^* un sous-groupe algébrique connexe G^* de G, $G^* \neq G$, il existe un sous-groupe saturé Φ de $\mathbb{Z}^d$ tel que $G^* = T_\Phi$; comme $G^* \neq G$, $\Phi \neq \{\underline{0}\}$, Φ est donc de rang $r \geq 1$.
D'aprés les égalités (5.2) et (5.3), l'inégalité (6.1) est vérifiée si

$$\# \left(\frac{\Sigma + G^*}{G^*} \right) > d!(2\mu)^r N^{\ell r/d}. \tag{6.2}$$

Nous commençons par démontrer le résultat suivant :

Lemme 6.1 - *Sous les hypothèses de la proposition 6.1, pour tout nombre entier $N > 2d$ et tout sous-groupe algébrique $G^* = T_\Phi$ de G, G^* distinct de G, si Φ est de rang ≥ 2 alors $\#(\Sigma + G^*)/G^* > \left(1/(4(2d)^\ell)\right) N^\ell$, si Φ est de rang 1 alors $\#(\Sigma + G^*)/G^* > \left(1/(4(2d)^\ell)\right) N^{\ell - 1}$.*

Démonstration du lemme 6.1

Le rang de Γ est égal à ℓ

D'aprés sa définition Γ est engendré par les ℓ éléments de G :

$$\underline{\gamma}_j = (\alpha_{1,j}, \ldots, \alpha_{d,j}),\ (1 \leq j \leq \ell).$$

Il nous suffit de démontrer qu'ils sont linéairement indépendants.

Supposons vérifiée une relation de dépendance non triviale

$$\underline{\gamma}_1^{s_1} \cdots \underline{\gamma}_\ell^{s_\ell} = (1, \ldots, 1),\ \text{avec } (s_1, \ldots, s_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \setminus \{\underline{0}\},$$

elle équivaut à l'existence d'entiers relatifs non nuls (d'aprés la condition (I)) $k_1, \ldots, k_d$ tels que

$$\sum_{j=1}^{\ell} s_j \lambda_{r,j} = 2i\pi k_r,\ (1 \leq r \leq d),$$

ce qui entraîne les égalités

$$\sum_{j=1}^{\ell} s_j k_{r'} \lambda_{r,j} - \sum_{j=1}^{\ell} s_j k_r \lambda_{r',j} = 0,\ (1 \leq r \leq d,\ 1 \leq r' \leq d),$$

et entre en contradiction avec la condition (I).

Nous distinguons à présent les deux situations $r \geq 2$ et $r = 1$.

Supposons $r \geq 2$; le sous-groupe Φ de $\mathbb{Z}^d$ possède au moins deux éléments linéairement indépendants

$$\underline{\sigma}_t = (\sigma_{t,1}, \ldots, \sigma_{t,d}),\ t \in \{1, 2\}.$$

Considérons $\underline{\gamma} = \left(\prod_{j=1}^{\ell} \alpha_{p,j}^{s_j}\right)_{1 \leq i \leq d}$ un élément de $G^* \cap \Gamma$, il vérifie les deux égalités :

$$\prod_{p=1}^{d} \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_{p,j}^{s_j \sigma_{t,p}} = 1,\ t \in \{1, 2\}.$$

Il existe donc deux nombres entiers relatifs k_1 et k_2 tels que :

$$\sum_{p=1}^{d} \sum_{j=1}^{\ell} s_j \sigma_{t,p} \lambda_{p,j} = 2i\pi k_t,\ t \in \{1, 2\}.$$

On en déduit :

$$\sum_{p=1}^{d} \sum_{j=1}^{\ell} s_j (k_2 \sigma_{1,p} - k_1 \sigma_{2,p}) \lambda_{p,j} = 0.$$

Si l'un des deux entiers k_1, k_2 est nul, la condition (I) entraîne $\underline{\gamma} = (1, \ldots, 1)$.

Si aucun des deux entiers k_1, k_2 n'est égal à zéro, l'élément $k_2 \underline{\sigma}_1 - k_1 \underline{\sigma}_2$ de $\mathbb{Z}^d$ est non nul et la condition (I) entraîne de même $\underline{\gamma} = (1, \ldots, 1)$.

On vient d'établir que, si le rang de Φ est ≥ 2, alors $G^* \cap \Gamma = \{1\}$.

Nous démontrons à présent que si $r = 1$ alors le rang de $G^* \cap \Gamma$ est ≤ 1.

Remarquons tout d'abord que $G^* \cap \Gamma$ est un sous-module du module libre de type fini Γ sur l'anneau principal $\mathbb{Z}$, $G^* \cap \Gamma$ est donc libre de type fini.
Supposons $G^* \cap \Gamma \neq \{\underline{1}\}$, alors $G^* \cap \Gamma$ possède $\underline{\gamma}_1$ et $\underline{\gamma}_2$ deux éléments distincts et différents de $(1, \ldots, 1)$; il existe deux éléments non nuls $\underline{s}_1 = (s_{1,1}, \ldots, s_{1,\ell})$ et $\underline{s}_2 = (s_{2,1}, \ldots, s_{2,\ell})$ de $\mathbb{Z}^\ell$ tels que

$$\underline{\gamma}_q = \left(\prod_{j=1}^{\ell} \alpha_{p,j}^{s_{q,j}}\right)_{1\leq p\leq d}, \quad q \in \{1, 2\}.$$

Comme $r = 1$, Φ possède un élément $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ non nul qui vérifie les égalités

$$\prod_{p=1}^{d}\prod_{j=1}^{\ell} \alpha_{p,j}^{s_{q,j}\sigma_p} = 1, \;\; q \in \{1, 2\}.$$

Cela entraîne l'existence de nombres relatifs k_1 et k_2 tels que :

$$\sum_{p=1}^{d}\sum_{j=1}^{\ell} s_{q,j}\sigma_p\lambda_{p,j} = 2i\pi k_q, \;\; q \in \{1, 2\}.$$

D'où :

$$\sum_{p=1}^{d}\sum_{j=1}^{\ell}(s_{1,j}k_2 - s_{2,j}k_1)\sigma_p\lambda_{p,j} = 0.$$

Comme $\underline{\sigma} \neq \underline{0}$, la condition (I) entraîne $k_2\underline{s}_1 - k_1\underline{s}_2 = 0$, ce qui démontre que le rang de $G^* \cap \Gamma$ est égal à 1.

Nous concluons en distinguant les deux seuls cas possibles.

Lorsque $G^* \cap \Gamma = \{\underline{1}\}$, il vient $\#(\Sigma + G^*)/G^* = \#\Sigma$ et comme $N > 2d$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \#(\Sigma + G^*)/G^* &= (2\lceil (N+1)/2d \rceil - 1)^\ell. \\ &\geq ((N+1)/2d)^\ell \\ &\geq (1/2d)^\ell N^\ell. \end{aligned}$$

Lorsque le rang de $\Gamma \cap G^*$ est égal à 1 le rang du groupe $(\Gamma + G^*)/G^*$ est égal à $\ell - 1$. Le lemme de comptage suivant (démontré dans [Wal00], cf. Lemme 7.8) va nous permettre de minorer le nombre d'éléments de $(\Sigma + G^*)/G^*$.

Lemme 6.2 - *Soit $\Psi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un homomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules et $\mathcal{E}$ un sous-ensemble fini de $\mathcal{M}$. Alors, en posant $\tilde{\mathcal{E}} = \{\lambda - \lambda', \; (\lambda, \lambda') \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}\}$,*

$$\#\Psi(\mathcal{E}) \cdot \#(\tilde{\mathcal{E}} \cap \ker \Psi) \geq \#\mathcal{E}.$$

Nous prenons pour $\mathbb{Z}$-modules les groupes Γ et $\Gamma/\Gamma \cap G*$, pour homomorphisme la surjection canonique $s : \Gamma \to \Gamma/\Gamma \cap G^*$ et Σ pour sous-ensemble fini de Γ.
Or,

$$\tilde{\Sigma} \subset \Gamma(2\lceil (N+1)/2d \rceil) \subset \Gamma(2N),$$

d'où

$$\tilde{\Sigma} \cap G^* \subset \Gamma(2N) \cap G^*,$$

par suite le lemme de comptage permet d'écrire :

$$\#(\Sigma + G^*)/G^* \cdot \#\Gamma(2N) \cap G^* \geq \#\Sigma.$$

Considérons $\underline{\alpha} = \left(\prod_{j=1}^{\ell} \alpha_{1,j}^{s_j}, \ldots, \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_{d,j}^{s_j}\right)$, un générateur de $\Gamma \cap G^*$.
Tout élément de $\Gamma(2N) \cap G^*$ est de la forme $\underline{\alpha}^n$, $n \in \mathbb{Z}$, avec : $\mid \underline{s} \mid \cdot \mid n \mid < 2N$; le nombre d'éléments de $\Gamma(2N) \cap G^*$ est, par conséquent, majoré par $4N/ \mid \underline{s} \mid$.
On déduit donc du lemme 6.2 l'inégalité

$$\begin{aligned} \#(\Sigma + G^*)/G^* &\geq \frac{\mid \underline{s} \mid \cdot \#\Sigma}{4N} \\ &\geq \frac{\mid \underline{s} \mid \cdot (2\lceil (N+1)/2d \rceil - 1)^\ell}{4N} \end{aligned}$$

Or $N > 2d$, par suite

$$\frac{\mid \underline{s} \mid \cdot (2\lceil (N+1)/2d \rceil - 1)^\ell}{4N} \geq \frac{\mid \underline{s} \mid}{4(2d)^\ell} N^{\ell-1}.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 6.1.

6.2.2.c Démonstration de la proposition 6.1

Lorsque $r = 1$, l'inégalité (6.2) s'écrit :

$$\# \left(\frac{\Sigma + G^*}{G^*} \right) > 2d! \mu N^{\ell/d}.$$

Or, d'aprés le lemme 6.2 :

$$\#(\Sigma + G^*)/G^* > \left(1/(4(2d)^\ell)\right) N^{\ell-1}.$$

Il nous suffit donc de choisir un nombre réel μ vérifiant :

$$\left(\frac{1}{8d!(2d)^\ell} \right) N^{(d\ell - d - \ell)/d} > \mu > 0, \quad N \in \mathbb{N}_{>2d}. \tag{6.3}$$

L'inégalité $1 \leq \ell d/(\ell + d)$ équivaut à $d\ell - d - \ell \geq 1$, par conséquent, tout élément μ de l'intervalle réel $]0 \ ; \ 1/(8d!(2d)^\ell)[$ vérifie les inégalités (6.3).

Lorsque $r \geq 2$, comme $r \leq d$ et $0 < \mu < 1$ on a $2^d d! \mu N^\ell \geq d! 2^r \mu^r N^{\ell r/d}$ et l'inégalité (6.2) est satisfaite si :

$$\# \left(\frac{\Sigma + G^*}{G^*} \right) > 2^d d! \mu N^\ell.$$

Pour que cette condition soit vérifiée pour tout nombre entier $N > 2d$, il suffit, d'aprés le lemme 6.2, d'avoir

$$\left(1/(4(2d)^\ell)\right) N^\ell > 2^d d! \mu N^\ell, \quad \text{pour tout } N \in \mathbb{N}_{>2d},$$

ce qui est le cas pour tout élément μ de l'intervalle $]0 \ ; \ 1/(2^{d+2} d!(2d)^\ell)[$.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

Chapitre 7

Le théorème de Baker

Notations On définit l'ensemble $\mathcal{L}$ des logarithmes de nombres algébriques par

$$\mathcal{L} = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \exp \lambda \in \overline{\mathbb{Q}}\}.$$

$\mathcal{L}$ est donc l'ensemble des nombres complexes dont l'image par l'exponentielle est un nombre algébrique. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, constitué de toutes les déterminations des logarithmes des nombres algébriques non nuls.

7.1 Les énoncés du théorème de Baker

On se propose de démontrer le résultat suivant dû à Baker.

Théorème 7.1 (Théorème de Baker, première forme.) - *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments de $\mathcal{L}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors les nombres $1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Le théorème de Baker est équivalent à chacun des deux énoncés suivants.

Théorème 7.2 (Théorème de Baker, deuxième forme.) - *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont des éléments de $\mathcal{L}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et si $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ sont des nombres algébriques tels que $\beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \ldots + \beta_{n-1}\lambda_{n-1}$ est un élément de $\mathcal{L}$, alors $\beta_0 = 0$ et les nombres $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ sont rationnels.*

Théorème 7.3 (Théorème de Baker, troisième forme.) - *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont des éléments de $\mathcal{L}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et si $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ sont des nombres algébriques tels que $\beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \ldots + \beta_{n-1}\lambda_{n-1}$ est un élément de $\mathcal{L}$, alors $\beta_0 = 0$ et les nombres $1, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$.*

Nous établirons le théorème de Baker sous sa troisième forme.

7.2 L'équivalence des énoncés.

Il est clair que la deuxième forme implique la troisième forme.

La première forme implique la deuxième.

Supposons que la première forme du théorème de Baker soit établie, que $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ soient des éléments de $\mathcal{L}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et que $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ soient des nombres algébriques tels que

$$\beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \cdots + \beta_{n-1}\lambda_{n-1} \in \mathcal{L}.$$

Il existe alors $\lambda_n \in \mathcal{L}$ tel que :

$$\beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \ldots + \beta_{n-1}\lambda_{n-1} - \lambda_n = 0$$

Par conséquent $1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont linéairement dépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Or, nous avons supposé $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, il existe donc, d'aprés la première forme du théorème de Baker, des nombres rationnels $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_n = \alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_{n-1}.$$

Par suite :

$$\beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \cdots + \beta_{n-1}\lambda_{n-1} - (\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_{n-1}) = 0$$

et donc :

$$\beta_0 + (\beta_1 - \alpha_1)\lambda_1 + \cdots + (\beta_{n-1} - \alpha_{n-1})\lambda_{n-1} = 0.$$

Nous réutilisons l'hypothèse selon laquelle les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ pour réappliquer le théorème de Baker sous sa première forme et conclure à leur indépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On obtient finallement : $\beta_0 = 0$ et $\beta_i = \alpha_i, (1 \leq i \leq n-1)$. Les nombres $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ sont donc rationnels.

La troisième forme implique la première

Supposons établi le théorème de Baker sous sa troisième forme et notons $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ l'ensemble des parties finies non vides $\tilde{p}$ de $\mathcal{L}$ définies par les deux conditions :

1. les éléments de $\tilde{p}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.
2. les éléments de $\tilde{p} \cup \{1\}$ sont linéairement dépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Nous allons montrer que $\mathcal{P}(\mathcal{L}) = \emptyset$.
Supposons que $\mathcal{P}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$, alors l'entier $n = \inf\{\#\tilde{p},\ \tilde{p} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})\}$ est ≥ 1. Notons $\tilde{p}_0 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ en lequel le minimum n est atteint. Il existe , par définition de $\mathcal{P}(\mathcal{L})$, des nombres algébriques $\beta_0, \ldots, \beta_n$ non tous nuls, tels que :

$$\beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \cdots + \beta_n\lambda_n = 0. \tag{7.1}$$

Il existe un entier $k, 1 \leq k \leq n$, tel que $\beta_k \neq 0$ et

$$\beta_0/\beta_k + \sum_{i \neq k}(\beta_i/\beta_k)\lambda_i \in \mathcal{L}$$

Le théorème de Baker sous sa troisième forme s'applique et par conséquent $\beta_0 = 0$ et les nombres algébriques algébriques $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$. Il existe donc des nombres rationnels $\{\alpha_i, 1 \leq i \leq n\}$ non tous nuls, tels que

$$\alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n = 0.$$

Si on note α_p l'un des rationnels différents de zéro de l'ensemble $\{\alpha_i, 1 \leq i \leq n\}$, l'égalité précédente peut encore s'écrire :

$$\beta_p = \sum_{i \neq p} (-\alpha_i/\alpha_p)\beta_i.$$

On a donc, d'aprés l'égalité (7.1)

$$\sum_{i \neq p} \lambda_i\beta_i - \sum_{i \neq p} \lambda_p(-\alpha_i/\alpha_p)\beta_i = 0,$$

que l'on peut encore écrire :

$$\sum_{i \neq p} (\lambda_i - \lambda_p(-\alpha_i/\alpha_p))\beta_i = 0.$$

Or l'ensemble $\{\lambda_i - \lambda_p(-\alpha_i/\alpha_p), 1 \leq i \leq n\}$ est contenu dans $\mathcal{L}$ et ses éléments sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$; le fait que les nombres algébriques $\beta_i,\ i \neq p, 1 \leq i \leq n$ ne sont pas tous nuls entraine donc la contradiction avec le choix de l'entier n minimal.
Nous venons ainsi de démontrer que $\mathcal{P}(\mathcal{L}) = \emptyset$.

7.3 Les étapes de la démonstration du théorème de Baker

Afin de démontrer le théorème de Baker sous sa troisième forme nous allons procéder en deux temps.

Homogénéisation

Nous montrons d'abord que toute relation de la forme

$$\beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \cdots + \beta_{n-1}\lambda_{n-1} = \lambda_n$$

avec $(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}) \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathcal{L}^{n-1}$, les nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ étant linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, implique $\beta_0 = 0$.

Indépendance linéaire.

Ensuite nous établissons qu'une relation de Baker homogène telle que

$$\beta_1\lambda_1 + \cdots + \beta_{n-1}\lambda_{n-1} = \lambda_n$$

avec $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) \in \overline{\mathbb{Q}}^{n-1}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathcal{L}^{n-1}$, les nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ étant linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, entraîne que les nombres $1, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$.

7.4 Homogénéisation par la méthode de schneider

Nous démontrons l'énoncé suivant :

Proposition 7.1 - *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ des éléments de $\mathcal{L}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}$ des nombres algébriques linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ tels que $\beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \ldots + \beta_{n-1}\lambda_{n-1} \in \mathcal{L}$. Alors $\beta_0 = 0$.*

7.4.1 Préliminaires

Considérons $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ des nombres complexes vérifiant les hypothèses ci-dessus et tels que $\beta_0 \neq 0$. Nous définissons les n nombres algébriques $\alpha_1 = \exp(\lambda_1), \ldots,\ \alpha_{n-1} = \exp(\lambda_{n-1}),\ \alpha_n = \exp(\beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \ldots + \beta_{n-1}\lambda_{n-1})$, le corps de nombres $K = \mathbb{Q}(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et les $n+1$ fonctions de n variables complexes

$$f_0 = z_0, \ldots,\ f_{n-1} = z_{n-1},\ f_n = \exp(z_0 + \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_{n-1} z_{n-1}).$$

Nous allons dériver $f_0, \ldots, f_{n-1}, f_n$ selon la première variable aux points de La suite $\tilde{\omega} = (\underline{\omega}_p)_{p\geq 1}$ obtenue en ordonnant l'ensemble $\{0\} \times \mathbb{Z}^{n-1} + \mathbb{Z}(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1})$ de telle façon que pour tout entier $N \geq 1$,

$$\{\underline{\omega}_p, 1 \leq p \leq (2N-1)^n\} = \{(h_n\beta_0, h_1 + h_n\beta_1, \ldots \\ \ldots, h_{n-1} + h_n\beta_{n-1}), h_i \in \mathbb{Z}, |h_i| < N, 1 \leq i \leq n\}.$$

Pour tout nombre entier $k \geq 1$, nous notons $\underline{h}_k = (h_{1,k}, \ldots, h_{n,k})$ l'élément de $\mathbb{Z}^n$ qui correspond à l'élément de rang k de la suite $\tilde{\omega}$.

7.4.2 Application du théorème d'existence de polynômes

La suite $\tilde{\omega}$ vérifie la condition $(C^{(n)})$ du théorème 4.1 (puisque $\beta_0 \neq 0$).
D'autre part, comme nous ne dérivons que par rapport à la première variable, nous choisissons l'élément $\underline{a}$ du théorème 4.1 dans $\mathbb{N} \times 0^{n-1}$; nous posons $t = 1 + 1/n^2$ et $\underline{a} = (t, 0, \ldots, 0)$. Par suite : $\|\underline{a}\| = 1 + 1/n^2$.
Enfin, les ordres des fonctions $f_0, \ldots, f_{n-1}$ sont respectivement inférieurs ou égaux aux nombres réels[1] $\varrho_0, \ldots, \varrho_{n-1}$ définis par $\varrho_0 = \ldots = \varrho_{n-1} = 1/n^2$ et l'ordre de f_n est inférieur ou égal à $\varrho_n = 1$.
Nous obtenons donc en prenant $\ell = n$, $t = 1 + 1/n^2$, $s = n+1$, $d = n$ et

$$\underline{b} = (\omega - \varrho_\sigma)_{0 \leq \sigma \leq n},$$

les égalités :

$$\omega = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2} \text{ et } \|\underline{b}\| = n + 1 + \frac{1}{n^2}.$$

La condition (C_3) se démontre facilement puisque, pour tout nombre entier $n \geq 1$, l'inégalité $(\ell + \|\underline{a}\|)(s-d) > (\varrho_0 + \cdots + \varrho_n)d$ équivaut à $n + 1 + 1/n^2 > n(1 + 1/n)$, et l'inégalité $\ell + \|\underline{a}\| \geq d \max\{a_k,\ 1 \leq k \leq d\}$ équivaut à $n + 1 + 1/n^2 \geq n(1 + 1/n^2)$.

[1]En fait, tout nombre réel $\varrho > 0$ est un majorant des ordres des fonctions $f_0, \ldots, f_{n-1}$.

Vérification des conditions (C_1) et (C_4).

Pour tout nombre entier $N \geq 1$, la notation $\tilde{\Phi}_N^{(\mu)}$ désigne l'ensemble de fonctions

$$\left\{\Phi_{\underline{\theta}} = f_0^{\theta_0} \cdots f_n^{\theta_n},\ \underline{\theta} = (\theta_0, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{N}^{n+1},\ 0 \leq \theta_\sigma < \lceil \mu N^{\omega - \varphi_\sigma} \rceil,\ 0 \leq \sigma \leq n\right\}$$

et la notation $\tilde{\Psi}_N$ désigne l'ensemble de fonctionnelles

$$\left\{\Psi_{(\tau,k)}\ ;\ (\tau, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ 0 \leq \tau < \lceil N^{1+1/n^2} \rceil,\ 1 \leq k \leq N^n\right\}$$

définies pour toute fonction Φ par

$$\Psi_{(\tau,k)}(\Phi) = \left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^\tau \Phi(\underline{\omega}_k).$$

Le résultat ci-dessous démontre que les conditions (C_1) et (C_4) sont vérifiées, puisque $(\ell + \|\underline{a}\|)/n = 1 + 1/n + 1/n^3$ est strictement plus grand que les deux nombres ω et $1 + 1/n^2$.

Lemme 7.1 - *Il existe un nombre réel $c_0 > 0$ tel que, pour tout un nombre entier $N \geq 1$ et tout nombre réel $\mu \in]0\ ;\ 1[$, le couple $(\tilde{\Phi}_N^{(\mu)}, \tilde{\Psi}_N)$ vérifie la condition (AR.) pour le couple de réels $(C(N), h)$ définis par :*
$C(N) = c_0(N^\omega + N^{1+1/n^2} \log N)$ et $h = \sum_{i=0}^{n-1} h(\beta_i) + \sum_{j=1}^{n} h(\alpha_j)$.

Démonstration du lemme 7.1.
L'égalité suivante, valable pour tout élément (m, σ, t) de $\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{R}$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^m (z^\sigma \exp(tz)) = \sum_{k=0}^{\min\{m,\sigma\}} \frac{\sigma! m!}{k!(\sigma - k)!(m - k)!} t^{m-k} z^{\sigma-k} \exp(tz),$$

permet de démontrer que le polynôme non nul de $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_{n-1}, Y_0, \ldots, Y_n]$ défini par

$$\mathcal{R}_{\tau,k,\underline{\theta}} = \sum_{q=0}^{\min\{\tau,\theta_0\}} q! \binom{\tau}{q} \binom{\theta_0}{q} \theta_n^{\tau-q} (h_{n,k} X_0)^{\theta_0 - q} \prod_{i=1}^{n-1} (h_{i,k} + h_{n,k} X_i)^{\theta_i} \prod_{j=1}^{n} Y_j^{h_{j,k}\theta_n},$$

vérifie l'égalité :

$$\Psi_{(\tau,k)}(\Phi_{\underline{\theta}}) = \mathcal{R}_{\tau,k,\underline{\theta}}(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Il reste à majorer le degré et la norme de $\mathcal{R}_{\tau,k,\underline{\theta}}$ lorsque $0 \leq \tau < \lceil N^{1+1/n^2} \rceil$, $1 \leq k \leq N^n$ et $0 \leq \theta_i < \lceil \mu N^{\omega - \varrho_i} \rceil$, $(0 \leq i \leq n)$.
Pour ce qui est des degrés nous obtenons immédiatement

$$\begin{aligned}
\deg_{X_i} \mathcal{R}_{\tau,k,\underline{\theta}} &\leq \theta_i < N^{\omega - 1/n^2},\ (0 \leq i \leq n-1), \\
\deg_{Y_j} \mathcal{R}_{\tau,k,\underline{\theta}} &\leq h_{j,k}\theta_n < N^\omega,\ (1 \leq j \leq n).
\end{aligned}$$

En remarquant que $q!\binom{\theta_0}{q} = \theta_0^q$, il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\tau,k,\underline{\theta}}) &\leq \sum_{q=0}^{\min\{\tau,\theta_0\}} \binom{\tau}{q} \theta_0^q \theta_n^{\tau-q} (h_{n,k})^{\theta_0} \prod_{i=1}^{n-1} (h_{i,k} + h_{n,k})^{\theta_i} \\ &\leq (\theta_0 + \theta_n)^\tau (2 \mid \underline{h}_k \mid)^{|\underline{\theta}|n} \\ &\leq (2 \mid \underline{\theta} \mid)^\tau (2 \mid \underline{h}_k \mid)^{|\underline{\theta}|n},\end{aligned}$$

d'où

$$\log \mathcal{L}(\mathcal{R}_{\tau,k,\underline{\theta}}) \leq N^{1+1/n^2} \log(2nN^\omega) + nN^{\omega-1/n^2} \log(2N),$$

ce qui achève la démonstration du lemme 7.2 et, par conséquent, la vérification des conditions (C_1) et (C_4).

Conséquence

Le théorème 4.1 permet d'affirmer que pour tout nombre réel μ, $0 < \mu < 1$, il existe un nombre entier N_0, tel que, pour chaque nombre entier N, $N \geq N_0$, il existe un polynôme non nul P_N de $K[X_0, \ldots, X_n]$ dont les degrés partiels en chacune des indéterminées X_σ vérifient $\deg_{X_\sigma} P_N < \lceil \mu N^{\omega-\varphi_\sigma} \rceil$, et tel que, pour tout $\underline{\omega} \in \{(h_n\beta_0, h_1 + h_n\beta_1, \ldots, h_{n-1} + h_n\beta_{n-1}), h_i \in \mathbb{Z}, |h_i| < \lceil (N+1)/2 \rceil, 1 \leq i \leq n\}$ et pour tout $\tau \in \mathbb{N}$, $0 \leq \tau < \lceil N^{1+1/n^2} \rceil$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^\tau P_N(z_0, \ldots, z_{n-1}, \exp(z_0 + z_1\lambda_1 + \cdots + z_{n-1}\lambda_{n-1}))(\underline{\omega}) = 0.$$

7.4.3 Application du lemme de zéros avec multiplicités

Avec les notations du chapitre 5 nous démontrons le lemme de zéros suivant.

Proposition 7.2 - *On suppose que le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{G}_m$ engendré par les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ est de rang $\geq n-1$.*
Soient D_0, D_1, S_0 et M des nombres entiers ≥ 1 vérifiant les conditions suivantes :
(i) $2M < D_0$ et $S_0 < 4D_0D_1$.
(ii) $4(n+1)D_0^nD_1 < (S_0+1)(2M-1)^n$.
Alors, pour tout polynôme P non nul de l'anneau $\mathbb{C}[\mathbb{G}_a^n \times \mathbb{G}_m]_{\leq(D_0,D_1)}$, il existe un nombre entier τ, vérifiant $0 \leq \tau \leq (n+1)S_0$, et un élément $\underline{\omega}$ de l'ensemble $\{(h_n\beta_0, h_1 + h_n\beta_1, \ldots, h_{n-1} + h_n\beta_{n-1}),\ h_i \in \mathbb{Z},\ |h_i| < (n+1)M,\ 1 \leq i \leq n\}$, tels que :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^\tau P(z_0, \ldots, z_{n-1}, \exp(z_0 + z_1\lambda_1 + \cdots + z_{n-1}\lambda_{n-1}))(\underline{\omega}) \neq 0.$$

Démonstration de la proposition 7.2.

Considérons quatre nombres entiers $S_0 \geq 1$, $D_0 \geq 1$, $D_1 \geq 1$ et $M \geq 1$ vérifiant (i) et (ii). On définit le sous-ensemble fini de $\mathbb{G}_a^n \times \mathbb{G}_m$:

$$\Gamma_M = \left\{ \left(h_n\beta_0, h_1 + h_n\beta_1, \ldots, h_{n-1} + h_n\beta_{n-1}, \prod_{i=1}^n \alpha_i^{h_i} \right),\ h_i \in \mathbb{Z},\ |h_i| < M,\ 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Nous appliquons le théorème 5.3 avec :

$$\mathcal{K} = \mathbb{C},\ G = \mathbb{G}_a^n \times \mathbb{G}_m,\ G^+ = G,\ G^- = (0, \ldots, 0, 1),$$
$$d_0 = n,\ d_1 = 1,\ d = d^+ = n + 1 \text{ et } \Sigma = \Gamma_M.$$

Soit $\underline{u} = (1, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{C}^{n+1}$, et $D_{\underline{u}}$ la dérivation définie sur l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ par $D_{\underline{u}} = d/dX_0 + X_n d/dX_n$. Alors, pour tout élément $\underline{\theta} = (\theta_0, \ldots, \theta_n)$ de $\mathbb{N}^{n+1}$, et tout nombre entier $k \geq 1$, nous avons :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)\left(f_0^{\theta_0} \cdots f_n^{\theta_n}\right) = \theta_0 f_0^{\theta_0 - 1} \cdots f_n^{\theta_n} + \theta_n f_0^{\theta_0} \cdots f_n^{\theta_n}.$$

Par conséquent :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^k P(f_0, \ldots, f_n) = [D_{\underline{u}}^k P](f_0, \ldots, f_n),\ (P \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n], k \geq 0).$$

Nous dériverons donc dans la direction du sous-espace vectoriel $\mathcal{W} = \mathbb{C} \cdot \underline{u}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Application du lemme de zéros général Considérons trois nombres entiers $S_0 \geq 1$, $D_0 \geq 1$, $D_1 \geq 1$ et $G^* = \mathcal{V} \times T_\Phi$ un sous-groupe algébrique connexe de G, tel que

$$\dim G^* < n + 1,\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V} = d_0^*,\ \text{Rang } \Phi = r,\ \dim T_\Phi = d_1^* = 1 - r.$$

On note

$$\ell_0' = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathcal{W} + T_e(G^*)}{T_e(G^*)}\right)$$

et $T_e(G^*) = \mathcal{V} \times L$ l'espace tangent à G^* en e, où L désigne le sous-ensemble algébrique de $\mathbb{C}$ constitué des zéros communs aux formes linéaires $\mathcal{T}_\varphi$, $\varphi \in \Phi$ définies par $\mathcal{T}_\varphi = \varphi X_n$, $\varphi \in \Phi$. Remarquons que $\dim_{\mathbb{C}} T_e(G^*) = d_0^* + d_1^* = d^*$.
D'aprés les égalités (5.2) et (5.3) nous avons

$$\mathcal{H}(G^*; D_0; D_1) \geq \frac{d^*!}{d_0^*!} 2^{d_1^*} D_0^{d_0^*} D_1^{d_1^*} \text{ et } \mathcal{H}(G; D_0; \underline{D}_1) = 2(n+1) D_0^n D_1.$$

Nous allons montrer que si les entiers S_0, D_0, D_1 et M vérifient les conditions (i) et (ii) alors

$$\binom{S_0 + \ell_0'}{\ell_0'} \# \left(\frac{\Sigma + G^*}{G^*}\right) > (n+1) \frac{d_0^*!}{d^*!} D_0^{n - d_0^*} (4D_1)^{1 - d_1^*}. \tag{7.2}$$

3-a) Si $\Phi = 0$. Alors

$$r = 0,\ d_1^* = 1,\ G^* = \mathcal{V} \times \mathbb{G}_m,\ \text{et } 0 \leq d_0^* \leq n - 1.$$

Si $\underline{u} \in T_e(G^*)$**,** alors $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{V}$, $d_0^* \geq 1$, $\mathcal{W} \subset T_e(G^*)$ et donc $\ell_0' = 0$.
On montre dans [Wald2000] (Exercice 9.1.b.) que :
Si $1, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ *sont linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$ *et si* $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{V}$ *alors*

$$\# \left(\frac{\Sigma + G^*}{G^*}\right) \geq (2M - 1)^{n+1-d_0^*}.$$

Par conséquent (7.2) est vérifiée si

$$(2M-1)^{n+1-d_0^*} > \frac{n+1}{d_0^*+1} D_0^{n-d_0^*}.$$

D'autre part, nous savons d'aprés (i) que $S_0 + 1 \leq 4D_0D_1$; la condition (ii) entraîne donc

$$(n+1)D_0^{n-1} < (2M-1)^n.$$

Or, $d_0 \geq 1$ et $2M - 1 \leq D_0$ d'aprés (i), d'où

$\frac{n+1}{d_0^*+1} D_0^{n-d_0^*} < \frac{(2M-1)^{n+1-d_0^*}}{(d_0^*+1)} \leq (2M-1)^{n+1-d_0^*}$; l'inégalité (7.2) est satisfaite.

Si $\underline{u} \notin T_e(G^*)$**,** alors $\mathcal{W} \not\subset T_e(G^*)$, $G^* = \mathcal{V} \times \mathbb{G}_m$, $\ell_0' = 1$.
L'inégalité (7.2) équivaut donc à

$$\frac{n+1}{d_0^*+1} D_0^{n-d_0^*} < (S_0+1)\# \left(\frac{\Sigma + G^*}{G^*} \right).$$

Or, on montre dans [Wald2000] (Exercice 9.1.a.) que :

$$\text{Si } \beta_0 \neq 0 \text{ alors } (2M-1)^{n-d_0^*} \leq \# \left(\frac{\Sigma + G^*}{G^*} \right).$$

Il suffit donc d'établir l'inégalité

$$\frac{n+1}{d_0^*+1} D_0^{n-d_0^*} \leq (S_0+1)(2M-1)^{n-d_0^*}.$$

D'aprés (i), $D_1 \geq 1$; nous déduisons donc de (ii) :

$$(n+1)D_0^n < (S_0+1)(2M-1)^n.$$

Or $2M < D_0$, par conséquent :

$$\frac{n+1}{d_0^*+1} D_0^{n-d_0^*} < \frac{(S_0+1)(2M-1)^{n-d_0^*}}{d_0^*+1} \; ;$$

la condition (7.2) est donc satisfaite.

3-b) Si $\Phi = \mathbb{Z}$**,** $d_1^* = 0$ et $\ell_0' = 1$, puisque $\underline{u} \notin T_e(G^*)$.
L'inégalité (7.2) s'écrit

$$4(n+1)D_0^{n-d_0^*} D_1 < (S_0+1)\# \left(\frac{\Sigma + G^*}{G^*} \right).$$

Si $d_0^* = 0$**,** alors $G^* = \{e\}$. L'inégalité (7.2) est conséquence directe de la condition (ii).
Si $d_0^* \geq 1$. D'aprés $D_0 > 2M$ et (ii) nous avons

$$4(n+1)D_0^{n-1} D_1 < (S_0+1)(2M-1)^{n-1}.$$

La conclusion provient du résultat suivant (Voir [Wald2000], Lemme 7.8 et Exercice 7.5.) : *Si les nombres* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *engendrent un sous-groupe de* $\mathbb{G}_m$ *de rang* $\geq n-1$*, alors* $(2M-1)^{n-1} \leq \#(\Sigma + G^*)/G^*$.

Fin de la démonstration de la proposition 7.1.

Soient μ un nombre réel vérifiant $0 < \mu < ((4n+4)^{n+2}n^n)^{-1/(n+1)}$. Nous posons, pour tout nombre entier $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} D_0(N) &= n\lceil \mu N^{\omega-1/n^2}\rceil,\ D_1(N) = \lceil \mu N^{\omega-1}\rceil,\ M(N) = \lceil (N+1)/2(n+1)\rceil, \\ S_0(N) &= \left\lceil \frac{N^{1+1/n^2}-1}{n+1} \right\rceil. \end{aligned}$$

On vérifie qu'il existe un nombre entier $N_1 \geq 1$ tel que pour chaque nombre entier N, $N \geq N_1$, les nombres entiers $D_0(N)$, $D_1(N)$, $M(N)$ et $S_0(N)$ vérifient les conditions (i) et (ii) de la proposition 7.3. Nous obtenons donc la contradiction en appliquant la proposition 7.3 pour un entier N supérieur à la fois à N_0 et à N_1.

7.5 Le théorème de Baker sous sa forme homogène

Nous établissons à présent le résultat suivant.

Proposition 7.3 - *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments de $\mathcal{L}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et si $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont des nombres algébriques tels que $\beta_1\lambda_1 + \ldots + \beta_n\lambda_n$ est un élément de $\mathcal{L}$. Alors les nombres $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$.*

7.5.1 Préliminaires.

Considérons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments de $\mathcal{L}$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des nombres algébriques. On suppose que les nombres $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et que $\beta_1\lambda_1 + \ldots + \beta_n\lambda_n$ est un élément de $\mathcal{L}$.
Nous définissons les nombres algébriques

$$\alpha_i = \exp(\lambda_i),\ \text{pour } i = 1, \ldots, n \text{ et } \alpha_{n+1} = \exp(\beta_1\lambda_1 + \cdots + \beta_n\lambda_n),$$

le corps de nombres $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ et les $n+1$ fonctions entières de n variables complexes

$$f_1 = z_1, \ldots, f_n = z_n \text{ et } f_{n+1} = \exp(z_1\lambda_1 + \cdots + z_n\lambda_n).$$

Nous ordonnons les points du sous-groupe additif de $\mathbb{C}^n$

$$\mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

en une suite $\tilde{\omega} = (\underline{\omega}_p)_{p\geq 1}$ d'éléments de $\mathbb{C}^n$ de telle façon que, pour tout entier $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \{\underline{\omega}_p, 1 \leq p \leq (2N-1)^n\} = \{(h_1 + h_{n+1}\beta_1, \ldots \\ \ldots, h_n + h_{n+1}\beta_{n+1}), h_i \in \mathbb{Z}, |h_i| < N, 1 \leq i \leq n+1\}. \end{aligned}$$

Pour tout nombre entier $k \geq 1$, nous notons $\underline{h}_k = (h_{1,k}, \ldots, h_{n+1,k})$ l'élément de $\mathbb{Z}^{n+1}$ qui correspond à l'élément de rang k de la suite $\tilde{\omega}$.

7.5.2 Existence de polynômes par le théorème 4.1 sans dérivation

La suite $\tilde{\omega}$ vérifie la condition $(C^{(n+1)})$ du théorème 4.1, et comme nous ne dérivons pas nous posons $\underline{a} = \underline{0} \in \mathbb{N}^n$. Enfin, les ordres des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont respectivement inférieurs ou égaux aux nombres réels $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ définis par $\varrho_1 = \ldots = \varrho_n = 1/2n^2$ et l'ordre de f_{n+1} est inférieur ou égal à $\varphi_{n+1} = 1$. Nous obtenons donc en prenant $\ell = n+1$, $s = n+1$, $d = n$ et $\underline{b} = (\omega - \varrho_\sigma)_{1 \le \sigma \le n+1}$, les égalités :

$$\omega = 1 + 1/(n+1) + 1/2n(n+1) \text{ et } \|\underline{b}\| = n+1.$$

Vérification de la condition (C_3).
Pour tout nombre entier $n \ge 1$, l'inégalité $(\ell + \|\underline{a}\|)(s-d) > (\varrho_1 + \cdots + \varrho_{n+1})d$ équivaut à $n+1 > n(1+1/2n)$ et l'inégalité $\ell + \|\underline{a}\| \ge d \max\{a_k,\ 1 \le k \le d\}$ équivaut à $n+1 \ge n \cdot 0$.

Vérification des conditions (C_1) et (C_4).

Pour tout nombre entier $N \ge 1$, la notation $\tilde{\Phi}_N^{(\mu)}$ désigne l'ensemble de fonctions

$$\left\{ \Phi_{\underline{\theta}} = f_1^{\theta_1} \cdots f_{n+1}^{\theta_{n+1}},\ \underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1},\ 0 \le \theta_\sigma < \lceil \mu N^{\omega - \varphi_\sigma} \rceil,\ 1 \le \sigma \le n+1 \right\}$$

et la notation $\tilde{\Psi}_N$ désigne l'ensemble de fonctionnelles

$$\left\{ \Psi_k\ ;\ k \in \mathbb{N}, 1 \le k \le N^{n+1} \right\}$$

définies pour toute fonction Φ par $\Psi_k(\Phi) = \Phi(\underline{\omega_k})$.

Le résultat ci-dessous démontre que les conditions (C_1) et (C_4) sont vérifiées, puisque $\ell/n = 1 + 1/n$ est strictement plus grand que ω pour $n \ge 1$.

Lemme 7.2 - *Pour tout un nombre entier $N \ge 1$ et tout nombre réel $\mu \in]0\ ;\ 1[$, le couple $(\tilde{\Phi}_N^{(\mu)}, \tilde{\Psi}_N)$ vérifie la condition (AR.) pour le couple de réels $(D(N), h)$ définis par :*
$D(N) = N^\omega + N^{1-1/2n^2} \log 2N$ et $h = \sum_{i=1}^n h(\beta_i) + \sum_{j=1}^{n+1} h(\alpha_j)$.

Démonstration du lemme 7.2.
On vérifie que le polynôme non nul de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_{n+1}]$ défini par

$$\mathcal{P}_{k,\underline{\theta}} = \prod_{i=1}^n (h_{i,k} + h_{n+1,k} X_i)^{\theta_i} (Y_1^{h_{1,k}} \cdots Y_{n+1}^{h_{n+1,k}})^{\theta_{n+1}}$$

vérifie, pour tout $\underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$,

$$\Psi_k(\Phi_{\underline{\theta}}) = \mathcal{P}_{k,\underline{\theta}}(\beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}).$$

Lorsque $1 \le k \le N^{n+1}$ et $0 \le \theta_i < \lceil \mu N^{\omega - \varrho_i} \rceil$, $(1 \le i \le n+1)$, nous avons

$$\mathcal{P}_{k,\underline{\theta}} = \prod_{i=1}^n (h_{i,k} + h_{n+1,k} X_i)^{\theta_i} (Y_1^{h_{1,k}} \cdots Y_{n+1}^{h_{n+1,k}})^{\theta_{n+1}}.$$

D'où :

$$\deg_{X_i} \mathcal{P}_{k,\underline{\theta}} \leq \theta_i < \mu N^{\omega-1/2n^2} \text{ et } \deg_{Y_j} \mathcal{P}_{k,\underline{\theta}} \leq h_{j,k}\theta_{n+1} < N^{\omega},\ (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n+1).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathcal{R}_{k,\underline{\theta}}) &\leq \prod_{i=1}^{n}(h_{i,k}+h_{n+1,k})^{\theta_i}\\ &\leq (2N)^{\sum_{i=1}^{n}\theta_i}\\ &\leq (2N)^{n\mu N^{\omega-1/2n^2}}.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\log \mathcal{L}(\mathcal{R}_{k,\underline{\theta}}) \leq nN^{\omega-1/2n^2}\log(2N),$$

ce qui achève la démonstration du lemme 7.2.

Conclusion.
Soit μ un nombre réel vérifiant $0 < \mu < 1$, le théorème 4.1 permet d'affirmer qu'il existe un nombre entier $N_0 \geq 1$ tel que pour tout nombre entier $N \geq N_0$ il existe un polynôme non nul P_N de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_{n+1}]$ dont les degrés partiels vérifient $\deg_{X_\sigma} P_N < \lceil \mu N^{\omega-\varrho_\sigma}\rceil$ pour tout σ , $1 \leq \sigma \leq n+1$, et tel que $P(f_1,\cdots,f_{n+1})(\underline{\omega}) = 0$ pour tout $\underline{\omega} \in \{(h_1+h_{n+1}\beta_1,\ldots,h_n+h_{n+1}\beta_{n+1}),\ h_i \in \mathbb{Z},\ |h_i| < \lceil\frac{N+1}{2}\rceil,\ 1 \leq i \leq n+1\}$.

7.5.3 Application du lemme de zéros sans multiplicités.

L'énoncé suivant est une conséquence du théorème 5.2.

Proposition 7.4 - *Soient M, D_0 et D_1 trois nombres entiers positifs vérifiant les inégalités :*

$$(2M-1)^{\delta+1} > 2^n(n+1)!D_0^{\delta}D_1,\ 0 \leq \delta \leq n. \tag{7.3}$$

Alors il n'existe aucun polynôme P non nul de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_{n+1}]_{\leq D_0,\underline{D}_1}$ tel que la fonction $F = p(f_1,\ldots,f_{n+1})$ s'annule en chacun des points de l'ensemble $\{(h_1+h_n\beta_1,\ldots,h_n+h_{n+1}\beta_{n+1}),\ h_i \in \mathbb{Z},\ |h_i| < (n+1)M,\ 1 \leq i \leq n+1\}$.

Démonstration de la proposition 7.4.
Considérons trois nombres entiers M, D_0 et D_1 vérifiant les inégalités (7.3). On applique le théorème 5.2 dans $G = \mathbb{G}_a^n \times \mathbb{G}_m$ avec $\Sigma = \{(h_1+h_{n+1}\beta_1,\ldots,h_n+h_{n+1}\beta_n,\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{h_i+h_{n+1}\beta_i}),\ h_i \in \mathbb{Z},\ |h_i| < M, 1 \leq i \leq n+1\}$.
Soit $G^* = \mathcal{V} \times T_\Phi$ un sous-groupe algébrique de G. On note δ_0 la codimension de $\mathcal{V}$ et r le rang de Φ le sous-groupe saturé de $\mathbb{Z}$ associé à G^*.
D'aprés les inégalités (5.2)et (5.3) nous avons :

$$\mathcal{H}(G^*;D_0;\underline{D}_1) \geq \frac{d^*!}{d_0^*!}2^{d_1^*}D_0^{d_0^*}D_1^{d_1^*} \text{ et } \mathcal{H}(G;D_0;\underline{D}_1) = \frac{d!}{d_0!}2^{d_1}D_0^{d_0}D_1^{d_1}.$$

Il nous suffit donc d'établir que pour un choix convenable des paramètres et pour tout sous-groupe algébrique G^* de G, on a

$$\#\left(\frac{\Sigma+G^*}{G^*}\right) > \frac{d_0^*!}{d_0!}\frac{d!}{d^*!}2^{d_1}D_0^{\delta_0}D_1^r, \tag{7.4}$$

Nous commençons par minorer $\#(\Sigma+G^*)/G^*$ en utilisant le résultat suivant démontré dans ([Wald.2000], lemme 6.2).

Lemme 7.3 - *Soient $t_1,\ldots,t_n$ des nombres complexes, $\underline{t}=(t_1,\ldots,t_n)$, et $\mathcal{Y}$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel défini par*

$$\mathcal{Y}=\mathbb{Q}^n+\mathbb{Q}\underline{t}.$$

Alors les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.

(i) Les nombres $1,t_1,\ldots,t_n$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

(ii) Pour tout sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^n$ on a

$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Y}/\mathcal{Y}\cap\mathcal{V} > \dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n/\mathcal{V}.$$

Soit Γ le sous-groupe de type fini de rang $n+1$ de G engendré par les $n+1$ éléments $\underline{w}_1,\ldots,\underline{w}_{n+1}$ respectivement égaux à $(1,0,\ldots,0,\alpha_1)$, $(0,1,\ldots,0,\alpha_2)$, $\ldots,(0,0,\ldots,1,\alpha_n)$, $(\beta_1,\ldots,\beta_n,\alpha_{n+1})$.
Alors : $\Sigma=\{h_1\underline{w}_1+\cdots+h_{n+1}\underline{w}_{n+1},\ h_i\in\mathbb{Z},\ |h_i|<M, 1\le i\le n+1\}$.
Le lemme 7.3 appliqué aux nombres $\beta_1,\ldots,\beta_n$ (par hypothèse $1,\beta_1,\ldots,\beta_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$) donne : $\mathrm{Rang}_{\mathbb{Z}}\left(\Gamma+G^*\right)/G^* > \delta_0+1$,
D'où

$$\#\left(\frac{\Sigma+G^*}{G^*}\right) > (2M-1)^{\delta_0+1}.$$

En remarquant que

$$2^n(n+1)! \ge \frac{d_0^*!}{d_0!}\frac{d!}{d^*!}2^{d_1},$$

nous constatons que la condition (7.4) est satisfaite pour tout sous-groupe algébrique connexe de G si, quel que soit l'entier δ vérifiant $0\le\delta\le n$, $(2M-1)^{\delta+1} > 2^n(n+1)!D_0^{\delta}D_1$. ce qui achève la démonstration de la proposition 7.4.

Fin de la démonstration de la proposition 7.3.
Soit μ un réel vérifiant $0<\mu<(8^n(n+1)!(n+1)^{n+1}n^n)^{-1}$. Nous appliquons la proposition 7.4 avec

$$M=\left\lceil\frac{N+1}{2(n+1)}\right\rceil,\ D_0=n\lceil\mu N^{\omega-1/2n^2}\rceil \text{ et } D_1=\lceil\mu N^{\omega-1}\rceil.$$

Pour $N\ge 4n+2$ l'inégalité (7.3) est satisfaite si :

$$N^{\delta+1} > 8^n(n+1)!(n+1)^{n+1}n^n\mu^{\delta+1}N^{(\omega-1/2n^2)\delta+\omega-1},\ \delta\in\{0,\ldots,n\},$$

ce qui équivaut à :

$$N^{f(\delta)} > 8^n (n+1)!(n+1)^{n+1} n^n \mu^{\delta+1},\ \delta \in \{0, \dots, n\},$$

avec $f(\delta) = \delta + 1 - (\omega - 1/2n^2)\delta - \omega + 1$.
Comme $\omega = 1 + 1/(n+1) + 1/2n(n+1)$, on a $\omega > 1 + 1/2n^2$ et l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : \delta \longmapsto f(\delta)$ est strictement décroissante.
On a donc $f(\delta) \geq f(n)$, pour tout élément δ de l'intervalle $[1, n]$. Or, $f(n) = 0$; par conséquent l'inégalité (7.3) est vérifiée d'aprés le choix de μ, ce qui entre en contradiction avec la conclusion du paragraphe 7.5.3 et clôture la démonstration du théorème de Baker.

◇◇◇◇◇
◇◇◇◇◇

Troisième partie

Existence de polynômes s'annulant avec multiplicités

Chapitre 8

Des hypothèses proches de celles de Bombieri

8.1 Introduction

Nous travaillons dans cette partie avec un corps de nombres K, des générateurs $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ de K tels que $K = \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_p]$, un nombre réel strictement positif ϱ, des fonctions $f_1, \dots, f_s$ entières dans $\mathbb{C}^d$ et des points $\omega_1, \dots, \omega_M$ de $\mathbb{C}^d$. Nous supposons que les trois conditions suivantes, qui sont en partie celles du théorème 1.3 de Bombieri, sont satisfaites.

(i) Les fonctions $f_1, \dots, f_s$ sont d'ordres respectivement inférieurs ou égaux à ϱ.

(ii) Les dérivations partielles $\partial/\partial z_i$, $(1 \leq i \leq d)$, laissent stable la K-algèbre $K[f_1, \dots, f_s]$.

(iii) Les nombres $f_\sigma(\omega_k)$, $(1 \leq \sigma \leq s,\ 1 \leq k \leq M)$ sont des éléments du corps K.

L'objectif de ce chapitre est d'établir que les conditions (i), (ii) et (iii) nous mettent en position d'appliquer le théorème 3.1 à la famille de fonctions entières sur $\mathbb{C}^d$, $\tilde{\Phi} = \{\Phi_{\underline{\lambda}}; \underline{\lambda} \in \mathbb{N}^s\}$, définies, pour tout élément $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ de $\mathbb{N}^s$, par $\Phi_{\underline{\lambda}} = f_1^{\lambda_1} \cdots f_s^{\lambda_s}$. Pour cela nous démontrons, dans un premier temps, qu'elles impliquent la condition (AR.) du § 3.1.2 pour certaines fonctionnelles et certains polynômes. Nous constatons ensuite que les résultats obtenus au § 4.2 (cf. prop.4.1) permettent encore d'affirmer avec les nouvelles fonctionnelles que la condition (L.S.) du § 3.1.1 est, elle aussi, satisfaite.

Remarques et notations.

R1) La condition (i) se traduit par l'existence de deux nombres réels positifs α et β tels que, pour tout nombre réel $R > 0$ et tout nombre entier σ, $(1 \leq \sigma \leq s)$,

$$| f_\sigma |_R \leq \beta \exp(\alpha R^\varrho).$$

R2) Les conditions (ii) et (iii) impliquent l'existence de polynômes

$$Q_{\sigma,k} \in \mathbb{Q}[Y_1, \dots, Y_p],\ (1 \leq \sigma \leq s,\ 1 \leq k \leq M)$$

et

$$\mathcal{R}_{i,j} \in \mathbb{Q}[Y_1, \dots, Y_p, X_1, \dots, X_s],\ (1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq s),$$

tels que :

$$f_\sigma(\omega_k) = Q_{\sigma,k}(\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \text{ et } \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right) f_j = \mathcal{R}_{i,j}(\alpha_1,\ldots,\alpha_p,f_1,\ldots,f_s).$$

R3) En convenant de poser $\log(0) = -\infty$ et $\deg_Y 0 = -\infty$, nous notons :

$$\mathcal{T}^{(\underline{\alpha})}_{(\underline{f},\underline{\omega})} = \max\left\{1, \max_{\substack{1\le\sigma\le s\\ 1\le k\le M\\ 1\le t\le p}} \left\{\deg_{Y_t} Q_{\sigma,k} + \log\mathcal{L}(Q_{\sigma,k})\right\}\right\}.$$

8.2 Définition de nouvelles fonctionnelles

La condition (ii) entraîne l'existence de polynômes $\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tels que :

$$\partial^{\underline{\tau}} f_1^{\lambda_1}\cdots f_s^{\lambda_s} = \mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}(\alpha_1,\ldots,\alpha_p,f_1,\ldots,f_s),\ (\underline{\tau},\underline{\lambda}) \in \mathbb{N}^d\times\mathbb{N}^s.$$

Cependant le fait que les polynômes $\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}$ soient à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et non dans $\mathbb{Z}$ est un obstacle à l'utilisation directe du théorème 3.1 car la condition (A.R.) du § 3.1.2 n'est pas vérifiée avec les fonctionnelles utilisées dans les chapitres précédents. Cette difficulté est surmontée en précisant les caractéristiques de ces polynômes et en appliquant le théorème 3.1 avec de nouvelles fonctionnelles.
Il existe plusieurs versions du résultat ci-dessous (cf. [Lan66] Chap.IV § 2 Lemme 2, [Bom70a] Lemme 1, [Wald74] Chap. III Lemme 3.3.2).

Lemme 8.1 - *Soient K un corps de nombres et $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ des générateurs de K tels que $K=\mathbb{Q}[\alpha_1,\ldots,\alpha_p]$. Soient $f_1,\ldots,f_s$ des fonctions entières sur $\mathbb{C}^d$. On suppose que les dérivations $\partial/\partial z_\sigma$, $(1\le\sigma\le d)$, laissent stable la K-algèbre $K[f_1,\ldots,f_s]$. Alors il existe un nombre entier $\eta\ge 1$ et une famille $\{\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}; (\underline{\tau},\underline{\lambda})\in\mathbb{N}^d\times\mathbb{N}^s\}$ de polynômes de $\mathbb{Q}[Y_1,\ldots,Y_p,X_1,\ldots,X_s]$ tels que, pour tout $(\underline{\tau},\underline{\lambda})\in\mathbb{N}^d\times\mathbb{N}^s$,*

1. $\partial^{\underline{\tau}} f_1^{\lambda_1}\cdots f_s^{\lambda_s} = \mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}(\alpha_1,\ldots,\alpha_p,f_1,\ldots,f_s)$.
2. $\deg_{Y_k}\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}} \le \eta\|\underline{\tau}\|$, $(1\le k\le p)$.
3. $\deg_{X_i}\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}} \le \lambda_i + \eta\|\underline{\tau}\|$, $(1\le i\le s)$.
4. $\eta^{\|\underline{\tau}\|}\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}} \in \mathbb{Z}[Y_1,\ldots,Y_p,X_1,\ldots,X_s]$.
5. $\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}) \le (s\eta^2)^{\|\underline{\tau}\|}\left(\|\underline{\lambda}\|+\|\underline{\tau}\|\right)^{\|\underline{\tau}\|}$.

Démonstration du lemme 8.1
Notations. Nous notons $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_d$ la base canonique de $\mathbb{C}^d$ et $\underline{e}'_1,\ldots,\underline{e}'_s$ la base canonique de $\mathbb{C}^s$. Nous définissons, pour tout élément $\underline{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)$ de $\mathbb{N}^s$, la fonction $\underline{f}^{\underline{\lambda}} = \prod_{i=1}^s f_i^{\lambda_i}$, le polynôme $\underline{X}^{\underline{\lambda}} = X_1^{\lambda_1}\cdots X_s^{\lambda_s}$ et les deux nombres

$$\eta_1 = \max\left\{1, \max_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le s\\ 1\le r\le s\\ 1\le k\le p}} \left\{\deg_{X_r}\mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{e}'_j},\ \deg_{Y_k}\mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{e}'_j},\ \left\lceil\mathcal{L}\left(\mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{e}'_j}\right)\right\rceil+1\right\}\right\},$$

$$\eta_2 = \prod_{i=1}^{d}\prod_{j=1}^{s} n_{i,j}, \text{ où } n_{i,j} \text{ est le plus petit dénominateur commun positif des coefficients non nuls de } \mathcal{R}_{i,j}.$$

Nous allons montrer que le nombre entier $\eta = \eta_1\eta_2$ vérifie les conditions du lemme 8.1.

Vérification du lemme 8.1 pour $\|\underline{\tau}\| = 0$ et pour $\|\underline{\tau}\| = 1$.
Soit $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ un élément de $\mathbb{N}^s$; nous définissons les polynômes de $\mathbb{Q}[Y_1, \dots, Y_p, X_1, \dots, X_s]$,

$$\mathcal{R}_{\underline{0},\underline{\lambda}} = \underline{X}^{\underline{\lambda}} \text{ et } \mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{\lambda}} = \sum_{q=1}^{s} \lambda_q \frac{\underline{X}^{\underline{\lambda}}}{X_q^{\lambda_q}} \mathcal{R}_{i,q}(Y_1, \dots, Y_p, X_1, \dots, X_s),\ (1 \le i \le d).$$

On vérifie immédiatement que :
1) $\underline{f}^{\underline{\lambda}} = \mathcal{R}_{\underline{0},\underline{\lambda}}(\alpha_1, \dots, \alpha_p, f_1, \dots, f_s)$ et $(\partial/\partial z_i)\, \underline{f}^{\underline{\lambda}} = \mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{\lambda}}(\alpha_1, \dots, \alpha_p, f_1, \dots, f_s)$.
2) $\deg_{X_r} \mathcal{R}_{\underline{0},\underline{\lambda}} \le \lambda_r$ et $\deg_{X_r} \mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{\lambda}} \le \lambda_r + \eta_1$, $(1 \le r \le s)$.
3) $\deg_{Y_k} \mathcal{R}_{\underline{0},\underline{\lambda}} = 0$ et $\deg_{Y_k} \mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{\lambda}} \le \eta_1$, $(1 \le k \le p)$.
4) $\mathcal{R}_{\underline{0},\underline{\lambda}}$ et $\eta_2\mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{\lambda}}$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
5) $\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\underline{0},\underline{\lambda}}) = 1$ et $\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{\lambda}}) \le (\|\underline{\lambda}\| + 1)\eta_1$.

La dernière des égalités provient de

$$\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{\lambda}}) \le \left(\sum_{q=1}^{s} \lambda_q\right) \max_{1 \le q \le s} \mathcal{L}(\mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{e}_q'}) \le \|\underline{\lambda}\|\eta_1.$$

Comme les nombres η_1 et η_2 sont inférieurs ou égaux à η, la conclusion du lemme 8.1 est vérifiée pour $\|\underline{\tau}\| = 0$ et pour $\|\underline{\tau}\| = 1$.

Fin de la démonstration du lemme 8.1 par récurrence.
Soit N un nombre entier ≥ 1. Supposons la conclusion du lemme 8.1 vérifiée pour tout élément $\underline{\tau}$ de $\mathbb{N}^d$ tel que $\|\underline{\tau}\| = N$.
Considérons un élément $\underline{\tau}' = (\tau_1', \dots, \tau_d')$ de $\mathbb{N}^d$ tel que $\|\underline{\tau}'\| = N + 1$.
Comme $\underline{\tau}' \neq \underline{0}$, il existe un nombre entier i, tel que $1 \le i \le d$ et $\tau_i' \neq 0$.
Il existe donc un élément $\underline{\tau}$ de $\mathbb{N}^d$ tel que $\|\underline{\tau}\| = N$ et $\underline{\tau}' = \underline{e}_i + \underline{\tau}$.
Nous pouvons écrire l'égalité

$$\partial^{\underline{\tau}'} \underline{f}^{\underline{\lambda}} = (\partial/\partial z_i)\left(\partial^{\underline{\tau}} \underline{f}^{\underline{\lambda}}\right).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence au rang N, il existe un polynôme $\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}$ de $\mathbb{Q}[Y_1, \dots, Y_p, X_1, \dots, X_s]$, que l'on peut écrire sous la forme

$$\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}} = \sum_{(\underline{u},\underline{t}) \in \Lambda} a_{\underline{u},\underline{t}} \underline{Y}^{\underline{t}} \underline{X}^{\underline{u}},$$

et qui vérifie :

1. $\partial^{\underline{\tau}} \underline{f}^{\underline{\lambda}} = \mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}(\alpha_1, \dots, \alpha_p, f_1, \dots, f_s)$.
2. $\deg_{Y_k} \mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}} \le \eta N$, $(1 \le k \le p)$.
3. $\deg_{X_r} \mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}} \le \lambda_r + \eta N$, $(1 \le r \le s)$.

4. $\eta^N a_{\underline{u},\underline{t}} \in \mathbb{Z}$, $(\underline{u},\underline{t}) \in \Lambda$.
5. $\sum_{\underline{u},\underline{t}} \mid a_{\underline{u},\underline{t}} \mid \leq (s\eta^2)^N \left(\|\underline{\lambda}\| + N\right)^N$.

Alors,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\left(\partial^{\underline{\tau}} \underline{f}^{\underline{\lambda}}\right) &= \sum_{(\underline{u},\underline{t})\in\Lambda} a_{\underline{u},\underline{t}} \underline{\alpha}^{\underline{t}} \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\left(\underline{f}^{\underline{u}}\right) \\ &= \sum_{(\underline{u},\underline{t})\in\Lambda} a_{\underline{u},\underline{t}} \underline{\alpha}^{\underline{t}} \mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{u}}(\alpha_1,\ldots,\alpha_p,f_1,\ldots,f_s).\end{aligned}$$

On peut donc définir le polynôme $\mathcal{R}_{\underline{\tau}',\underline{\lambda}}$ de $\mathbb{Q}[Y_1,\ldots,Y_p,X_1,\ldots,X_s]$ par

$$\mathcal{R}_{\underline{\tau}',\underline{\lambda}} = \sum_{(\underline{u},\underline{t})\in\Lambda} a_{\underline{u},\underline{t}} \underline{Y}^{\underline{t}} \mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{u}}(Y_1,\ldots,Y_p,X_1,\ldots,X_s).$$

Il vient successivement :

$1)'$ $\partial^{\underline{\tau}'} \underline{f}^{\underline{\lambda}} = \mathcal{R}_{\underline{\tau}',\underline{\lambda}}(\alpha_1,\ldots,\alpha_p,f_1,\ldots,f_s)$.

$$2)' \quad \begin{aligned}\deg_{Y_k} \mathcal{R}_{\underline{\tau}',\underline{\lambda}} &\leq \max_{(\underline{u},\underline{t})\in\Lambda} \{t_k + \deg_{Y_k} \mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{u}}\} \\ &\leq \eta N + \eta, \text{ d'après 2)} \\ &\leq \eta(N+1).\end{aligned}$$

$$3)' \quad \begin{aligned}\deg_{X_r} \mathcal{R}_{\underline{\tau}',\underline{\lambda}} &\leq \max_{\underline{u}} \left\{\deg_{X_r} \mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{u}}\right\} \\ &\leq \max_{\underline{u}} \{u_r + \eta\} \\ &\leq \lambda_r + \eta N + \eta, \text{ d'après 3)} \\ &\leq \lambda_r + \eta(N+1).\end{aligned}$$

$$4)' \quad \eta^{N+1}\mathcal{R}_{\underline{\tau}',\underline{\lambda}} = \sum_{(\underline{u},\underline{t})\in\Lambda} \eta^N a_{\underline{u},\underline{t}} \underline{Y}^{\underline{t}} \eta \mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{u}} \in \mathbb{Z}[Y_1,\ldots,Y_p,X_1,\ldots,X_s].$$

Remarquons, pour finir, que pour tout élément $(\underline{u},\underline{t})$ de Λ,

$$\|\underline{u}\| \leq \sum_{r=1}^{s} (\lambda_r + \eta N) \leq \|\underline{\lambda}\| + \eta s N.$$

On a donc :

$$5)' \quad \begin{aligned}\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\underline{\tau}',\underline{\lambda}}) &\leq \sum_{\underline{u},\underline{t}} \mid a_{\underline{u},\underline{t}} \mid \max\left\{\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{u}}),\ (\underline{u},\underline{t}) \in \Lambda\right\} \\ &\leq (s\eta^2)^N \left(\|\underline{\lambda}\| + N\right)^N \max\{\eta\|\underline{u}\|,\ (\underline{u},\underline{t}) \in \Lambda\} \\ &\quad \text{(d'après l'inégalité (10.1) appliquée à } \mathcal{L}(\mathcal{R}_{\underline{e}_i,\underline{u}})) \\ &\leq (s\eta^2)^N \left(\|\underline{\lambda}\| + N\right)^N \eta\left(\|\underline{\lambda}\| + \eta s N\right) \\ &\leq (s\eta^2)^N \left(\|\underline{\lambda}\| + N + 1\right)^N s\eta^2 \left(\|\underline{\lambda}\| + N + 1\right) \\ &\leq (s\eta^2)^{N+1} \left(\|\underline{\lambda}\| + N + 1\right)^{N+1}.\end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration du lemme 8.1.

Introduction de nouvelles fonctionnelles
Les polynômes $\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}$ étant à coefficients dans $\mathbb{Q}$, la condition (AR.) n'est pas vérifiée si nous utilisons les fonctionnelles définies au chapitre 4. Cependant, pour tout $(\underline{\tau},\underline{\lambda}) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^s$, $\eta^{\|\underline{\tau}\|}\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Il est donc possible de retrouver les conditions d'application du théorème 3.1 en introduisant les fonctionnelles

$$\Psi_{(\underline{\tau},k,\eta)},\ (\underline{\tau} \in \mathbb{N}^d,\ k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq M),$$

définies pour toute fonction Φ entière sur $\mathbb{C}^d$ par :

$$\Psi_{(\underline{\tau},k,\eta)}(\Phi) = \eta^{\|\underline{\tau}\|}\partial^{\underline{\tau}}\Phi(\omega_k).$$

D'une façon générale nous définissons la fonctionnelles $\Psi_{(\underline{\tau},k,x)}$ par

$$\Psi_{(\underline{\tau},k,x)}(\Phi) = x^{\|\underline{\tau}\|}\partial^{\underline{\tau}}\Phi(\omega_k),\ \text{, pour tout } x \in \mathbb{R},\ \underline{\tau} \in \mathbb{N}^d,\ k \in \{1,\ldots,M\}.$$

8.3 Vérification des conditions (L.S.) et (AR.)

Nous considérons dans ce paragraphe un élément $(\underline{T},\underline{S})$ de $\mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^s$, qui vérifie avec $\underline{T} = (T_1,\ldots,T_d)$ et $\underline{S} = (S_1,\ldots,S_s)$, l'inégalité :

$$1 \leq S_1 \cdots S_s \leq MT_1 \cdots T_d.$$

8.3.1 La condition (L.S.)

Pour tout nombre réel x, la matrice $\mathcal{M}_{(x)}$ est définie par :

$$\mathcal{M}_{(x)} = (\Psi_{(\underline{\tau},k,x)}(\Phi_{\underline{\lambda}}))_{(\underline{\tau},k),\underline{\lambda}}\ ,$$

d'indice de lignes $(\underline{\tau},k) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}$, et d'indice de colonnes $\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^s$, avec :

$$0 \leq \underline{\tau} < \underline{T},\ 1 \leq k \leq M,\ \text{et } 0 \leq \underline{\lambda} < \underline{S}.$$

On note $L = S_1 \cdots S_s$.
Pour tout sous-ensemble $\Lambda = \{(\underline{\tau}_i,k_i), 1 \leq i \leq L\}$ contenant L éléments distincts de l'ensemble des indices de lignes de $\mathcal{M}_{(x)}$, $\Delta_{(x,\Lambda)}$ est le déterminant :

$$\Delta_{(x,\Lambda)} = \det(\Psi^{(\omega)}_{(\underline{\tau}_i,k_i,x)}(\Phi_{\underline{\lambda}})),\ 1 \leq i \leq L,\ 0 \leq \underline{\lambda} < \underline{S}).$$

La multilinéarité du déterminant nous permet d'établir une relation entre les nombres $\Delta_{(x,\Lambda)}$ et $\Delta_{(1,\Lambda)}$.

Lemme 8.2 - *Pour tout nombre réel $x \geq 0$,*

$$\mid \Delta_{(x,\Lambda)} \mid = x^{\sum_{i=1}^{L}\|\underline{\tau}_i\|} \mid \Delta_{(1,\Lambda)} \mid .$$

Pour tout nombre entier i, $(1 \leq i \leq L)$, $\underline{\tau}_i \leq \underline{T}$; d'où $\sum_{i=1}^{L} \|\underline{\tau}_i\| < L\|\underline{T}\|$.

Nous en déduisons :

Proposition 8.1 - *Soient H un nombre réel positif, x un nombre réel strictement positif.*
On définit l'ensemble de fonctions

$$\tilde{\Phi} = \{\Phi_{\underline{\lambda}},\ \underline{\lambda} \in \mathbb{N}^s,\ \underline{\lambda} < \underline{S}\} \tag{8.1}$$

et l'ensemble de fonctionnelles

$$\tilde{\Psi}_{(x)} = \{\Psi_{(\underline{\tau},k,x)},\ (\underline{\tau},k) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N},\ \underline{\tau} < \underline{T},\ 1 \leq k \leq M\},\ (x \in \mathbb{R}). \tag{8.2}$$

Alors, si le couple $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}_{(1)})$ vérifie la condition (L.S.) relative au réel H, le couple $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}_{(\eta)})$ vérifie la condition (L.S.) relative au réel

$$H^{(x)} = H - L\|\underline{T}\| \log x.$$

Le résultat suivant, énoncé avec les notations (8.1) et (8.2), est une conséquence directe de la proposition 8.1 et de la proposition 4.1.

Corollaire 8.1 - *Soient $f_1, \ldots, f_s$ des fonctions entières sur $\mathbb{C}^d$ vérifiant les hypothèses (i),(ii),(iii) énoncées au § 8.1 et soit η le nombre entier ≥ 1 donné par le lemme 8.1. Soient $\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_M)$ un élément de $(\mathbb{C}^d)^M$ et $(\underline{T}, \underline{S})$ un élément de $\mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^s$ vérifiant $2^d e^{d+1} \leq S_1 \cdots S_s \leq M T_1 \cdots T_d$.*
Considérons, pour tout nombre réel $E \geq 1$, le nombre $H_E(\underline{T}, \underline{S})$ défini dans la proposition 4.1 par l'égalité (4.3) ; on pose :

$$H_E^{(\eta)}(\underline{T}, \underline{S}) = H_E(\underline{T}, \underline{S}) - L\|\underline{T}\| \log \eta.$$

Alors le couple $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}_{(\eta)})$ vérifie la condition (L.S.) pour chacun des nombres réels de l'ensemble $\{H_E^{(\eta)}(\underline{T}, \underline{S}), E \in \mathbb{R}_{\geq 1}\}$.

8.3.2 La condition arithmétique

D'aprés le lemme 8.1 les polynômes $\eta^{\|\underline{\tau}\|}\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}$ sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et vérifient

$$\Psi_{(\underline{\tau},k,\eta)}(\Phi_{\underline{\lambda}}) = \eta^{\|\underline{\tau}\|}\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, f_1(\omega_k), \ldots, f_s(\omega_k)).$$

D'autre part les polynômes $Q_{\sigma,k} \in \mathbb{Q}[Y_1, \ldots, Y_p]$, définis dans la remarque R2 du § 8.1, satisfont aux égalités

$$f_\sigma(\omega_k) = Q_{\sigma,k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p),\ (1 \leq \sigma \leq s,\ 1 \leq k \leq M).$$

Par conséquent, les polynômes

$$\mathcal{P}^{(\eta)}_{(\underline{\tau},k,\eta)} = \eta^{\|\underline{\tau}\|}\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}(Y_1, \ldots, Y_p, Q_{1,k}(Y_1, \ldots, Y_p), \ldots, Q_{s,k}(Y_1, \ldots, Y_p)). \tag{8.3}$$

de $\mathbb{Z}[Y_1, \ldots, Y_p]$, vérifient :

$$\Psi_{(\underline{\tau},k,\eta)}(\Phi_{\underline{\lambda}}) = \mathcal{P}^{(\eta)}_{(\underline{\tau},k),\underline{\lambda}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p),\ \text{pour tous } \underline{\tau} \in \mathbb{N}^d,\ \underline{\lambda} \in \mathbb{N}^s, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq M.$$

La première partie (A) de la condition (AR.) du § 3.1.2 est donc satisfaite pour l'ensemble fini de nombres algébriques $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$.
Le lemme 8.1 nous permet de majorer les degrés et les normes des polynômes $\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}$ en fonction de $\underline{\tau}$ et de $\underline{\lambda}$, mais ce n'est pas suffisant pour énoncer la condition arithmétique, nous avons besoin d'une estimation des degrés et des longueurs des polynômes $Q_{\sigma,k}$. Nous utilisons pour cela la quantité $\mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})}$ définie dans la remarque R3 du § 8.1. Nous obtenons ainsi, avec les notations (8.1) et (8.2) de la proposition 8.1, l'énoncé suivant.

Proposition 8.2 - *Nous posons :*

$$c = 2s\eta^3\mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})}(\|\underline{S}\| + \|\underline{T}\|) + \|\underline{T}\| \log(\|\underline{S}\| + \|\underline{T}\|) et\ h = \sum_{q=1}^{p} h(\alpha_q).$$

Alors le couple $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}_{(\eta)})$ *vérifie la condition (AR.) du § 3.1.2 pour le couple de réels* (c, h).

Démonstration de la Proposition 8.2

Il nous suffit de démontrer les inégalités (B) et (C) de la condition (AR.).
Par définition h est un majorant de la somme des hauteurs des nombres algébriques qui interviennent dans l'écriture des valeurs des formes linéaires en chacune des fonctions $\Phi_{\underline{\lambda}}$; l'inégalité (C) de la condition (AR.) est donc satisfaite.
D'aprés le lemme 8.1, nous avons :

$$\begin{aligned}
\deg_{Y_r} \mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}} &\leq \eta\|\underline{T}\| \text{ pour } 1 \leq r \leq p,\\
\deg_{X_i} \mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}} &\leq S_i + \eta\|\underline{T}\| \text{ pour } 1 \leq i \leq s,\\
\log \mathcal{L}(\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}) &\leq \|\underline{T}\|[\log(\|\underline{S}\| + \|\underline{T}\|) + \log(s\eta^2)].
\end{aligned}$$

Par conséquent, en faisant intervenir la quantité $\mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})}$, il vient d'aprés (8.3) :

$$\begin{aligned}
\deg_{Y_r} \mathcal{P}^{(\eta)}_{(\underline{\tau},k),\underline{\lambda}} &\leq \eta\|\underline{T}\| + \sum_{1\leq i\leq s} \deg_{X_i} \mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}} \deg_{Y_i} Q_{i,k}\\
&\leq \eta\|\underline{T}\| + \sum_{1\leq i\leq s} (S_i + \eta\|\underline{T}\|)\, \mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})}\\
&\leq \eta\|\underline{T}\| + \mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})}(\|\underline{S}\| + \eta s\|\underline{T}\|).\\
\text{et } \mathcal{L}(\mathcal{P}^{(\eta)}_{(\underline{\tau},k),\underline{\lambda}}) &\leq \eta^{\|\underline{T}\|}\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}) \prod_{1\leq i\leq s} \mathcal{L}(Q_{i,k})^{\deg_{X_i} \mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}}}.
\end{aligned}$$

En prenant le logarithme de chaque membre cela donne :

$$\begin{aligned}
\log \mathcal{L}(\mathcal{P}^{(\eta)}_{(\underline{\tau},k),\underline{\lambda}}) &\leq \|\underline{T}\| \log \eta + \|\underline{T}\|[\log(\|\underline{S}\| + \|\underline{T}\|) + \log(s\eta^2)]\\
&\qquad + \sum_{1\leq i\leq s} \deg_{X_i} \mathcal{R}_{\underline{\tau},\underline{\lambda}} \log \mathcal{L}(Q_{i,k})\\
&\leq \|\underline{T}\| \log(s\eta^3) + \|\underline{T}\| \log(\|\underline{S}\| + \|\underline{T}\|)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \sum_{1 \leq i \leq s} (S_i + \eta \|\underline{T}\|)\, \mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})} \\
\leq\ & \|\underline{T}\| \log(s\eta^3) + \|\underline{T}\| \log(\|\underline{S}\| + \|\underline{T}\|) \\
&\qquad + (\|\underline{S}\| + s\eta\|\underline{T}\|)\, \mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})}.
\end{aligned}
$$

Alors, en majorant $\log(s\eta^3)$ par $s\eta^3$ et $s\eta^3\|\underline{T}\|$ par $s\eta^3\,(\|\underline{S}\| + \|\underline{T}\|)\,\mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})}$, nous obtenons le résultat attendu.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

Chapitre 9

Existence de polynômes par la méthode de Gel'fond

9.1 Enoncé du résultat

Théorème 9.1 - *Soient s et d deux nombres entiers avec $s > d \geq 1$, K un corps de nombres de degré D engendré par les nombres algébriques $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, $f_1, \ldots, f_s$ des fonctions entières dans $\mathbb{C}^d$ et dont les ordres sont inférieurs ou égaux à un nombre réel ϱ strictement positif, μ un nombre réel > 0, M un nombre entier ≥ 1 et $\omega_1, \ldots, \omega_M$ des éléments de $\mathbb{C}^d$.*
On suppose que :

(A) Les dérivations $\partial/\partial z_i$, $(1 \leq i \leq d)$, laissent stable la K-algèbre $K[f_1, \ldots, f_s]$.

(B) $f_\sigma(\omega_k) \in K$, $(1 \leq \sigma \leq s,\ 1 \leq k \leq M)$.

(C) $\mu^s M > 2^s.e^d \left(1 + \varrho s + \varrho s D(1+h)\right)^d$ avec $h = \sum_{q=1}^{p} h\left(\alpha_q\right)$.

Alors, il existe un entier $N_0 \geq 1$ ayant la propriété suivante :
Quel que soit l'entier $N \geq N_0$, il existe un polynôme Q_N non nul de $K[X_1, \ldots, X_s]$ dont les degrés partiels en chacune des indéterminées X_σ, $(1 \leq \sigma \leq s)$ sont $\leq \mu M^{1/s} N^{d/s}$ et tel que la fonction $F_N = Q_N(f_1, \ldots, f_s)$ s'annule en chacun des points $\omega_1, \ldots, \omega_M$ avec une multiplicité $\geq N$.

9.2 Démonstration du Théorème 9.1

Nous définissons, pour tout entier naturel $N \geq 1$, les $d + s$ nombres entiers $T_1(N) = \ldots = T_d(N) = N$ et $S_1(N) = \ldots = S_s(N) = \lceil \mu N^{d/s} M^{1/s} \rceil$, l'élément $\underline{T}(N) = (T_1(N), \ldots, T_d(N))$ de $\mathbb{N}^d$, l'élément $\underline{S}(N) = (S_1(N), \ldots, S_s(N))$ de $\mathbb{N}^s$, et le nombre entier $L(N) = S_1(N) \cdots S_s(N)$. Nous allons appliquer les résultats du chapitre 3 à la matrice $\mathcal{M}_N = \left(\partial^{\underline{\tau}} \Phi_{\underline{\lambda}}(\omega_k)\right)_{((\underline{\tau},k),\ \underline{\lambda})}$, d'indices de lignes les couples d'éléments $(\underline{\tau}, k)$ de $\mathbb{N}^d \times \mathbb{N}$ rangés dans l'ordre lexicographique, qui vérifient $0 \leq \underline{\tau} < \underline{T}(N)$, $1 \leq k \leq M$, et d'indices de colonnes les éléments $\underline{\lambda}$ de $\mathbb{N}^s$ rangés dans l'ordre lexicographique, qui vérifient $0 \leq \underline{\lambda} < \underline{S}(N)$.

Remarque : nous supposons $\mu \leq 1$, car si le nombre réel μ est > 1, la conclusion du théorème 9.1 est triviale. En effet, dans ce cas, l'inégalité $N^{d/s}M^{1/s} > \mu/(\mu-1)$ implique $\lceil \mu N^{d/s}M^{1/s} \rceil > N^{d/s}M^{1/s}$. Comme la matrice $\mathcal{M}(N)$ possède $N^d M$ colonnes et $\lceil \mu N^{d/s}M^{1/s} \rceil^s$ lignes, il suffit donc de choisir $N_0 = \lceil (\mu/(\mu-1))^{s/d} M^{-1/s} \rceil + 1$ pour qu'elle possède plus de lignes que de colonnes, son rang est alors $< \lceil \mu N^{d/s}M^{1/s} \rceil^s$; il existe donc des éléments non tous nuls de K, $(a_{\underline{\lambda}},\ \underline{\lambda} \in \mathbb{N}^s,\ \underline{\lambda} < \underline{S}(N))$, pour lesquels la fonction $F_N = \sum_{\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^s,\ \underline{\lambda} < \underline{S}(N)} a_{\underline{\lambda}} \Phi_{\underline{\lambda}}$ vérifie les égalités :

$$\partial^{\underline{\tau}} F_N(\omega_k) = 0, \text{ pour tout } (\underline{\tau}, k) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N},\ \underline{\tau} < \underline{T}(N),\ 1 \leq k \leq M.$$

Le polynôme Q_N est alors donné par : $Q_N = \sum_{\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^s,\ \underline{\lambda} < \underline{S}(N)} a_{\underline{\lambda}} X_1^{\lambda_1} \cdots X_s^{\lambda_s}$.

9.2.1 Choix des paramètres fixes

Il existe des nombres réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$ qui satisfont pour tout réel $R > 0$ et tout entier σ, $(1 \leq \sigma \leq s)$, aux inégalités :

$$\mid f_\sigma \mid_R \leq \beta \exp(\alpha R^{\varrho}).$$

Nous notons r le plus grand élément de l'ensemble

$$\{\mid \omega_k \mid, 1 \leq k \leq M\}.$$

Nous notons η le nombre entier ≥ 1 donné par le lemme technique 8.1 ; η dépend en particulier du choix des générateurs du corps de nombres K.

9.2.2 Les inégalités (4.1)

D'aprés la condition (C) nous avons $(\mu/2)^s M > e^d$, nous pouvons donc écrire, pour tout entier $N \geq 1$,

$$e^d N^d \leq L(N) \leq \mu^s N^d M.$$

Nous en déduisons l'énoncé suivant :

Lemme 9.1 - *Soient M un nombre entier ≥ 1 et μ un nombre réel vérifiant les hypothèses du théorème 4.1. Alors, pour tout nombre entier $N \geq 16d^2/e$, $\underline{S}(N)$, $\underline{T}(N)$ et M vérifient les inégalités (4.1).*

Nous supposons par la suite $N \geq 16d^2/e$.

9.2.3 Application du théorème 3.1

On définit, pour tout nombre entier $N \geq 1$, l'ensemble de fonctions

$$\tilde{\Phi}(N) = \{\Phi_{\underline{\lambda}},\ \underline{\lambda} \in \mathbb{N}^s,\ \underline{\lambda} < \underline{S}(N)\}$$

et l'ensemble de fonctionnelles

$$\tilde{\Psi}_{(\eta)}(N) = \{\Psi_{(\underline{\tau},k,\eta)},\ (\underline{\tau}, k) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N},\ \underline{\tau} < \underline{T}(N),\ 1 \leq k \leq M\}.$$

D'aprés la proposition 8.2, le couple $(\tilde{\Phi}(N), \tilde{\Psi}_{(\eta)}(N))$ vérifie la condition (AR.) pour le couple de nombres réels (c_N, h) avec :

$$c_N \quad = \quad 2s\eta^3 \mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})}(\|\underline{S}(N)\| + \|\underline{T}(N)\|) + \|\underline{T}(N)\| \log(\|\underline{S}(N)\| + \|\underline{T}(N)\|).$$

Nous allons montrer que l'on peut choisir les paramètres de telle façon que la relation

$$\frac{H_E^{(\eta)}(\underline{T}(N), \underline{S}(N))}{L(N)} > D \log L(N) + Dc_N(1+h) \tag{9.1}$$

soit satisfaite. Nous en déduirons, par le Théorème 3.1, que la matrice $\mathcal{M}_N$ est de rang $< L(N)$.

9.2.4 Une évaluation de H_E

Nous savons, d'une part que

$$H_E^{(\eta)}(\underline{T}(N), \underline{S}(N)) = H_E(\underline{T}(N), \underline{S}(N)) - L(N)\|\underline{T}(N)\| \log \eta,$$

et, d'autre part, d'aprés la relation (4.3), que

$$H_E(\underline{T}(N), \underline{S}(N)) = L(N) \left\{ \frac{d}{e} L(N)^{1/d} \log E - \|\underline{T}(N)\| \log E - \log L(N) \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{d} T_k(N) \log T_k(N) - \|\underline{S}(N)\| \log \hat{\beta} - \alpha \sum_{j=1}^{s} S_j(N)(2Er)^{\varrho} \right\}.$$

La relation (9.1) peut donc s'écrire :

$$\frac{d}{e} L(N)^{1/d} \log E > dN \log E + \log L(N) + dN \log N +$$
$$s\mu N^{d/s} M^{1/s} \log \hat{\beta} + s\alpha\mu N^{d/s} M^{1/s} (2Er)^{\varrho} + dN \log \eta + D \log L(N) +$$
$$D(1+h) \left\{ 2s\eta^3 \mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})}(\|\underline{S}(N)\| + \|\underline{T}(N)\|) + \|\underline{T}(N)\| \log(\|\underline{S}(N)\| + \|\underline{T}(N)\|) \right\}.$$

Or, $\|\underline{S}(N)\| + \|\underline{T}(N)\| \leq sN^{d/s} M^{1/s} + dN$ et $\log(\|\underline{S}L(N)\| + \|\underline{T}L(N)\|) \leq \log N + \log(2sM)$. L'inégalité (9.1) est donc satisfaite si :

$$\frac{d}{e} L(N)^{1/d} \log E > dN \log E + \log L(N) + dN \log N$$
$$+ s\mu N^{d/s} M^{1/s} \log \hat{\beta} + s\alpha\mu N^{d/s} M^{1/s} (2Er)^{\varrho} + dN \log \eta + D \log L(N)$$
$$+ D(1+h) \left\{ 2s\eta^3 \mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})}(sN^{d/s} M^{1/s} + dN) + dN(\log N + \log(2sM)) \right\}. \tag{9.2}$$

9.2.5 Le choix du nombre réel $E \geq 1$

Pour établir le théorème 4.2 (cf. § 4.2.2, "mise en oeuvre du théorème 3.1"), à ce stade de la démonstration nous avons choisi $E = e$ indépendant de N car l'hypothèses (C_2) nous le permettait. Cela n'est plus possible dans la situation présente car dans

l'inégalité ci-dessus, le terme de gauche est de l'ordre de $M^{\frac{1}{d}} N \log E$, alors que le terme de droite contient des termes qui sont de l'ordre de $N \log N$ au voisinage de $+\infty$. L' inégalité (9.2) n'est donc vérifiée, pour des valeurs de N arbitrairement grandes, que si le nombre E est choisi dépendant de N et, de plus, de telle façon que $\log E$ soit au moins de l'ordre de $\log N$ au voisinage de $+\infty$. De ce fait, nous choisissons E de la forme $E = N^{\eta}$, η étant un réel> 0.
Le terme de droite de l'inégalité (9.2) contient la quantité $s\alpha\mu(2r)^{\varrho} M^{1/s} N^{d/s} E^{\varrho}$, le nombre réel η doit donc vérifier $N^{d/s} N^{\eta\varrho} \leq N$ pour tout entier N assez grand ; on en déduit $\eta \leq (s-d)/s\varrho$. Comme $s - d \geq 1$, la plus grande valeur acceptable de η, sans connaître a priori la différence $s - d$, est $\eta = 1/\varrho s$. Nous prendrons donc $E = N^{1/\varrho s}$.

9.2.6 Une condition suffisante

En posant $E = N^{1/\varrho s}$, l'inégalité (9.2) est vérifiée si :

$$\begin{aligned} & d/(e\varrho s)(\mu/2)^{s/d} M^{1/d} N \log N > d/\varrho s N \log N + \log(N^d M) + dN \log N + \\ & \quad s\mu N^{d/s} M^{1/s} \log \hat{\beta} + s\alpha\mu N M^{1/s}(2r)^{\varrho} + dN \log \eta + D \log(N^d M) + \\ & \quad D(1+h)\left\{2s\eta^3 \mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})}(sN^{d/s} M^{1/s} + dN) + dN(\log N + \log(2sM))\right\}. \qquad (9.3) \end{aligned}$$

Faisons passer dans le membre de gauche de l'inégalité (9.3) tous les termes qui sont de l'ordre de $cN \log N$; on obtient la condition suffisante de réalisation de l'inégalité (9.2) suivante.

$$\begin{aligned} & d/(e\varrho s)\left((\mu/2)^{s/d} M^{1/d} - e(1 + \varrho s + D\varrho s(1+h))\right) \log N > s\alpha\mu M^{1/s}(2r)^{\varrho} + \\ & d \log \eta + 2s\eta^3 dD(1+h)\mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})} + dD(1+h)\log(2sM) + \\ & \left(2s^2\eta^3 D(1+h)\mu \mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})} + s\mu \log \hat{\beta}\right) M^{1/s} N^{\frac{d}{s}-1} + \\ & d(1+D)\log N/N + (1+D)\log M/N. \end{aligned}$$

Choisissons le nombre entier N supérieur à M, alors $\log M/N \leq 1$; nous obtenons une condition suffisante de la forme :

$$\frac{d\Theta}{e\varrho s} \log N > k_1(r^{\varrho} + \mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})} + 1) M^{1/s},$$

avec $\Theta = (\mu/2)^{s/d} M^{1/d} - e(1 + \varrho s + D(1+h)\varrho s)$, et un nombre réel k_1 strictement positif et indépendant de N et de M.

Or, d'aprés la condition (C), le nombre Θ est strictement positif ; il suffit donc de choisir $N \geq N_0$, avec

$$N_0 = \sup\left\{\left\lceil \exp\left(\frac{k_1 e\varrho s(r^{\varrho} + \mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\underline{f},\underline{\omega})} + 1)M^{1/s}}{d\Theta}\right)\right\rceil + 1, M\right\},$$

pour que la condition (9.1) soit vérifiée.

◇◇◇◇◇

Chapitre 10

Le théorème de Baker par la méthode de Gelfond

10.1 Le théorème de Baker dans sa version homogène

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments de $\mathcal{L}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des nombres algébriques tels que les nombres $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Nous supposons que le nombre $\lambda_{n+1} = \beta_1\lambda_1 + \ldots + \beta_n\lambda_n$ est un élément de $\mathcal{L}$, nous allons montrer que cela conduit à une impossibilité.

Nous posons $\alpha_i = \exp(\lambda_i)$, $(1 \leq i \leq n+1)$ et nous travaillons avec le corps de nombres $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \beta_1, \ldots, \beta_n)$.

10.1.1 Existence de polynômes

Soit M un nombre entier ≥ 1 ; nous appliquons le théorème 9.1 en prenant pour fonctions entières sur $\mathbb{C}^n$:

$$g_1 = \exp(z_1), \ldots,\ g_n = \exp(z_n) \text{ et } g_{n+1} = \exp(\beta_1 z_1 + \cdots + \beta_n z_n),$$

et pour ensemble de points $\{\omega_1, \ldots, \omega_M\}$ l'ensemble

$$\mathcal{F}_M = \{p(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),\ p \in \mathbb{N},\ 1 \leq p \leq M\}.$$

Les conditions (A) et (B) du théorème 9.1 sont satisfaites et les fonctions considérées sont toutes d'ordres ≤ 1, nous pouvons donc prendre $\varrho = 1$.
La condition (C) s'écrit, avec $D = [\mathcal{K} : \mathbb{Q}]$ et $h = \sum_{q=1}^{n+1} h(\alpha_q) + \sum_{q'=1}^{n} h(\beta_{q'})$,

$$\mu^{n+1} M \quad > \quad 2^{n+1} e^n \left(n + 2 + (n+1)D(1+h)\right)^n . \tag{10.1}$$

Lorsque l'inégalité (10.1) est réalisée, le théorème 9.1 nous assure de l'existence d'un entier N_0 tel que, pour tout entier $N \geq N_0$, il existe un polynôme Q_N non nul de $\mathcal{K}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ dont les degrés partiels sont $\leq \mu M^{1/(n+1)} N^{n/(n+1)}$ et tel que la fonction $F_N = Q_N(g_1, \ldots, g_{n+1})$ s'annule en chacun des points de l'ensemble $\{\omega_1, \ldots, \omega_M\}$ avec une multiplicité $\geq N$.

10.1.2 Un lemme de zéros

Proposition 10.1 - *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ des éléments non nuls de $\mathbb{C}$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des nombres complexes. On suppose le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$ engendré par $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ de rang $\geq n$ et les nombres $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Soient $D_1,\ S_0,\ U$ des entiers positifs satisfaisant les relations suivantes :*
(i) $S_0 \geq 2D_1$; $U > (n+1)!n!$.
(ii) $U(S_0+1)^n > n!(n+1)!(2D_1)^{n+1}$.
On définit l'élément $\underline{D}_1 = (D_1, \ldots, D_1)$ de $\mathbb{N}^{n+1}$.
Alors il n'existe pas de polynôme non nul P de l'anneau $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}]_{\leq \underline{D}_1}$, tel que la fonction entière $F = P(g_1, \ldots, g_{n+1})$ s'annule sur l'ensemble $\mathcal{F}_{(n+1)U}$ avec une multiplicité $> (n+1)S_0$.

Démonstration de la proposition 10.1

Notations

Nous posons, pour tout nombre entier $U \geq 1$,

$$\Gamma_U = \{(g_1(u), \ldots, g_{n+1}(u)),\ u \in \mathcal{F}_U\}.$$

Nous appliquons le théorème 5.3 avec :
$\mathcal{K} = \mathbb{C}$, $G = \mathbb{G}_m^{n+1}$, $G^+ = G$, $G^- = (1, \ldots, 1)$, $d_0 = 0$, $d = d_1 = d^+ = n+1$, et $\Sigma = \Gamma_U$. Alors $\Sigma = \{(\alpha_1^p, \ldots, \alpha_{n+1}^p),\ 1 \leq p \leq U\}$ et $\Sigma[n+1] \subset \Gamma_{(n+1)U}$.

Définition des dérivations et de l'espace vectoriel $\mathcal{W}$.

Soit $\mathcal{W}$ l'hyperplan de $\mathbb{C}^{n+1}$ engendré par les n vecteurs $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$ définis par $\underline{u}_i = (\delta_i^1, \ldots, \delta_i^n, \beta_i)$, $(1 \leq i \leq n)$; $\mathcal{W}$ a pour équation $\beta_1 z_1 + \cdots + \beta_n z_n = z_{n+1}$ et, par hypothèse, $\mathcal{F}_N \subset \mathcal{W}$.

On considère les n opérateurs de dérivation $\mathcal{D}_{\underline{u}_1}, \ldots, \mathcal{D}_{\underline{u}_n}$ définis sur l'anneau $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}, X_{n+1}^{\pm 1}]$ par :

$$\mathcal{D}_{\underline{u}_i} = X_i \frac{\partial}{\partial X_i} + \beta_i X_{n+1} \frac{\partial}{\partial X_{n+1}},\ (1 \leq i \leq n).$$

On pose : $\mathcal{D}^{\underline{\sigma}} = \mathcal{D}_{\underline{u}_1}^{\sigma_1} \cdots \mathcal{D}_{\underline{u}_n}^{\sigma_n}$, $(\underline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{N}^n)$.
Soient $P \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}, X_{n+1}^{\pm 1}]$ et $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{N}^n$, on vérifie l'égalité :

$$\partial^{\underline{\sigma}}[P(g_1, \ldots, g_{n+1})] = [\mathcal{D}^{\underline{\sigma}} P](g_1, \ldots, g_{n+1}).$$

D'où l'énoncé :

Lemme 10.1 - *Soient N un entier ≥ 0, $T \in \mathbb{N}$ et P un élément de l'anneau $\mathbb{C}[G]$.*
On définit la fonction entière $F = P(g_1, \ldots, g_{n+1})$.
Alors, les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.
(i) La fonction F s'annule sur l'ensemble $\mathcal{F}_N$ avec une multiplicité $> T$.
(ii) Le polynôme P s'annule sur l'ensemble Γ_N avec une multiplicité $> T$ dans la direction $\mathcal{W}$.

Application du théorème 5.3.

Soit $G^* = T_\Phi$ un sous-groupe algébrique connexe de G, tel que

$$\mathrm{Rang}_{\mathbb{Z}} \Phi = r \geq 1,\ \dim G^* = \dim T_\Phi = d_1^* = n+1-r \leq n.$$

On note :

$$\ell_0' = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathcal{W} + T_e(G^*)}{T_e(G^*)}\right)$$

où $T_e(G^*)$ est l'espace tangent à G^* en e constitué des zéros communs aux formes linéaires : $\mathcal{T}_{\underline{\varphi}} = \varphi_1 Y_1 + \cdots + \varphi_{n+1}Y_{n+1},\ \underline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}) \in \Phi$.

Or, $\dim_{\mathbb{C}} T_e(G^*) = d_1^* = d^*$ et

$$\mathcal{H}(G^*; \underline{D}_1) \geq d^*! 2^{d_1^*} D_1^{d_1^*},\ \ \mathcal{H}(G; \underline{D}_1) = (n+1)! 2^{n+1} D_1^{n+1}.$$

D'aprés le théorème 5.3, il nous suffit de choisir les paramètres tels que, pour tout sous-groupe algébrique connexe G^* de G,

$$\binom{S_0 + \ell_0'}{\ell_0'} \# \left(\frac{\Sigma + G^*}{G^*}\right) > \frac{(n+1)!}{d^*!}(2D_1)^{n+1-d_1^*}. \tag{10.2}$$

a) Si $G^* = e$**.** Alors $d^* = d_1^* = 0,\ \ell_0' = n, r = n+1,\ \mathcal{H}(G^*; \underline{D}_1) = 1$, et

$$\# \left(\frac{\Sigma + G^*}{G^*}\right) = \#\Sigma = U.$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\binom{S_0 + \ell_0'}{\ell_0'} \# \left(\frac{\Sigma + G^*}{G^*}\right) &= \binom{S_0 + n}{n} U \\ &> \frac{(S_0+1)^n}{(n)!} U.\end{aligned}$$

L'inégalité (10.2) est donc satisfaite d'aprés la condition (ii).

b) Si $G^* \neq e$**.** Le rang de Φ vérifie $1 \leq r \leq n$, on a donc $d_1^* = n + 1 - r \geq 1$ et $T_e(G^*) \neq 0$.
Considérons $\underline{\varphi}^{(i)} = (\varphi_1^{(i)}, \ldots, \varphi_{n+1}^{(i)}), (1 \leq i \leq r)$, une base de Φ; les éléments de $T_e(G^*)$ sont les solutions $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_{n+1})$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$ du système d'équations linéaires :

$$\mathcal{T}_{\underline{\varphi}^{(i)}}(\underline{y}) = \varphi_1^{(i)} y_1 + \cdots + \varphi_{n+1}^{(i)} y_{n+1} = 0,\ (1 \leq i \leq r).$$

Comme $r < n+1$, ce système admet une solution non triviale dans $\mathbb{Q}^{n+1}$ qui ne peut appartenir à $\mathcal{W}$ (puisque les nombres $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$). On en déduit que $T_e(G^*)$ n'est pas contenu dans $\mathcal{W}$. Par suite :

$$T_e(G^*) + \mathcal{W} = \mathbb{C}^{n+1} \text{ et } \ell_0' = r.$$

b-1) Si $G^* \cap \Sigma = \{e\}$ alors $\#(\Sigma + G^*)/G^* = U$.

Les minorations $\binom{S_0+\ell_0'}{\ell_0'} \geq \frac{(S_0+1)^r}{r!}$, $\frac{n!}{r!} \geq \frac{1}{(n+1-r)!}$ et les inégalités (i) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} U\binom{S_0+\ell_0'}{\ell_0'} &> U\frac{(S_0+1)^r}{r!} \\ &> \frac{(n+1)!n!(2D_1)^r}{r!} \\ &\geq \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!}(2D_1)^r. \end{aligned}$$

L'inégalité (10.2) est donc satisfaite.

b-2) Si $G^* \cap \Sigma \neq \{e\}$**.**

Un résultat préliminaire

Nous allons utiliser l'énoncé suivant :

Lemme 10.2 - *Soient $\mathcal{K}$ un corps, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments non nuls de $\mathcal{K}$ qui engendrent Γ un sous-groupe multiplicatif de rang p de $\mathcal{K}^\times$. Soient $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$ une base de Γ et $\lambda_{i,k}$, $(1 \leq i \leq p,\ 1 \leq k \leq n)$ les entiers relatifs vérifiant les égalités*

$$\alpha_k = \prod_{i=1}^{p} \gamma_i^{\lambda_{i,k}},\ (1 \leq k \leq n).$$

Alors la matrice $\mathcal{M} = (\lambda_{i,k})_{1\leq i\leq p, 1\leq k\leq n}$ est de rang p.

Démonstration du lemme 10.2 D'aprés les hypothèses, il existe des entiers relatifs $d_{k,l}$, $(1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq p)$ tels que

$$\gamma_j = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k^{d_{k,j}},\ (1 \leq j \leq p).$$

Nous avons donc :

$$\gamma_j = \prod_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{p} \gamma_i^{\lambda_{i,k}d_{k,j}},\ (1 \leq j \leq p).$$

$$\gamma_j = \prod_{i=1}^{p} \gamma_i^{\sum_{k=1}^{n}\lambda_{i,k}d_{k,j}},\ (1 \leq j \leq p),$$

d'où, pour $(1 \leq i, j \leq p)$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i,k}d_{k,j} &= 0 \text{ si } i \neq j \\ &= 1 \text{ si } i = j. \end{aligned}$$

Nous en déduisons, en notant I_p la matrice identité $p\times p$ et $\mathcal{D}$ la matrice $(d_{k,j})_{1\leq k\leq n, 1\leq l\leq p}$, l'égalité $\mathcal{M}\mathcal{D} = I_p$. Par suite $\mathcal{M}\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q}^p$, d'où le résultat.

Application du lemme 10.2

Notons m le rang du sous-groupe $\mathcal{G}$ de $\mathbb{C}^\times$ engendré par $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$; nous avons supposé $m \geq$ n.

Considérons une base $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ de $\mathcal{G}$. Il existe des entiers rationnels $\lambda_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ tels que :

$$\alpha_i = \prod_{j=1}^{m} \gamma_j^{\lambda_{i,j}}, \ (1 \leq i \leq n+1).$$

Le lemme 9.6 permet d'affirmer que la matrice à m lignes et $n+1$ colonnes $\mathcal{M} = (\lambda_{i,j})_{1\leq j\leq m,\ 1\leq i\leq n+1}$ est de rang m.

Notons $\hat{\mathcal{M}}$ l'homomorphisme de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, de $\mathbb{Q}^{n+1}$ dans $\mathbb{Q}^m$, associé à $\mathcal{M}$ et considérons $\underline{\varphi}^{(k)} = (\varphi_1^{(k)}, \ldots, \varphi_{n+1}^{(k)})$, $(1 \leq k \leq r)$ une base de Φ ; nous avons :

$$\begin{aligned}
G^* \cap \Sigma &= \{(\alpha_1^h \cdots \alpha_{n+1}^h) \ ; \ \prod_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{h\varphi_i^{(k)}} = 1, \ 1 \leq k \leq r, \ 1 \leq h \leq U\} \\
&= \{(\alpha_1^h \cdots \alpha_{n+1}^h) \ ; \ \prod_{i=1}^{n+1} \left(\prod_{j=1}^{m} \gamma_j^{\lambda_{i,j}}\right)^{h\varphi_i^{(k)}} = 1, \ 1 \leq k \leq r, \ 1 \leq h \leq U\} \\
&= \{(\alpha_1^h \cdots \alpha_{n+1}^h) \ ; \ \prod_{i=1}^{n+1} \left(\prod_{j=1}^{m} \gamma_j^{\lambda_{i,j} h\varphi_i^{(k)}}\right) = 1, \ 1 \leq k \leq r, \ 1 \leq h \leq U\} \\
&= \{(\alpha_1^h \cdots \alpha_{n+1}^h) \ ; \ \prod_{j=1}^{m} \gamma_j^{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{i,j}\varphi_i^{(k)} h} = 1, \ 1 \leq k \leq r, \ 1 \leq h \leq U\} \\
&= \{(\alpha_1^h \cdots \alpha_{n+1}^h) \ ; \ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{i,j}\varphi_i^{(k)} h = 0, \ 1 \leq j \leq m, \ 1 \leq k \leq r, \ 1 \leq h \leq U\}.
\end{aligned}$$

Deux situations se présentent :

$\{\underline{\varphi}^{(k)}, \ 1 \leq k \leq r\} \subset \ker \hat{\mathcal{M}}$.

Dans ce cas $\dim_{\mathbb{Q}} \ker \hat{\mathcal{M}} \geq r$ et d'aprés le lemme 9.6 :

$$\dim_{\mathbb{Q}} \ker \hat{\mathcal{M}} = n + 1 - m.$$

On a donc $r \leq n + 1 - m$ et comme nous avons supposé $m \geq n$ nous en déduisons $0 < r \leq 1$, ce qui entraîne :

$$r = 1, \ d_1^* = n, \ \ell_0^{'} = 1.$$

D'aprés (i), $S_0 + 1 > 2(n+1)D_1$, la condition (10.2) est donc satisfaite.

$\{\underline{\varphi}^{(k)},\ 1 \leq k \leq r\} \not\subset \ker \hat{\mathcal{M}}$.

Alors $G^* \cap \Sigma = \{e\}$ et la condition (10.2) est satisfaite si

$$\binom{S_0 + r}{r} U > \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!} (2D_1)^r.$$

En minorant $\binom{S_0+r}{r}$ par $(S_0+1)^r/r!$ et en majorant $r!/(n+1-r)!$ par $n!$, nous constatons que (10.2) est vérifiée si $(S_0+1)^r U > n!(n+1)!(2D_1)^r$ ce qui est le cas d'après l'hypothèse (i).

10.1.3 Fin de la démonstration du théorème de Baker homogène

Nous supposons $N \geq 2(n+1)$, alors $\lceil N/(n+1) \rceil \geq N/2(n+1)$.
Afin d'établir la contradiction nous appliquons la proposition 10.1 avec :

$$U = M,\ S_0 = \lceil N/(n+1) \rceil,\ D_1 = \left\lceil \mu M^{1/(n+1)} N^{n/(n+1)} \right\rceil.$$

La condition (i) de la proposition 9.5 est vérifiée si

$$N \geq 4(n+1)\mu M^{1/(n+1)} N^{n/(n+1)} \tag{10.3}$$

et

$$M > (n+1)!n!. \tag{10.4}$$

Quant à la condition (ii) de la même proposition, elle est satisfaite si

$$1 > (n+1)^n n!(n+1)!2^{n+1}\mu^{n+1}. \tag{10.5}$$

Le choix des paramètres se fait donc dans l'ordre suivant : tout d'abord le nombre réel μ est pris suffisamment petit pour que la condition (10.5) soit réalisée, ensuite on choisit le nombre entier M assez grand pour que les conditions (10.1) et (10.4) soient réalisées. Il ne reste plus enfin qu'à considérer un entier N supérieur à $\max\{N_0, n+1\}$ et suffisamment grand pour que (10.3) soit satisfaite. L'existence du polynôme Q_N (du § 10.1.1) se révèle dans ces conditions impossible, ce qui démontre que les hypothèses initiales conduisent à une contradiction.

10.2 Le théorème de Baker non-homogène

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ des éléments de $\mathcal{L}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}$ des nombres algébriques tels que $\lambda_n = \beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \ldots + \beta_{n-1}\lambda_{n-1}$ soit un élément de $\mathcal{L}$.
On suppose que $\beta_0 \neq 0$ et que les nombres $1, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$; nous montrons que cela conduit à une contradiction.
Comme précédemment nous notons $\alpha_i = \exp(\lambda_i)$, $(1 \leq i \leq n)$.

10.2.1 Existence de polynômes

Soit M un nombre entier ≥ 1, nous appliquons le théorème 9.1 en prenant pour fonctions entières sur $\mathbb{C}^n$:

$$g_0 = z_0,\ g_1 = \exp(z_1), \ldots,\ g_{n-1} = \exp(z_{n-1})$$
$$\text{et}$$
$$g_n = \exp(\beta_0 z_0 + \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_{n-1} z_{n-1}),$$

pour corps $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_{n-1})$ et pour ensemble de points $\{\omega_1, \ldots, \omega_M\}$

$$\mathcal{F}_M \quad = \quad \{p(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n),\ p \in \mathbb{N},\ 1 \leq p \leq M\}.$$

Les conditions (A) et (B) sont satisfaites et les fonctions g_k, $(0 \leq k \leq n)$ sont d'ordres ≤ 1 ; nous pouvons donc prendre $\varrho = 1$.
Soient $D = [\mathcal{K} : \mathbb{Q}]$, $h = \sum_{q=1}^{n} h(\alpha_q) + \sum_{q'=0}^{n-1} h(\beta_{q'})$ et μ un nombre réel > 0 satisfaisant à la condition (C) ci-dessous

$$(C)\ \mu^{n+1} M > 2^{n+1}.e^n \left(n + 2 + (n+1)D(1+h)\right).$$

Le théorème 9.1 nous assure de l'existence d'un entier N_0 tel que pour tout entier $N \geq N_0$, il existe un polynôme Q_N non nul de $\mathcal{K}[X_0, \ldots, X_n]$ dont les degrés partiels sont $\leq \mu M^{1/(n+1)} N^{n/(n+1)}$ et tel que la fonction $F_N = Q_N(g_0, \ldots, g_n)$ s'annule en chacun des points de l'ensemble $\{\omega_1, \ldots, \omega_M\}$ avec une multiplicité $\geq N$.

10.2.2 Un lemme de zéros

Proposition 10.2 - *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes non nuls et $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}$ des nombres complexes. On suppose le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$ engendré par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de rang $\geq n-1$ et les nombres $1, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Soient D_0, D_1, S_0, U des entiers positifs satisfaisant les relations suivantes :*

(i) $S_0 \geq 2(n+1)D_1$

(ii) $U(S_0+1)^n > n!(n+1)!D_0(2D_1)^n$

(iii) $U(S_0+1) > n!(n+1)!\sup\{D_0, 1\}$

On définit l'élément $\underline{D}_1 = (D_1, \ldots, D_1)$ de $\mathbb{N}^n$.

Alors il n'existe pas de polynôme non nul P de l'anneau $\mathbb{C}[X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n]_{\leq D_0, \underline{D}_1}$, tel que la fonction entière $F = P(g_0, \ldots, g_n)$ s'annule sur l'ensemble $\mathcal{F}_{(n+1)U}$ avec une multiplicité $\geq (n+1)S_0$.

Démonstration de la proposition 10.2

Notations préliminaires

Nous appliquons le théorème 5.3 avec :

$$G = \mathbb{G}_a^1 \times \mathbb{G}_m^n,\ G^+ = G,\ G^- = (0, 1, \ldots, 1),$$
$$d_0 = 1,\ d_1 = n,\ d = d^+ = n + 1.$$

Définition des dérivations et de l'espace vectoriel $\mathcal{W}$.
Soit $\mathcal{W}$ l'hyperplan de $\mathbb{C}^{n+1}$ engendré par les n vecteurs $\underline{u}_0, \ldots, \underline{u}_{n-1}$ définis par

$$\underline{u}_i = (\delta_i^0, \ldots, \delta_i^{n-1}, \beta_i),\ (0 \leq i \leq n-1).$$

On considère les n opérateurs de dérivation $\mathcal{D}_{\underline{u}_0}, \ldots, \mathcal{D}_{\underline{u}_{n-1}}$ définis sur l'anneau $\mathbb{C}[X_0, X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}, X_n^{\pm 1}]$ par

$$\mathcal{D}_{\underline{u}_0} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \beta_0 X_n \frac{\partial}{\partial X_n} \text{ et } \mathcal{D}_{\underline{u}_i} = X_i \frac{\partial}{\partial X_i} + \beta_i X_n \frac{\partial}{\partial X_n},\ (1 \leq i \leq n-1).$$

On pose :

$$\mathcal{D}^{\underline{\sigma}} = \mathcal{D}_{\underline{u}_0}^{\sigma_0} \cdots \mathcal{D}_{\underline{u}_{n-1}}^{\sigma_{n-1}},\ (\underline{\sigma} = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}) \in \mathbb{N}^n).$$

Nous connaissons déjà les opérateurs de dérivation $\partial^{\underline{\sigma}}$ définis, sur l'anneau des fonctions entières, par

$$\partial^{\underline{\sigma}} = \left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\sigma_0} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{\sigma_{n-1}}.$$

Soient $P \in \mathbb{C}[X_0, X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}, X_n^{\pm 1}]$ et $\underline{\sigma} = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$, alors on vérifie l'égalité

$$\partial^{\underline{\sigma}}[P(g_0, \ldots, g_n)] = [\mathcal{D}^{\underline{\sigma}} P](g_0, \ldots, g_n). \tag{10.6}$$

On en déduit l'énoncé suivant :

Lemme 10.3 - *Soient N un entier ≥ 0, $T \in \mathbb{N}$ et P un élément de l'anneau $\mathbb{C}[X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n]$. On définit la fonction entière $F = P(g_0, \ldots, g_n)$.*
Alors, les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.
(i) La fonction F s'annule sur l'ensemble $\mathcal{F}_N$ avec une multiplicité $> T$.
(ii) Le polynôme P s'annule sur l'ensemble Γ_N avec une multiplicité $> T$ dans la direction $\mathcal{W}$.

Application du théorème 5.3
Soit $G^* = \mathcal{V} \times T_\Phi$ un sous-groupe algébrique connexe de G, tel que :

$$\dim G^* < n+1,\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V} = d_0^*,\ \mathrm{Rang}_{\mathbb{Z}}\ \Phi = r,\ \dim T_\Phi = d_1^* = n - r.$$

On note $T_e(G^*) = \mathcal{V} \times L$ l'espace tangent à G^* en e, où L désigne le sous-ensemble algébrique de $\mathbb{C}^n$ constitué des zéros communs aux formes linéaires $\mathcal{T}_{\underline{\varphi}} = \varphi_1 Y_1 + \cdots + \varphi_n Y_n,\ \underline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \Phi$.

Nous posons :

$$\ell_0' = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathcal{W} + T_e(G^*)}{T_e(G^*)}\right) \text{ et } \Sigma = \{(g_0(u), \ldots, g_{n+1}(u)),\ u \in \mathcal{F}_U\}.$$

Compte tenu des inégalités (5.2) et (5.3) on a :

$$\mathcal{H}(G^*; D_0; \underline{D}_1) \geq \frac{d^*!}{d_0^*!} 2^{d_1^*} D_0^{d_0^*} D_1^{d_1^*} \text{ et } \mathcal{H}(G; D_0; \underline{D}_1) = (n+1)! 2^n D_0 D_1^n.$$

Il suffit, d'aprés le théorème 5.3, de montrer que si les paramètres D_0, D_1, S_0, U vérifient les conditions (i), (ii) et (iii) alors :

$$\binom{S_0+\ell_0'}{\ell_0'}\#\left(\frac{\Sigma+G^*}{G^*}\right) > (n+1)!\frac{d_0^*!}{d^*!}D_0^{1-d_0^*}(2D_1)^{n-d_1^*}. \tag{10.7}$$

a) Si $G^*=e$.

Nous avons $d^*=0$, $\ell_0'=n$, $\#(\Sigma+G^*)/G^*=U$, $\mathcal{H}(G^*;D_0;\underline{D}_1)=1$, d'où

$$\begin{aligned}\binom{S_0+\ell_0'}{\ell_0'}\#\left(\frac{\Sigma+G^*}{G^*}\right) &= \binom{S_0+n}{n}U\\ &> \frac{(S_0+1)^n}{n!}U.\end{aligned}$$

L'inégalité (10.7) est donc satisfaite d'aprés la condition (ii).

b) Si $G^*\neq e$.

b-1) Calcul de ℓ_0'.

Lemme 10.4 - *Si $G^*\neq e$ alors $T_e(G^*)\not\subset\mathcal{W}$ et $\ell_0'=n+1-d^*$.*

Démonstration du lemme 10.4.

Considèrons $\underline{\varphi}^{(1)},\ldots,\underline{\varphi}^{(r)}$ une base de Φ et les formes linéaires associées $\mathcal{T}_{\underline{\varphi}^{(1)}},\ldots,\mathcal{T}_{\underline{\varphi}^{(r)}}$; nous notons (S) le système d'équations à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

$$(S)\ :\quad \mathcal{T}_{\underline{\varphi}^{(i)}}(\underline{z})=0,(1\leq i\leq r).$$

L'espace tangent $T_e(G^*)$ n'est pas nul et s'écrit $\mathcal{V}\times L$ avec $L=\bigcap_{i=1}^r\ker\mathcal{T}_{\underline{\varphi}^{(i)}}$.

L'hyperplan $\mathcal{W}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ a pour équation : $\beta_0z_0+\beta_1z_1+\ldots+\beta_{n-1}z_{n-1}=z_n$.

Si $r=n$. Alors $L=0$ et comme $T_e(G)\neq 0$, il existe $u\in\mathcal{V}$, $u\neq 0$, tel que $(u,\underline{0})\in T_e(G)$. Il est cependant impossible que $u\in\mathcal{W}$ puisque β_0 est supposé non nul.

Si $r<n$. Alors le système (S) a n inconnues et r équations, avec $r<n$; il possède donc une solution non triviale $\underline{t}$ dans $\mathbb{Z}^n$. Alors $(0,\underline{t})\in T_e(G)$.

Mais il est impossible que $(0,\underline{t})\in\mathcal{W}$ puisque les nombres $1,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Nous venons de montrer que $T_e(G^*)\not\subset\mathcal{W}$, il existe donc un élément $\underline{u}$ de $T_e(G^*)$ n'appartenant pas à $\mathcal{W}$ et $\mathbb{C}^{n+1}=\mathcal{W}\oplus\mathbb{C}\underline{u}$. D'où $\mathbb{C}^{n+1}=\mathcal{W}+T_e(G^*)$; ce qui montre la deuxième assertion du lemme.

b-2) Etude du cas $\mathcal{V}=0$.

Si $\mathcal{V}=0$, alors $G^*=\{0\}\times T_\Phi$, et

$$G^*\cap\Sigma=\{(s,\alpha_1^1,\ldots,\alpha_n^n)\in\{0\}\times T_\Phi\}=\{(0,1,\ldots,1)\}.$$

L'inégalité (10.7) est une conséquence des conditions (i) et (iii).

En effet, (i) et (iii) impliquent :

$$(S_0+1)U > n!(n+1)!D_0\left(\frac{2D_1}{S_0+1}\right)^{n-d_1^*},$$

d'où :

$$(S_0+1)U > \frac{(n+1-d_1^*)!}{d_1^*!}(n+1)!D_0\left(\frac{2D_1}{S_0+1}\right)^{n-d_1^*}$$

et

$$\binom{S_0+n+1-d_1^*}{n+1-d_1^*}U > \frac{(n+1)!}{d_1^*!}D_0(2D_1)^{n-d_1^*}.$$

b-3) Etude du cas $\mathcal{V}=\mathbb{C}$.
Alors $d_0^*=1$ et la condition (10.7) est vérifiée si

$$(S_0+1)^{n+1-d_1^*}\#\left(\frac{\Sigma+G^*}{G^*}\right) > \frac{(n+1)!(n+1-d_1^*)!}{(d_1^*+1)!}(2D_1)^{n-d_1^*}.$$

Si $G^*\cap\Sigma=\{e\}$.

La condition (10.8) est vérifiée car, d'aprés (i) et (iii),

$$(S_0+1)U > (n+1)!n!\left(\frac{2D_1}{S_0+1}\right)^{n-d_1^*}.$$

Si $G^*\cap\Sigma\neq\{e\}$.

Nous établissons d'abord l'énoncé suivant :

Lemme 10.5 - *Soit S un entier ≥ 1, soit Φ un sous-groupe non-nul de $\mathbb{Z}^n$, soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des nombres complexes non nuls qui engendrent un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$ de rang p. On définit le sous-groupe algébrique propre $G^*=\mathbb{C}\times T_\Phi$ du groupe algébrique $G=\mathbb{C}\times(\mathbb{C}^*)^n$, ainsi que le sous-ensemble $\mathcal{E}=\{(s,\alpha_1^s,\ldots,\alpha_n^s),s\in\mathbb{N},\ 0\leq s\leq S\}$ de G.*
On suppose que $\mathcal{E}\cap G^*\neq\{e\}$.
Alors :
(A) Le rang de Φ est inférieur ou égal à $n-p$.
(B) $\Phi\subset\{\underline{t},\ \underline{t}=(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{N}^n,\ \prod_{1\leq k\leq n}\alpha_k^{t_k}=1\}$.
(C) $\mathcal{E}\subset G^*$.

Démonstration du lemme 10.5
a - *Preuve de (A).* Supposons Φ de rang r et considérons une base $\sigma^{(1)},\ldots,\sigma^{(r)}$ de Φ avec

$$\sigma^{(i)}=(\sigma_1^{(i)},\ldots,\sigma_n^{(i)}),\ (1\leq i\leq r).$$

Nous savons par hypothèse qu'il existe un entier s_0, $1\leq s_0\leq S$, tel que les r égalités

$$\prod_{1\leq k\leq n}\alpha_k^{s_0\sigma_k^{(i)}}=1,\ (1\leq i\leq r) \tag{10.8}$$

soient vérifiées.
Soit $\gamma_1,\ldots,\gamma_p$ une base du sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ engendré par $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.
Il existe des entiers relatifs $\lambda_{k,t}$, $(1\leq k\leq n,\ 1\leq t\leq p)$, tels que

$$\alpha_k=\prod_{1\leq t\leq p}\gamma_t^{\lambda_{k,t}},\ (1\leq k\leq n). \tag{10.9}$$

Le lemme 10.2 permet d'affirmer que la matrice $(\lambda_{k,t})_{(1\leq k\leq n,\ 1\leq t\leq p)}$ est de rang p. D'autre part, les égalités (10.8) et (10.9) entraînent

$$\prod_{1\leq k\leq n}\prod_{1\leq t\leq p}\gamma_t^{\lambda_{k,t}s_0\sigma_k^{(i)}}=1,\ (1\leq i\leq r)$$

$$\prod_{1\leq t\leq p}\gamma_t^{s_0\sum_{1\leq k\leq n}\lambda_{k,t}\sigma_k^{(i)}}=1,\ (1\leq i\leq r).$$

Or, l'indépendance multiplicative des nombres $\gamma_1,\ldots,\gamma_p$ implique que :

$$s_0\sum_{1\leq k\leq n}\lambda_{k,t}\sigma_k^{(i)}=0,\ (1\leq i\leq r),$$

et comme $s_0\neq 0$, nous en déduisons les r égalités suivantes

$$\sum_{1\leq k\leq n}\lambda_{k,t}\sigma_k^{(i)}=0,\ (1\leq i\leq r). \tag{10.10}$$

En faisant intervenir la matrice $\mathcal{M}=(\lambda_{k,t})_{(1\leq t\leq p,\ 1\leq k\leq n)}$ le système précédent peut s'écrire :

$$\mathcal{M}\begin{pmatrix}\sigma_1^{(i)}\\ \vdots\\ \sigma_n^{(i)}\end{pmatrix}=0,\ (1\leq i\leq r).$$

Comme les r vecteurs $v^{(i)}=\begin{pmatrix}\sigma_1^{(i)}\\ \vdots\\ \sigma_n^{(i)}\end{pmatrix}$, $(1\leq i\leq r)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ on en déduit que le noyau de la matrice $\mathcal{M}$ est de dimension $\geq r$ sur $\mathbb{Q}$, par conséquent la matrice $\mathcal{M}$ est de rang $\leq n-r$, on obtient donc $p\leq n-r$, d'où la première assertion.
c - *Preuve de (B).* La deuxième assertion provient des égalités :

$$\prod_{1\leq k\leq n}\alpha_k^{\sigma_k^{(i)}}=\prod_{1\leq t\leq p}\gamma_t^{\sum_{1\leq k\leq n}\lambda_{k,t}\sigma_k^{(i)}}=1,\ (1\leq i\leq r). \tag{10.11}$$

d - *Preuve de (C).* Supposons qu'il existe un entier s, $0<s\leq S$, tel que $(s,\alpha_1^s,\ldots,\alpha_n^s)\in G^*$, alors $(\alpha_1^s,\ldots,\alpha_n^s)\in T_\Phi$ et par conséquent les égalités (10.8) sont satisfaites en remplaçant s_0 par s ; nous en déduisons les égalités (10.10). Par conséquent $(1,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in G^*$, d'où la troisième assertion.
On en déduit immédiatement, avec les notations précédentes.

Corollaire 10.1 - *On suppose $G^*\neq G$.*
(A) Si $p=n$, les nombres $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ sont multiplicativement indépendants et $\mathcal{E}\cap G^*=\{e\}$.
(B) Si $p=n-1$, alors $r=1$.

Application du corollaire 10.1.
Nous choisissons $\mathcal{E} = \Sigma$ et en supposons $p = n - 1$ et $G^* \cap \Sigma \neq \{e\}$.
Alors $r = 1$, $d_1^* = n - 1$ et $\ell_0' = 1$. La condition (10.7) est donc satisfaite si :

$$(S_0 + 1)\#\left(\frac{\Sigma + G^*}{G^*}\right) > 2(n+1)D_1.$$

Or, $\Sigma \subset G^*$, la condition (10.7) est donc remplie d'après la condition (i).

10.2.3 Fin de la démonstration du théorème de Baker non-homogène

Considérons un nombre réel $\mu > 0$ vérifiant l'inégalité :

$$1 > 2^n (n+1)^n n!(n+1)!\mu^{n+1}.$$

Nous appliquons la proposition 10.2 avec :

$$U = M,\ S_0 = \lceil N/(n+1) \rceil,\ D_0 = D_1 = \left\lceil \mu M^{1/(n+1)} N^{n/(n+1)} \right\rceil \mathrm{L}.$$

D'aprés le choix de μ, la condition (ii) de la proposition 10.2 est remplie pour tous nombres entiers $M \geq 1$ et $N \geq 1$; en effet $M(S_0 + 1)^n \geq M(N/(n+1))^n$ et $M(N/(n+1))^n > 2^n n!(n+1)!\mu^{n+1} M N^n$.
Les conditions (i) et (iii) de la proposition 10.2 sont satisfaites si N et M vérifient respectivement

$$N > 2\mu(n+1)^2 M^{1/(n+1)} N^{n/(n+1)} \tag{10.12}$$

et

$$MN > (n+1)(n+1)!n! \max\{\mu M^{1/(n+1)} N^{n/(n+1)}, 1\}. \tag{10.13}$$

Considérons le nombre entier N_0 du § 10.2.1. Le choix des paramètres se fait dans l'ordre suivant : on choisit d'abord l'entier M assez grand pour que l'inégalité (C) du § 10.2.1 soit réalisée, puis on conclut en prenant $N \geq N_0$ assez grand pour que (10.12) et (10.13) soient vérifiées.

◇◇◇◇◇
◇◇◇◇◇

Quatrième partie

Valeurs algébriques d'une fonction entière à une variable

Introduction

Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$, soient X et Y des sous-ensembles infinis de $\mathbb{C}$. Nous démontrons que, sous certaines conditions, si la fonction f prend des valeurs algébriques sur l'ensemble des produits xy, $(x,y) \in X \times Y$ alors elle est un polynôme.

Notre démarche consiste à montrer qu'il existe des nombres entiers δ et λ tels que les $\delta\lambda$ fonctions

$$f_{i,j}(\underline{z},\underline{w}) = f(z_i w_j),\ \ (1 \le i \le \delta\ ,\ 1 \le j \le \lambda),$$

sont algébriquement dépendantes ; un lemme de J. P. Bézivin (cf. Lem. 11.5) permet d'en conclure que la fonction f est un polynôme.

Dans un premier temps, nous construisons, en appliquant un lemme de Siegel fondé sur le principe des tiroirs, une fonction auxiliaire Φ nulle sur un sous-ensemble $(X')^\delta \times (Y')^\lambda$ de $X^\delta \times Y^\lambda$, puis ensuite nous extrapolons pour établir que la fonction Φ est identiquement nulle sur $X^\delta \times Y^\lambda$.

Les même résultats peuvent s'établir en remplaçant la construction de la fonction auxiliaire par l'utilisation d'un déterminant d'interpolation selon la méthode de Laurent.

Chapitre 11

Résultats préliminaires

Nous avons réuni dans ce chapitre les lemmes algébriques et analytiques que nous utilisons dans les démonstrations de transcendance des chapitres 12 et 13.

Rappel de notation
Pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[T_1, ..., T_m]$ nous définissons le nombre $\chi(P)$, par :

$$\begin{cases} \chi(P) = 0 \text{ si } P = 0. \\ \chi(P) = \log |P|_1 + \max_{1 \le i \le m} \deg_{T_i} P \text{ si } P \ne 0. \end{cases}$$

11.1 Un lemme de Siegel

Lemme 11.1 - *Soient N, M et D trois entiers positifs tels que $N > DM$. Soient $\mathcal{K}$ un corps de nombres de degré D sur $\mathbb{Q}$ et $a_{\lambda,\mu}$, $(1 \le \lambda \le N, 1 \le \mu \le M)$ des éléments de $\mathcal{K}$ entiers sur $\mathbb{Z}$. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_D$ les différents morphismes de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{C}$ et A un entier positif vérifiant*

$$A \ge \max \left\{ \sum_{\lambda=1}^{N} \mid \sigma_h(a_{\lambda,\mu}) \mid, \ 1 \le \mu \le M, \ 1 \le h \le D \right\}.$$

Alors, il existe des nombres complexes $x_1, \ldots, x_N$ satisfaisant aux équations

$$\sum_{\lambda=1}^{N} a_{\lambda,\mu} x_\lambda = 0, \ (1 \le \mu \le M),$$

et tels que : $\qquad 0 < \max \{\mid x_\lambda \mid, \ 1 \le \lambda \le N\} < \left(\sqrt{2}A\right)^{\frac{MD}{N-MD}}$.

Démonstration du lemme 11.1
Cf. [Wal74], Chap. 1, Lem. 1.3.1.

Remarque
Il est possible d'utiliser le lemme 1 pour résoudre des systèmes à coefficients algébriques en faisant intervenir des dénominateurs d_μ des lignes $a_{1,\mu}, \ldots, a_{N,\mu}$, $1 \le \mu \le M$ et en résolvant le nouveau système à coefficients entiers sur $\mathbb{Z}$:

$$\sum_{\lambda=1}^{N} d_\mu a_{\lambda,\mu} x_\lambda = 0, \ (1 \le \mu \le M).$$

Notons, d'autre part, que les nombres

$$\sum_{\lambda=1}^{N} \mid \sigma_h(a_{\lambda,\mu}) \mid, \ 1 \leq \mu \leq M, \ 1 \leq h \leq D,$$

sont tous majorés par $N \exp(DH)$, où le nombre H est un majorant des nombres $h(a_{\lambda,\mu}), \ 1 \leq \lambda \leq N, \ 1 \leq \mu \leq M$.
Nous pouvons donc énoncer :

Lemme 11.2 - *Soient N, M et D trois entiers positifs tels que $N > 2DM$. Soient $\mathcal{K}$ un corps de nombres de degré D sur $\mathbb{Q}$ et $a_{\lambda,\mu}$, $(1 \leq \lambda \leq N, 1 \leq \mu \leq M)$ des éléments de $\mathcal{K}$. Soient $d_1, \ldots, d_M$ des entiers positifs, tels que, pour tout entier μ, $1 \leq \mu \leq M$, d_μ est un dénominateur de chacun des nombres algébriques $a_{1,\mu}, \ldots, a_{N,\mu}$.*
On note :
$H = \max\{h(a_{\lambda,\mu}), \ 1 \leq \lambda \leq N, \ 1 \leq \mu \leq M\}$ et $d = \max\{d_\mu, \ 1 \leq \mu \leq M\}$. Alors, il existe des nombres complexes $x_1, \ldots, x_N$ satisfaisant aux équations

$$\sum_{\lambda=1}^{N} a_{\lambda,\mu} x_\lambda = 0, \ (1 \leq \mu \leq M),$$

et tels que : $$0 < \max\{\mid x_\lambda \mid, \ 1 \leq \lambda \leq N\} < \sqrt{2} N d \exp(DH).$$

Démonstration du lemme 11.2
Le lemme 11.2 est une conséquence du lemme 11.1 en prenant $A = Nd \exp(DH)$ et en remarquant que si $N > 2DM$ alors $MD/(N - MD) \leq 1$.

11.2 Lemme de Schwarz sur les produits cartésiens

Lemme 11.3 - *Soient n et m deux nombres entiers vérifiant $1 \leq m \leq n$, soient $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ des sous-ensembles finis de $\mathbb{C}$ contenant tous le même nombre d'éléments S_1, soient E un nombre réel > 1 et r un nombre réel > 0 tel que :*

$$\max\{\mid \xi_i \mid, \ \xi_i \in \mathcal{E}_i, \ 1 \leq i \leq n\} \leq r.$$

On définit le nombre réel $R = 18^{n-m+1}(n - m + 1)Er$ et le sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$.
Soient S_0 un nombre entier ≥ 1 et f une fonction entière dans $\mathbb{C}^n$ vérifiant :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_m}\right)^{\sigma_m} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\sigma_n} f(\underline{z}) = 0$$

pour tout $\underline{z} \in \mathcal{E}$ et pour tout $\underline{\sigma} = (\sigma_m, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{N}^{n-m+1}$ tel que $\|\underline{\sigma}\| < S_0$. Alors

$$\mid f \mid_r \leq \mid f \mid_R E^{-S_0 S_1}.$$

Démonstration du lemme 11.3
Considérons les polynômes de $\mathbb{C}[X]$

$$P_i(X) = \prod_{\xi_i \in \mathcal{E}_i} (X - \xi)^{S_0}, \ m \leq i \leq n.$$

Chacun des polynômes P_i est unitaire, de degré S_1S_0, et admet $\mathcal{E}_i$ pour ensemble de zéros.
Remarquons que le nombre réel $R = 18^{n-m+1}(n-m+1)Er$ est $> 5r$; d'aprés le lemme 4.8 de [Wal00], il existe $n-m+1$ fonctions entières dans $\mathbb{C}^n$ $f_m, \ldots, f_n$ telles que, pour tout $\underline{z} \in \mathbb{C}^n$,

$$f(\underline{z}) = f_m(\underline{z})P_m(z_m) + \cdots + f_n(\underline{z})P_n(z_n)$$

et

$$\mid f_i \mid_R \leq 9^{(n-m+1)S_0S_1} R^{-S_0S_1} \mid f \mid_R .$$

Or, d'aprés le principe du maximum,

$$\mid f_i \mid_r \leq \mid f_i \mid_R$$

et, par définition des polynômes P_i, $(m \leq i \leq n)$,

$$\mid P_i \mid_r \leq (2r)^{S_0S_1}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mid f \mid_r &\leq \mid f_m \mid_r (2r)^{S_0S_1} + \cdots + \mid f_n \mid_r (2r)^{S_0S_1} \\ &\leq (n-m+1)9^{(n-m+1)S_0S_1} R^{-S_0S_1} \mid f \mid_R (2r)^{S_0S_1} \\ &\leq (n-m+1)\left(2 \times 9^{(n-m+1)} \times \frac{r}{R}\right)^{S_0S_1} \mid f \mid_R . \end{aligned}$$

Remplaçons R par $18^{n-m+1}(n-m+1)Er$,

$$\mid f \mid_r \leq (n-m+1)\left(\frac{2 \times 9^{(n-m+1)}}{18^{n-m+1}(n-m+1)E}\right)^{S_0S_1} \mid f \mid_R .$$

En majorant $2 \times 9^{(n-m+1)}$ par $18^{(n-m+1)}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \mid f \mid_r &\leq (n-m+1)\left(\frac{18^{(n-m+1)}}{18^{n-m+1}(n-m+1)E}\right)^{S_0S_1} \mid f \mid_R \\ &\leq \frac{(n-m+1)}{(n-m+1)^{S_0S_1}E^{S_0S_1}} \mid f \mid_R \\ &\leq E^{-S_0S_1} \mid f \mid_R, \end{aligned}$$

d'où la majoration de $\mid f \mid_r$ annoncée.

11.3 Dérivation d'un produit de fonctions

Soit f une fonction entières sur $\mathbb{C}$, δ et λ deux nombres entiers ≥ 1. Nous définissons, pour tout $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_\delta) \in \mathbb{C}^\delta$ et tout $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_\lambda) \in \mathbb{C}^\lambda$, les $\delta\lambda$ fonctions entières sur $\mathbb{C}^{\delta+\lambda}$

$$f_{i,j}(\underline{z}, \underline{w}) = f(z_iw_j),\ (1 \leq i \leq \delta\ ,\ 1 \leq j \leq \lambda).$$

La fonction auxiliaire que nous allons construire s'écrit comme une combinaison linéaire de monômes de la forme

$$\prod_{1\le i\le\delta}\prod_{1\le j\le\lambda} f_{i,j}^{q_{i,j}} \text{ avec } \underline{q} = (q_{i,j})_{(1\le i\le\delta\ ,\ 1\le j\le\lambda)} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda}.$$

Pour tout $\underline{q} = (q_{i,j})_{(1\le i\le\delta\ ,\ 1\le j\le\lambda)} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda}$, nous notons $\varphi_{\underline{q}}$ la fonction

$$\varphi_{\underline{q}} = \prod_{1\le i\le\delta}\prod_{1\le j\le\lambda} f_{i,j}^{q_{i,j}},$$

et pour tout $\underline{w} = (w_1,\ldots,w_\lambda) \in \mathbb{C}^\lambda$ et tout $\underline{\sigma} = (\sigma_1,\ldots,\sigma_\lambda) \in \mathbb{N}^\lambda$ nous définissons les opérateurs de dérivation

$$\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}} = \left(\frac{\partial}{\partial w_1}\right)^{\sigma_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial w_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda}.$$

La fonction $\varphi_{\underline{q}}$ admet des dérivées partielles sur $\mathbb{C}^{\delta+\lambda}$; il est donc possible d'exprimer en fonction de $\underline{z} = (z_1,\ldots,z_\delta) \in \mathbb{C}^\delta$, de $\underline{\sigma}$, de $\underline{q}$ et des fonctions

$$f^{(k)}(z_i w_j) = \left[\left(\frac{d}{dz}\right)^k f\right](z_i w_j),\ \ (k\in\mathbb{N}),$$

l'image de $\varphi_{\underline{q}}$ par l'opérateur $\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}}$. C'est l'objet de l'énoncé suivant.

Soient s un entier ≥ 1 et $\underline{t} = (t_1,\ldots,t_d)$ un élément de $\mathbb{N}^d$.

Lemme 11.4 - *Quels que soient* $\underline{z} = (z_1,\ldots,z_\delta) \in \mathbb{C}^\delta$, $\underline{w} = (w_1,\ldots,w_\lambda) \in \mathbb{C}^\lambda$, $\underline{\sigma} = (\sigma_1,\ldots,\sigma_\lambda) \in \mathbb{N}^\lambda$ *et* $\underline{q} = (q_{i,j})_{(1\le i\le\delta\ ,\ 1\le j\le\lambda)} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda}$ *:*

$$\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}}\varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w}) = \prod_{j=1}^{\lambda}\sum_{\substack{\underline{\sigma}_j=(\sigma_j^{(1)},\ldots,\sigma_j^{(\delta)})\in\mathbb{N}^\delta\\ \|\underline{\sigma}_j\|=\sigma_j}}\left(\prod_{i=1}^{\delta} z_i^{\sigma_j^{(i)}}\right)\frac{\sigma_j!}{\underline{\sigma}_j!}\prod_{k=1}^{\delta} E_{k,\underline{\sigma}_j},$$

avec :

$$E_{k,\underline{\sigma}_j} = \sum_{\substack{\underline{\tau}_k=(\tau_k^{(1)},\ldots,\tau_k^{(q_{k,j})})\in\mathbb{N}^{q_{k,j}}\\ \|\underline{\tau}_k\|=\sigma_j^{(k)}}}\frac{\sigma_j^{(k)}!}{\underline{\tau}_k!}\prod_{p=1}^{q_{k,j}} f^{(\tau_k^{(p)})}(z_k w_j).$$

Nous en déduisons en particulier :

Corollaire 11.1 - *Soient γ un nombre réel non nul et $\underline{\sigma}$ un élément de $\mathbb{N}^\lambda$ et $\underline{q}$ un élément de $\mathbb{N}^{\delta\lambda}$. Alors, pour tout $(\underline{z},\underline{w}) \in \mathbb{C}^\delta\times\mathbb{C}^\lambda$,*

$$\left(\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}}\varphi_{\underline{q}}\right)(\gamma\underline{z},\frac{\underline{w}}{\gamma}) = \gamma^{\|\underline{\sigma}\|}\left(\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}}\varphi_{\underline{q}}\right)(\underline{z},\underline{w}).$$

Démonstration du lemme 11.4

Première étape : Une formule générale

Soient $g_1, \dots, g_s$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{C}$ et σ un nombre entier ≥ 0, nous savons que :

$$\left(\frac{d}{dw}\right)^\sigma \prod_{k=1}^{s} g_k(w) = \sum_{\substack{\underline{\theta}=(\theta^{(1)},\dots,\theta^{(s)})\in\mathbb{N}^s \\ \|\underline{\theta}\|=\sigma}} \frac{\sigma!}{\underline{\theta}!} \prod_{p=1}^{s} \left(\frac{d}{dw}\right)^{\theta^{(p)}} g_p(w)$$

En appliquant la formule précédente avec $s = q$ et $g_1 = \cdots = g_q = g$, g étant une fonction dérivable sur $\mathbb{C}$, $\sigma \geq 0$ et $q \geq 1$ deux nombres entiers, nous obtenons :

$$\left(\frac{d}{dw}\right)^\sigma g^q(w) = \sum_{\substack{\underline{\tau}=(\tau^{(1)},\dots,\tau^{(s)})\in\mathbb{N}^q \\ \|\underline{\tau}\|=\sigma}} \frac{\sigma!}{\underline{\tau}!} \prod_{k=1}^{q} \left(\frac{d}{dw}\right)^{\tau^{(k)}} g(w)$$

Par conséquent, pour tout s-uplet d'entiers ≥ 1, $\underline{q} = (q_1, \dots, q_s)$,

$$\left(\frac{d}{dw}\right)^\sigma \prod_{k=1}^{s} g_k^{q_k}(w)$$

peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{\substack{\underline{\theta}=(\theta^{(1)},\dots,\theta^{(s)})\in\mathbb{N}^s \\ \|\underline{\theta}\|=\sigma}} \frac{\sigma!}{\underline{\theta}!} \prod_{p=1}^{s} \left(\frac{d}{dw}\right)^{\theta^{(p)}} g_p^{q_p}(w),$$

ou encore :

$$\sum_{\substack{\underline{\theta}=(\theta^{(1)},\dots,\theta^{(s)})\in\mathbb{N}^s \\ \|\underline{\theta}\|=\sigma}} \frac{\sigma!}{\underline{\theta}!} \prod_{p=1}^{s} \sum_{\substack{\underline{\tau}_p=(\tau_p^{(1)},\dots,\tau_p^{(q_p)})\in\mathbb{N}^{q_p} \\ \|\underline{\tau}_p\|=\theta^{(p)}}} \frac{\theta^{(p)}!}{\underline{\tau}_p!} \prod_{k=1}^{q_p} \left(\frac{d}{dw}\right)^{\tau_p^{(k)}} g_p(w).$$

Deuxième étape : Le cas particulier $g_p(w) = f(z_p w)$, $(1 \leq p \leq \delta)$

Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{C}$, nous considérons les fonctions f_p, $(1 \leq p \leq \delta)$, de $\mathbb{C}^{\delta+1}$ dans $\mathbb{C}$, définies par $f_p(z_1, \dots, z_\delta, w) = f(z_p w)$. Remarquons que, pour tout entier $\sigma \geq 0$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^\sigma f_p(\underline{z}, w) = z_p^\sigma f^{(\sigma)}(z_p w).$$

Appliquons la formule précédente, avec $g_p(w) = f_p(\underline{z}, w)$ et $s = \delta$, pour calculer une expression de

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^\sigma \prod_{k=1}^{\delta} f_k^{q_k}(\underline{z}, w).$$

Nous obtenons :

$$\sum_{\substack{\underline{\sigma}=(\sigma^{(1)},\dots,\sigma^{(\delta)})\in\mathbb{N}^\delta\\ \|\underline{\sigma}\|=\sigma}} \frac{\sigma!}{\underline{\sigma}!}\prod_{p=1}^{\delta} \sum_{\substack{\underline{\tau}_p=(\tau_p^{(1)},\dots,\tau_p^{(q_p)})\in\mathbb{N}^{q_p}\\ \|\underline{\tau}_p\|=\sigma^{(p)}}} \frac{\sigma^{(p)}!}{\underline{\tau}_p!}\prod_{r=1}^{q_p} z_p^{\tau_p^{(r)}} f^{(\tau_p^{(r)})}(z_p w).$$

Or,

$$\prod_{p=1}^{\delta}\prod_{r=1}^{q_p} z_p^{\tau_p^{(r)}} = \prod_{p=1}^{\delta} z_p^{\sigma^{(p)}}.$$

Nous venons donc d'établir l'égalité

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^{\sigma}\prod_{k=1}^{\delta} f^{q_k}(z_k w) = \sum_{\substack{\underline{\sigma}\in\mathbb{N}^\delta\\ \|\underline{\sigma}\|=\sigma}} \frac{\sigma!}{\underline{\sigma}!}\prod_{p=1}^{\delta} z_p^{\sigma^{(p)}}\prod_{p=1}^{\delta} \sum_{\substack{\underline{\tau}_p\in\mathbb{N}^{q_p}\\ \|\underline{\tau}_p\|=\sigma^{(p)}}} \frac{\sigma^{(p)}!}{\underline{\tau}_p!}\prod_{r=1}^{q_p} f^{(\tau_p^{(r)})}(z_p w).$$

Conclusion : Le calcul de $\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}}\varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w})$
Nous pouvons écrire

$$\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}}\varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w}) = \prod_{j=1}^{\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial w_j}\right)^{\sigma_j}\prod_{k=1}^{\delta} f^{q_{k,j}}(z_k w_j),$$

et d'aprés le résultat de la deuxième étape nous pouvons remplacer pour chacun des entiers j, $1\le j\le\lambda$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial w_j}\right)^{\sigma_j}\prod_{k=1}^{\delta} f^{q_{k,j}}(z_k w_j)$$

par

$$\sum_{\substack{\underline{\sigma}_j\in\mathbb{N}^\delta\\ \|\underline{\sigma}_j\|=\sigma_j}} \frac{\sigma_j!}{\underline{\sigma}_j!}\prod_{k=1}^{\delta} z_k^{\sigma_j^{(k)}}\prod_{k=1}^{\delta} \sum_{\substack{\underline{\tau}_k\in\mathbb{N}^{q_{k,j}}\\ \|\underline{\tau}_k\|=\sigma_j^{(k)}}} \frac{\sigma_j^{(k)}!}{\underline{\tau}_k!}\prod_{r=1}^{q_{k,j}} f^{(\tau_k^{(r)})}(z_k w_j).$$

Nous obtenons ainsi l'égalité attendue.

Démonstration du corollaire 11.1
Posons $\underline{\sigma}=(\sigma_1,\dots,\sigma_\lambda)$ et $\underline{q}=(q_{k,j})_{(1\le i\le\delta\ ,\ 1\le j\le\lambda)}$.
Nous déduisons du lemme 11.4 l'égalité suivante :

$$\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}}\varphi_{\underline{q}}(\gamma\underline{z},\frac{\underline{w}}{\gamma}) = \prod_{j=1}^{\lambda}\sum_{\substack{\underline{\sigma}_j=(\sigma_j^{(1)},\dots,\sigma_j^{(\delta)})\in\mathbb{N}^\delta\\ \|\underline{\sigma}_j\|=\sigma_j}} \left(\prod_{i=1}^{\delta}(\gamma z_i)^{\sigma_j^{(i)}}\right)\frac{\sigma_j}{\underline{\sigma}_j!}\prod_{k=1}^{\delta} E_{k,\underline{\sigma}_j},$$

avec

$$E_{k,\underline{\sigma}_j} = \sum_{\substack{\underline{\tau}_k=(\tau_k^{(1)},\dots,\tau_k^{(q_{k,j})})\in\mathbb{N}^{q_{k,j}}\\ \|\underline{\tau}_k\|=\sigma_j^{(k)}}} \frac{\sigma_j^{(k)}!}{\underline{\tau}_k!}\prod_{p=1}^{q_{k,j}} f^{(\tau_k^{(p)})}(\gamma z_k\times\frac{w_j}{\gamma})).$$

Or,

$$\gamma z_k \times \frac{w_j}{\gamma} = z_k w_j$$

et

$$\prod_{i=1}^{\delta} (\gamma z_i)^{\sigma_j^{(i)}} = \gamma^{\sigma_j} \prod_{i=1}^{\delta} z_i^{\sigma_j^{(i)}}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}} \varphi_{\underline{q}}(\gamma \underline{z}, \frac{\underline{w}}{\gamma}) &= \prod_{j=1}^{\lambda} \sum_{\substack{\underline{\sigma}_j = (\sigma_j^{(1)}, \ldots, \sigma_j^{(\delta)}) \in \mathbb{N}^\delta \\ \|\underline{\sigma}_j\| = \sigma_j}} \left(\prod_{i=1}^{\delta} (\gamma z_i)^{\sigma_j^{(i)}} \right) \frac{\sigma_j!}{\underline{\sigma}_j!} \prod_{k=1}^{\delta} E_{k,\underline{\sigma}_j} \\
&= \prod_{j=1}^{\lambda} \gamma^{\sigma_j} \sum_{\substack{\underline{\sigma}_j = (\sigma_j^{(1)}, \ldots, \sigma_j^{(\delta)}) \in \mathbb{N}^\delta \\ \|\underline{\sigma}_j\| = \sigma_j}} \left(\prod_{i=1}^{\delta} (z_i)^{\sigma_j^{(i)}} \right) \frac{\sigma_j!}{\underline{\sigma}_j!} \prod_{k=1}^{\delta} E_{k,\underline{\sigma}_j} \\
&= \gamma^{\|\underline{\sigma}\|} \prod_{j=1}^{\lambda} \sum_{\substack{\underline{\sigma}_j = (\sigma_j^{(1)}, \ldots, \sigma_j^{(\delta)}) \in \mathbb{N}^\delta \\ \|\underline{\sigma}_j\| = \sigma_j}} \left(\prod_{i=1}^{\delta} (z_i)^{\sigma_j^{(i)}} \right) \frac{\sigma_j!}{\underline{\sigma}_j!} \prod_{k=1}^{\delta} E_{k,\underline{\sigma}_j},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

11.4 Indépendance algébrique des fonctions $f_{i,j}$

Nous citons un résultat dû à J.P.Bézivin.

Lemme 11.5 (J.P.Bézivin) - *Soient δ et λ deux entiers ≥ 1 et f une fonction entière dans $\mathbb{C}$. Supposons les $\delta\lambda$ fonctions $f_{i,j}$, $(1 \leq i \leq \delta,\ 1 \leq j \leq \lambda)$ de $\mathbb{C}^{\delta+\lambda}$ dans $\mathbb{C}$, définies par $f_{i,j}(\underline{z}, \underline{w}) = f(z_i w_j)$, algébriquement dépendantes sur $\mathbb{C}(z_1, \ldots, z_\delta, w_1, \ldots, w_\lambda)$. Alors f est un polynôme.*

Démonstration du lemme 11.5
Voir [Wal97], § 2, Lem. 2.6 (J.-P. Bézivin).

◇◇◇◇◇

Chapitre 12

La méthode de Schneider

12.1 Un critère de dépendance algébrique

Théorème 12.1 - *Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{K}$ un corps de nombres, $(X_N)_{N\geq 1}$, $(Y_N)_{N\geq 1}$ deux suites strictement croissantes de sous-ensembles non vides et finis de $\mathbb{C}$, ϕ une application de $\mathbb{R}_{>0}$ dans $\mathbb{R}_{>0}$, $(r_N, \mu_N)_{N\geq 1}$ une suite d'éléments de $(\mathbb{R}_{>0})^2$, θ et c_0 deux nombres réels vérifiant $0 < \theta < 1$ et $c_0 > 0$. On suppose que la suite $(\frac{\mu_{N+1}}{\mu_N})_{N\geq 2}$ est majorée et que, pour chaque entier $N \geq 1$, les conditions suivantes sont vérifiées.*
(i) $\#X_N = \#Y_N = \mu_N$.
(ii) $\sup\{\mid zw \mid,\ (z,w) \in X_N \times Y_N\} \leq r_N$ *et* $\lim_{n\to+\infty} r_N = +\infty$.
(iii) Pour tout $(z,w) \in X_N \times Y_N$, $f(zw) \in \mathcal{K}$ *et* $h\left(f(zw)\right) \leq c_0\mu_N^{\theta}$.
(iv) $\log \mid f \mid_{kr_N} \leq \phi(k)\mu_N^{\theta}$, $(k \in \mathbb{R}_{>0})$.
Alors la fonction f est un polynôme.

Remarques :
1) Le fait que les suites d'ensembles finis $(X_N)_{N\geq 1}$, $(Y_N)_{N\geq 1}$ soient strictement croissantes implique que :
- La suite d'entiers $(\mu_N)_{N\geq 1}$ est strictement croissante et tend avec N vers $+\infty$.
- Les ensembles X_2 et Y_2 contiennent chacun un élément différent de zéro.
En effet $\mu_2 > \mu_1 \geq 1$ implique que X_2 et Y_2 possède chacun au moins deux éléments.
2) Les hypothèses du théorème 1 nous fournissent aussi des informations sur la suite $(\gamma_N)_{N\geq 2}$ définie par :

$$\gamma_N = \sqrt{\frac{\max\{\mid w \mid,\ w \in Y_N\}}{\max\{\mid z \mid,\ z \in X_N\}}}.$$

Nous en déduisons un encadrement de γ_N en fonction de r_N.

Lemme 12.1 - *Il existe deux nombres réels $\zeta_1 > 0$ et $\zeta_2 > 0$ tels que, pour tout entier $N \geq 2$,*

$$\frac{\zeta_1}{\sqrt{r_N}} \leq \gamma_N \leq \zeta_2\sqrt{r_N}.$$

Démonstration du lemme 12.1.
D'aprés la remarque 1, Y_2 possède au moins un élément $\tilde{w}$ non nul ; par conséquent,

pour tout entier $N \geq 2$,

$$0 <\mid \tilde{w} \mid \leq \max\{\mid w \mid,\ w \in Y_N\},$$

ce qui entraîne la minoration suivante de γ_N :

$$\begin{aligned}
\gamma_N &\geq \sqrt{\frac{\mid \tilde{w} \mid}{\max\{\mid z \mid,\ z \in X_N\}}} \\
&\geq \frac{\mid \tilde{w} \mid}{\sqrt{\mid \tilde{w} \mid \max\{\mid z \mid,\ z \in X_N\}}} \\
&\geq \frac{\mid \tilde{w} \mid}{\sqrt{\max\{\mid zw \mid,\ z \in X_N,\ w \in Y_N\}}}.
\end{aligned}$$

D'où la minoration attendue en posant $\zeta_1 =\mid \tilde{w} \mid$.

Toujours d'aprés la remarque 1, X_2 possède au moins un élément $\tilde{z}$ non nul ; par conséquent pour tout entier $N \geq 2$, nous avons

$$0 <\mid \tilde{z} \mid \leq \max\{\mid z \mid,\ z \in X_N\}.$$

Ceci permet de majorer γ_N de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\gamma_N &\leq \sqrt{\frac{\max\{\mid w \mid,\ w \in Y_N\}}{\mid \tilde{z} \mid}} \\
&\leq \frac{\sqrt{\max\{\mid w \mid,\ w \in Y_N\} \mid \tilde{z} \mid}}{\mid \tilde{z} \mid} \\
&\leq \frac{\sqrt{r_N}}{\mid \tilde{z} \mid}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat attendu en posant $\zeta_2 = 1/ \mid \tilde{z} \mid$.

12.2 Une conséquence du théorème 12.1

Théorème 12.2 - *Soient $\alpha,\ \beta,\ \rho,\ k_0,\ c_1,\ c_2$ des nombres réels positifs vérifiant*

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<\frac{1}{\rho}.$$

Soient X et Y deux sous-ensembles de $\mathbb{C}$, K un corps de nombres et f une fonction entière telle que $f(xy)\in K$ pour tout $(x,y)\in X\times Y$.
On suppose que, pour tout nombre réel $R>0$,

$$\begin{array}{ll}(1) & \#X\cap D(0,R)\geq c_1R^{\alpha}\ \textit{et}\ \#Y\cap D(0,R)\geq c_2R^{\beta}\\ (2) & \max\{\log\mid f(u)\mid,\ h(f(u)),\ u\in D(0,R)\}\leq k_0R^{\rho}.\end{array}$$

Alors, f est un polynôme.

Démonstration du théorème 12.2
On construit, par récurrence sur le nombre entier N, deux suites strictement croissantes $(X_N)_{N\geq 1}$ et $(Y_N)_{N\geq 1}$ de sous-ensembles de $\mathbb{C}$, telles que, pour tout nombre entier $N\geq 1$,
1) $X_N\subset X\cap D(0,\ N^{1/\alpha})$ et $Y_N\subset Y\cap D(0,\ N^{1/\beta})$.
2) $\#X_N=k_1N$ et $\#Y_N=k_1N$, avec $k_1=\min\{c_1,c_2\}$.
On applique ensuite le théorème 12.1 avec :

$$\mu_N=k_1N,\ r_N=N^{1/\alpha+1/\beta},\ \theta=(1/\alpha+1/\beta)\rho,\ c_0=\frac{k_0}{k_1^{(1/\alpha+1/\beta)\rho}}$$

et en prenant pour application de $\mathbb{R}_{>0}$ dans $\mathbb{R}_{>0}$:

$$\phi\ :\ x\longmapsto k_0k^{\rho}/(k_1^{(1/\alpha+1/\beta)\rho}).$$

Soient $(z,w)\in X_N\times Y_N$, alors $\mid zw\mid\leq r_N$.
D'aprés (2) on a :

$$\begin{aligned} h(f(zw)) &\leq k_0N^{(1/\alpha+1/\beta)\rho}\\ &\leq \left(\frac{k_0}{k_1^{(1/\alpha+1/\beta)\rho}}\right)\mu_N^{\theta}\\ &\leq c_0\mu_N^{\theta},\end{aligned}$$

et, pour tout nombre réel $k>0$,

$$\begin{aligned} \log\mid f\mid_{kr_N} &\leq k_0(kr_N)^{\rho}\\ &\leq \left(\frac{k_0k^{\rho}}{k_1^{(1/\alpha+1/\beta)\rho}}\right)\mu_N^{\theta}\\ &\leq \phi(k)\mu_N^{\theta}.\end{aligned}$$

Comme par hypothèse $\theta<1$, le théorème 12.1 s'applique et permet de conclure.

12.3 Démonstration du théorème 12.1

Nous notons par la suite D le degré du corps $\mathcal{K}$ sur $\mathbb{Q}$.
Le nombre θ étant strictement inférieur à 1, nous pouvons choisir deux entiers positifs δ et λ vérifiant la condition (C_1) ci-dessous.

$$(C_1) \qquad \theta < 1 - \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\lambda}.$$

12.3.1 Construction de la fonction auxiliaire Φ_N

La première partie de la démonstration consiste en la construction, pour deux entiers positifs δ et λ vérifiant la condition (C_1), et pour un entier $N \geq 1$, d'une fonction auxiliaire s'annulant sur un ensemble $X_N^\delta \times Y_N^\lambda$.

Lemme 12.2 - *Soient S_0, N des entiers ≥ 1 et $\underline{L} = (L_{i,j})_{(1\leq i\leq \delta,\ 1\leq j\leq \lambda)}$ un élément de $\mathbb{N}^{\delta\lambda}$ vérifiant la condition $(\mathcal{I})$:*

$$(\mathcal{I}) \quad L > 2D\mu_N^{\delta+\lambda}, \ \textit{avec}\ L = \prod_{i=1,j=1}^{\delta,\lambda} L_{i,j}.$$

Alors, le système d'équations linéaires

$$(\mathcal{S}) \qquad \sum_{\substack{\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda}\\ \underline{q}<\underline{L}}} a_{\underline{q}}\varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w}) = 0, \ (\underline{z},\underline{w}) \in X_N^\delta \times Y_N^\lambda$$

admet une solution non triviale $(a_{\underline{q}})_{(\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q}\leq\underline{L})} \in \mathbb{Z}^{\delta\lambda}$ telle que :

$$\max\{|\ a_{\underline{q}}\ |,\ \underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q}<\underline{L}\} \leq \sqrt{2}L\exp(2Dc_0\mu_N^\theta\|\underline{L}\|).$$

Démonstration du lemme 12.2
Notations : les nombres d et H.
D'après l'hypothèse (iii) les coefficients $\varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w})$, $\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda}$, $\underline{q}<\underline{L}$, du système d'équations $(\mathcal{S})$, sont des nombres algébriques ; nous définissons le nombre réel H comme le maximum de leurs hauteurs logarithmiques.
Le fait que les coefficients de $(\mathcal{S})$ soient des nombres algébriques entraîne, d'autre part, l'existence de nombres entiers positifs

$$d_{(\underline{z},\underline{w})},\ (\underline{z},\underline{w}) \in X_N^\delta \times Y_N^\lambda,$$

tels que $d_{(\underline{z},\underline{w})}$ soit le plus petit dénominateur commun des L nombres algébriques :

$$\varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w}),\ \underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q}<\underline{L}.$$

Nous notons :

$$d = \max\{d_{(\underline{z},\underline{w})},\ (\underline{z},\underline{w}) \in X_N^\delta \times Y_N^\lambda\}.$$

Application du lemme 11.2
Le système d'équations $(\mathcal{S})$ possède $\mu_N^{\delta+\lambda}$ équations et L inconnues, la condition d'application du lemme 11.2 :

$$\text{Nombre d'inconnues} > 2D \times \text{Nombre d'équations},$$

est donc satisfaite et le système $(\mathcal{S})$ admet une solution $(a_{\underline{q}})_{\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q}<\underline{L}} \in \mathbb{Z}^{\delta\lambda}$ telle que :

$$0 < \max\{\mid a_{\underline{q}} \mid,\ \underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q} < \underline{L}\} \leq \sqrt{2}Ld\exp(DH). \tag{12.1}$$

Il nous faut à présent donner des majorations de d et de H.
Pour cela, nous considérons le polynôme $\mathcal{Q}_{\underline{q}}$ de $\mathbb{Z}[T_{i,j}\ ;\ 1 \leq i \leq \delta,\ 1 \leq j \leq \lambda]$ défini par :

$$\mathcal{Q}_{\underline{q}}(\underline{T}) = \prod_{i=1}^{\delta}\prod_{j=1}^{\lambda} T_{i,j}^{q_{i,j}}.$$

Nous avons :

$$\varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w}) = \mathcal{Q}_{\underline{q}}(f(z_i w_j),\ ;\ 1 \leq i \leq \delta,\ 1 \leq j \leq \lambda),$$

et dans le cas où $\varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w}) \neq 0$ l'inégalité de Liouville (2.1) de la proposition 2.1 nous donne :

$$h\left(\varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w})\right) \leq \log \mid \mathcal{Q}_{\underline{q}} \mid_1 + \sum_{i=1}^{\delta}\sum_{j=1}^{\lambda} q_{i,j} h\left(f(z_i w_j)\right).$$

L'hypothèse (iii) se traduit par

$$h\left(\varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w})\right) \leq c_0 \|\underline{q}\| \mu_N^{\theta}.$$

Nous obtenons finalement

$$H \leq c_0 \|\underline{L}\| \mu_N^{\theta}. \tag{12.2}$$

Pour majorer le nombre d nous considérons un élément $(\underline{z},\underline{w})$ de $X_N^{\delta} \times Y_N^{\lambda}$ et nous utilisons les dénominateurs $\operatorname{den}\left(f(z_i w_j)\right),\ ;\ (1 \leq i \leq \delta,\ 1 \leq j \leq \lambda)$, respectifs des nombres algébriques $f(z_i w_j),\ ;\ (1 \leq i \leq \delta,\ 1 \leq j \leq \lambda)$.
Le nombre

$$\prod_{i=1}^{\delta}\prod_{j=1}^{\lambda} \operatorname{den}\left(f(z_i w_j)\right)^{L_{i,j}} .Q_{\underline{q}}(f(z_i w_j),\ ;\ (1 \leq i \leq \delta,\ 1 \leq j \leq \lambda))$$

est entier sur $\mathbb{Z}$; par conséquent $d_{0,(\underline{z},\underline{w})} = \prod_{i=1}^{\delta}\prod_{j=1}^{\lambda} \operatorname{den}\left(f(z_i w_j)\right)^{L_{i,j}}$ est un dénominateur commun des nombres $\varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w}),\ \underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q} < \underline{L}$.
Or,

$$\operatorname{den}\left(f(z_i w_j)\right) \leq \exp(Dh\left(f(z_i w_j)\right)),\ ;\ (1 \leq i \leq \delta,\ 1 \leq j \leq \lambda).$$

L'hypothèse (iii) nous permet donc d'écrire

$$\begin{aligned} d_{0,(\underline{z},\underline{w})} &\leq \prod_{i=1}^{\delta}\prod_{j=1}^{\lambda} \exp(DL_{i,j} h\left(f(z_i w_j)\right)) \\ &\leq \exp(D\sum_{i=1}^{\delta}\sum_{j=1}^{\lambda} L_{i,j} c_0 \mu_N^{\theta}) \\ &\leq \exp(Dc_0 \mu_N^{\theta} \|\underline{L}\|)\ ; \end{aligned}$$

soit

$$d \leq \exp(Dc_0\mu_N^{\theta}\|\underline{L}\|). \tag{12.3}$$

La conclusion du lemme 12.2 est une conséquence directe des inégalités (12.1), (12.2) et (12.3).

Définition de la fonction auxiliaire Φ_N

Nous définissons par la suite, pour tout entier $N \geq 1$, l'élément $\underline{L}(N) = (L_{i,j}(N))_{(1\leq i\leq \delta,\ 1\leq j\leq \lambda)}$ de $\mathbb{N}^{\delta\lambda}$ par :

$$L_{i,j}(N) = \lceil (2D+1)^{\frac{1}{\delta\lambda}}\mu_N^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}}\rceil + 1,\ (1 \leq i \leq \delta,\ 1 \leq j \leq \lambda).$$

Le produit $L(N) = \prod_{i=1,j=1}^{\delta,\lambda} L_{i,j}(N)$ est supérieur à $(2D+1)\mu_N^{\delta+\lambda}$; la condition $(\mathcal{I})$ du lemme 12.2 est donc vérifiée et le lemme 12.2 nous assure de l'existence d'une solution non triviale $(a_{\underline{q}})_{(\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q}<\underline{L}(N))} \in \mathbb{Z}^{\delta\lambda}$ au système $(\mathcal{S})$, majorée en valeur absolue par le nombre

$$\sqrt{2}L(N)\exp(4c_0D\delta\lambda(2D+1)^{\frac{1}{\delta\lambda}}\mu_N^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}+\theta}).$$

Nous poursuivons la démonstration avec la fonction auxiliaire entière sur $\mathbb{C}^{\delta+\lambda}$:

$$\Phi_N = \sum_{\substack{\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda}\\ \underline{q}<\underline{L}(N)}} a_{\underline{q}}\varphi_{\underline{q}}.$$

12.3.2 Extrapolation

Nous établissons que la fonction auxiliaire Φ_N est nulle sur chacun des produits cartésiens $X_N^{\delta} \times Y_N^{\lambda}$, $(N \geq 1)$.

Considérons pour cela l'ensemble des nombres entiers $M \geq N+1$ vérifiant

$$\Phi_N = 0 \text{ sur } X_{M-1}^{\delta} \times Y_{M-1}^{\lambda}.$$

Cet ensemble n'est pas vide, puisqu'il contient le nombre entier $N+1$. Nous allons supposer qu'il admet un élément maximum $M_0 \geq N$ et montrer que cela nous conduit à une contradiction.

Il existe alors $(\underline{z}_0, \underline{w}_0)$ un élément de $X_{M_0}^{\delta} \times Y_{M_0}^{\lambda}$ tel que le nombre algébrique $\Phi_N(\underline{z}_0, \underline{w}_0)$ soit différent de 0.

A) Majoration.

Nous montrons que le nombre $\log \mid \Phi_N(\underline{z}_0, \underline{w}_0) \mid$ admet une majoration de la forme

$$\log \mid \Phi_N \mid_{c_1 r} \leq k_1\mu_N^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}+\theta}.$$

le nombre réel k_1 étant positif et indépendant de N.

Application du lemme de Schwarz
L'utilisation du lemme 11.3 exige de connaître un majorant des ensembles $\{\mid z \mid , \; z \in X_{M_0-1}\}$ et $\{\mid w \mid, \; w \in Y_{M_0-1}\}$, or nous ne disposons, par l'hypothèse (ii) que d'une majoration des valeurs absolues des produits zw, $x \in X_{M_0-1}$ et $w \in Y_{M_0-1}$, par r_{M_0-1}.
C'est la raison pour laquelle nous commençons par uniformiser les distances à l'origine des ensembles X_{M_0} et Y_{M_0} en les remplaçant respectivement par

$$X^* = \gamma_{M_0} X_{M_0} \text{ et } Y^* = \frac{Y_{M_0}}{\gamma_{M_0}},$$

(le nombre γ_{M_0} a déjà été défini dans la remarque 2 et encadré au lemme 12.1). Nous obtenons alors, pour tout $z^* \in X^*$, $z^* = \gamma_{M_0} z$ et pour tout $w^* \in Y^*$, $w^* = w/\gamma_{M_0}$:

$$\begin{aligned} \mid z^* \mid \quad & \leq \sqrt{\max\{\mid w \mid, \; w \in Y_{M_0}\}} \frac{\mid z \mid}{\sqrt{\max\{\mid z \mid, \; z \in X_{M_0}\}}} \leq \sqrt{r_{M_0}} \\ \text{et} & \\ \mid w^* \mid \quad & \leq \frac{\mid w^* \mid}{\sqrt{\max\{\mid w \mid, \; w \in X_{M_0}\}}} \sqrt{\max\{\mid z \mid, \; z \in X_{M_0}\}} \leq \sqrt{r_{M_0}}. \end{aligned}$$

Cependant,

$$\Phi_N(\underline{z}_0^*, \underline{w}_0^*) \neq 0, \text{ avec } \underline{z}_0^* = \gamma_{M_0} \underline{z}_0, \; \underline{w}_0^* = \underline{w}_0/\gamma_{M_0},$$

et

$$\Phi_N = 0 \;\text{ sur } (X^*_{M_0-1})^\delta \times (Y^*_{M_0-1})^\lambda.$$

Par conséquent le lemme 11.3 donne la majoration suivante :

$$\mid \Phi_N \mid_{\sqrt{r_{M_0}}} \leq \mid \Phi_N \mid_{c_1 e \sqrt{r_{M_0}}} e^{-\mu_{M_0-1}}, \text{ avec } c_1 = 18^{\delta+\lambda}. \tag{12.4}$$

Une majoration de $\log \mid \Phi_N \mid_{c_1 e \sqrt{r_{M_0}}}$
Les coefficients qui définissent la fonction auxiliaire Φ_N sont inférieurs à

$$\sqrt{2} L(N) \exp(4 c_0 D \delta\lambda (2D+1)^{\frac{1}{\delta\lambda}} \mu_N^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}+\theta}),$$

et d'autre part, d'après l'hypothèse (iv)

$$\begin{aligned} \mid \varphi_{\underline{q}} \mid_{c_1 e \sqrt{r_{M_0}}} \quad & \leq \quad \prod_{i=1}^{\delta} \prod_{j=1}^{\lambda} \mid f \mid^{q_{i,j}}_{c_1^2 e^2 r_{M_0}} \\ & \leq \quad \exp(\phi(c_1^2 e^2) \mu_{M_0}^\theta \| \underline{L}(N) \|) \\ & \leq \quad \exp(2\phi(c_1^2 e^2) \delta\lambda (2D+1)^{\frac{1}{\delta\lambda}} \mu_{M_0}^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}+\theta}) \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'existence d'un nombre réel $k_1 > 0$ indépendant de N tel que

$$\log \mid \Phi_N \mid_{c_1 e \sqrt{r_{M_0}}} \leq k_1 \mu_{M_0}^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}+\theta}. \tag{12.5}$$

Une majoration de $\log \mid \Phi_N(\underline{z}_0, \underline{w}_0) \mid$
Il existe donc d'après (12.4) et (12.5) un nombre réel $k_1 > 0$ indépendant de N tel que

$$\log \mid \Phi_N(\underline{z}_0, \underline{w}_0) \mid \leq \log \mid \Phi_N \mid_r \leq k_1 \mu_{M_0}^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}+\theta} - \mu_{M_0-1}. \tag{12.6}$$

B) Minoration.

Nous montrons dans ce paragraphe que le nombre $\log \mid \Phi_N(\underline{z}_0, \underline{w}_0) \mid$ est minoré par une expression de la forme

$$-k_2 \mu_{M_0}^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}+\theta},$$

où le nombre réel k_2 est strictement positif et ne dépend pas de l'entier N.

Mise en oeuvre de l'inégalité de Liouville.
Considérons le polynôme $\mathcal{Q}_N$ de $\mathbb{Z}[T_{i,j}\ ;\ 1 \le i \le \delta,\ 1 \le j \le \lambda]$

$$\mathcal{Q}_N = \sum_{\substack{\underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda} \\ \underline{q} < \underline{L}(N)}} a_{\underline{q}} \mathcal{Q}_{\underline{q}}$$

Nous savons que pour tout $(\underline{z}, \underline{w}) \in \mathbb{C}^{\delta+\lambda}$

$$\Phi(\underline{z}, \underline{w}) = \mathcal{Q}_N(f(z_i w_j)\ ;\ 1 \le i \le \delta,\ 1 \le j \le \lambda)$$

Par conséquent, en posant $\underline{z}_0 = (z_{0,1}, \dots, z_{0,\delta})$ et $\underline{w}_0 = (w_{0,1}, \dots, w_{0,\lambda})$,

$$\mathcal{Q}_N(f(z_{0,i} w_{0,j}))\ ;\ 1 \le i \le \delta,\ 1 \le j \le \lambda) \ne 0,$$

et l'inégalité de Liouville permet d'écrire

$$\begin{aligned} \log \mid \mathcal{Q}_N(f(z_{0,i} w_{0,j}) \quad &; \quad 1 \le i \le \delta,\ 1 \le j \le \lambda) \mid \ge \\ -D \log \mid \mathcal{Q}_N \mid_1 \quad &- \quad D \sum_{i=1,j=1}^{\delta,\lambda} h\left(f(z_{0,i} w_{0,j})\right) \deg_{T_{i,j}} \mathcal{Q}_N. \end{aligned} \tag{12.7}$$

Il ne nous reste plus qu'à majorer $\log \mid \mathcal{Q}_N \mid_1$ et $\deg_{T_{i,j}} \mathcal{Q}_N$.

Une majoration de $\log \mid \mathcal{Q}_N \mid_1$
Nous avons immédiatement

$$\begin{aligned} \mid \mathcal{Q}_N \mid_1 \quad &\le \quad \sum_{\substack{\underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda} \\ \underline{q} < \underline{L}(N))}} \mid a_{\underline{q}} \mid\mid \mathcal{Q}_{\underline{q}} \mid_1 \\ &\le \quad L(N) \max_{\substack{\underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda} \\ \underline{q} < \underline{L}(N))}} \mid a_{\underline{q}} \mid \max_{\substack{\underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda} \\ \underline{q} < \underline{L}(N))}} \mid \mathcal{Q}_{\underline{q}} \mid_1 . \end{aligned}$$

Or, pour tout $\underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda}$ tel que $\underline{q} < \underline{L}(N)$,

$$\mid \mathcal{Q}_{\underline{q}} \mid_1 = 1 \text{ et } \mid a_{\underline{q}} \mid \le \sqrt{2} L \exp\left(4 c_0 D \delta\lambda (2D+1)^{\frac{1}{\delta\lambda}} \mu_N^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}+\theta}\right).$$

Il existe donc un nombre réel $p_1 > 0$ indépendant de N tel que :

$$\log \mid \mathcal{Q}_N \mid_1 \le p_1 \mu_N^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}+\theta}. \tag{12.8}$$

Une majoration de $\deg_{T_{i,j}} \mathcal{Q}_N$
Le polynôme $\mathcal{Q}_N$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des polynômes $\mathcal{Q}_{\underline{q}}$, par conséquent, pour tout couple (i,j), $(1 \leq i,j \leq \delta, \lambda)$,

$$\deg_{T_{i,j}} \mathcal{Q}_N \leq \max\{\deg_{T_{i,j}} \mathcal{Q}_{\underline{q}},\ \underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q} < \underline{L}(N)\}$$

Et nous obtenons

$$\deg_{T_{i,j}} \mathcal{Q}_N \leq (2D+1)^{\frac{1}{\delta\lambda}} \mu_N^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}} \tag{12.9}$$

Une minoration de $\log \mid \Phi_N(\underline{z}_0, \underline{w}_0) \mid$
L'hypothèse (iii) et les inégalités (12.7), (12.8) et (12.9) permettent, en posant :

$$k_2 = D(p_1 + c_0\delta\lambda),$$

d'obtenir :

$$\log \mid \Phi_N(\underline{z}_0, \underline{w}_0) \mid \quad \geq \quad -k_2 \mu_{M_0}^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}+\theta}. \tag{12.10}$$

C) Conclusion

Comme la suite de terme général μ_{M+1}/μ_M est majorée, il existe $\mathcal{M} > 0$ un nombre réel indépendant de N, tel que : $\mu_{M_0} \leq \mathcal{M}\mu_{M_0-1}$ et les inégalités (12.6) et (12.10) impliquent l'existence de nombres réels $k_1,\ k_2 > 0$ indépendants de N tels que :

$$\mu_{M_0-1} \quad \leq \quad (k_1 + k_2)\mu_{M_0}^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}+\theta}.$$

Nous en déduisons l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{\mathcal{M}} \quad \leq \quad (k_1 + k_2)\mu_{M_0}^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}+\theta-1}. \tag{12.11}$$

Or, ceci est impossible si l'entier N est assez grand, puisque les deux entiers δ et λ vérifient la condition (C_1).

12.3.3 Conséquences

Nous montrons que la fonction f est un polynôme
Nous venons de démontrer que la fonction auxiliaire s'annule sur chacun des ensembles $X_M^\delta \times Y_M^\lambda$, $(M \geq N)$, nous pouvons donc appliquer le lemme de Schwarz avec

$$\begin{aligned} m &= 1,\ n = \delta + \lambda,\ S_0 = 1,\ E = e, \\ \mathcal{E}_i &= \gamma_M X_M \text{ pour } 1 \leq i \leq \delta, \\ \mathcal{E}_j &= Y_M/\gamma_M \text{ pour } \delta + 1 \leq i \leq \lambda, \end{aligned}$$

et écrire pour tout entier $M \geq 1$,

$$\begin{aligned} \log \mid \Phi_N \mid_{\sqrt{r_{M+1}}} &\leq k_1 \mu_{M+1}^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}+\theta} - \mu_M \\ &\leq k_1 \mathcal{M}^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}+\theta} \mu_M^{\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}+\theta} - \mu_M. \end{aligned}$$

La constante k_1 étant celle déjà donnée dans l'inégalité (14.6).

Or, les suites $(r_N)_{N\geq 1}$ et $(\mu_N)_{N\geq 1}$ tendent vers $+\infty$, et

$$\theta + \frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda} < 1,$$

la fonction Φ_N est donc identiquement nulle sur $\mathbb{C}^{\delta+\lambda}$ et les fonctions

$$f_{i,j}, (1 \leq i \leq \delta,\ (1 \leq j \leq \lambda)$$

sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{C}$.
Le lemme 11.5 de Bézivin permet d'en conclure que la fonction f est un polynôme.

12.4 Dépendance algébrique et ordre de croissance

Nous énonçons un deuxième critère de transcendance qui, cette fois, fait intervenir l'ordre de croissance de la fonction entière f.

Théorème 12.3 - *Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$ d'ordre de croissance $\leq \varrho$, $(X_N)_{N\geq 1}$, $(Y_N)_{N\geq 1}$ deux suites strictement croissantes de sous-ensembles finis de $\mathbb{C}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des nombres complexes algébriques, $(u_N, r_N, \mu_N)_{N\geq 1}$ une suite d'éléments de $(\mathbb{R}_{>0})^3$ et $\mathcal{M}$ un nombre réel > 0.*
On suppose que la suite $(\frac{\mu_{N+1}}{\mu_N})_{N\geq 2}$ est majorée et que, pour chaque entier $N \geq 1$, les conditions suivantes sont vérifiées.

(i) $\#X_N = \#Y_N = \mu_N$.

(ii) $\max\{\mid zw \mid,\ (z,w) \in X_N \times Y_N\} \leq r_N$ *et* $\lim_{n\to+\infty} r_N = +\infty$.

(iii)′ Pour tout entier $N \geq 1$ et tout $(z,w) \in X_N \times Y_N$, il existe un polynôme $Q_{(z,w)} \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_r]$ tel que :

$$f(zw) = Q_{(z,w)}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \text{ et } \chi(Q_{(z,w)}) \leq u_N.$$

(iv)′ Il existe des entiers $\delta \geq 1, \lambda \geq 1$ tels que :

$$\max\{u_N, r_N^{\varrho}\} \leq \mathcal{M}\mu_N^{1-\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}}.$$

Alors la fonction f est un polynôme.

Remarques
1) Comme $\mu_3 \geq 2$, il existe $z_0 \in X_3$ et $w_0 \in Y_3$ tels que $z_0 \neq 0$ et $w_0 \neq 0$. Le nombre $k_0 =\mid z_0 w_0 \mid$ est donc un minorant strictement positif de r_N, pour tout entier $N \geq 3$.
2) Nous savons, f n'étant pas constante, que, pour tout $(z,w) \in X_N \times Y_N$, il existe un nombre entier n tel que $f^{(n)}(zw) \neq 0$ et $\chi(Q_{(z,w),n}) \neq 0$.
Nous venons de montrer que $u_N \geq 1$, pour tout entier $N \geq 1$.
3) On déduit des remarques 1) et 2) que le nombre $\theta = 1 - \frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}$ vérifie la condition du théorème 1 : $0 < \theta < 1$.

12.4.1 Démonstration du théorème 12.3

Il nous suffit donc de montrer que les conditions (iii)′ et (iv)′ du théorème 12.3, impliquent les conditions (iii) et (iv) du théorème 12.1.
Supposons donc (iii)′ et (iv)′ satisfaites.
Nous posons par la suite

$$h_0 = \sum_{k=1}^{r} h(\alpha_k) + 1.$$

Supposons $(z,w) \in X_N \times Y_N$ et $f(zw) \neq 0$; nous pouvons alors appliquer l'inégalité de Liouville au polynôme $Q_{(z,w)}$ au point $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ de $\overline{\mathbb{Q}}^r$.
Nous obtenons :

$$\begin{aligned} h\left(f(zw)\right) &\leq \log \mid Q_{(z,w)} \mid_1 + \sup\{\deg_{T_k} Q_{(z,w)},\ 1 \leq k \leq r\} h_0 \\ &\leq \chi(Q_{(z,w)}) h_0. \end{aligned}$$

et par conséquent d'après (iv)$'$

$$h\left(f(zw)\right) \;\leq\; h_0\mathcal{M}\mu_N^{1-\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}}. \tag{12.12}$$

La fonction f étant supposée d'ordre de croissance $\leq \varrho$, il existe deux nombres réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\mid f \mid_R \leq \beta \exp(\alpha R^{\varrho}), \text{ pour tout } R \in \mathbb{R}_{>0},$$

ce qui implique, pour tout nombre entier $N \geq 1$ tel que $r_N \geq 1$ et tout nombre réel k,

$$\log \mid f \mid_{kr_N} \leq (\mid \log \beta \mid + \alpha k^{\varrho}) r_N^{\varrho}.$$

Nous avons donc d'aprés (iv)$'$

$$\log \mid f \mid_{c_1^2 e^2 r_N} \leq (\mid \log \beta \mid + \alpha k^{\varrho}) \mathcal{M}\mu_N^{1-\frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}}. \tag{12.13}$$

Les hypothèses (iii) et (iv) sont donc satisfaites et le théorème 12.1 s'applique avec $\theta = 1 - \frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}$.

12.5 Le théorème des six exponentielles

Les premières démonstrations du théorème des six exponentielles énoncé ci-dessous, sont dû à Lang (cf. [Lang66]) et à Ramachandra (cf. [Ram68]).

Théorème 12.4 - *Soient ℓ et d deux entiers positifs satisfaisant $d\ell > d + \ell$. Soient $x_1, \ldots, x_d$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et soient $y_1, \ldots, y_\ell$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors l'un au moins des $d\ell$ nombres $\exp(x_i y_j)$, $(1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq \ell)$ est transcendant.*

Remarque
L'appellation du théorème provient de l'hypothèse $d\ell > d+\ell$ sur les nombres entiers d et ℓ, que l'on peut encore écrire $(d-1)(\ell-1) \geq 2$, ce qui équivaut à $d \geq 3$ et $\ell \geq 2$ (ou bien l'inverse). Le cas limite est donc celui où l'on obtient une liste de six exponentielles. Si $d = 1$ (ou bien $\ell = 1$) la conclusion du théorème n'est manifestement pas toujours vérifiée, et si $d = 2$ et $\ell = 2$, c'est à dire si $d\ell = d + \ell$, nous obtenons *la conjecture des quatre exponentielles*, formulée par Lang dans (cf. [Lang66], Chap.2, \$1) et non démontrée à ce jour.

12.5.1 Une démonstration du théorème 12.4

Supposons qu'il existe des nombres complexes $x_1, \ldots, x_d$ et $y_1, \ldots, y_\ell$ vérifiant les conditions d'indépendances linéaire du théorème 2 et tels que tous les nombres

$$\alpha_{i,j} = \exp(x_i y_j), \ (1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq \ell)$$

soient algébriques. Nous appliquons le théorème 2 avec pour fonction non polynômiale $f = \exp$ d'ordre $\varrho = 1$, et les ensembles

$$\begin{aligned} X_N &= \{t_1 x_1 + \cdots + t_d x_d,\ \underline{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{N}^d,\ 0 \leq t_k \leq N^{\ell},\ (1 \leq k \leq d)\}. \\ Y_N &= \{s_1 y_1 + \cdots + s_\ell y_\ell,\ \underline{s} = (s_1, \ldots, s_\ell) \in \mathbb{N}^{\ell},\ 0 \leq s_p \leq N^d,\ (1 \leq p \leq \ell)\}. \end{aligned}$$

Nous avons
$$\mu_N = \#X_N = \#Y_N = N^{d\ell},\ (N \geq 1),$$
ce qui montre que la condition (i) est satisfaite, ainsi que la condition (iii) en prenant $\mathcal{M}_0 = 2^{d\ell}$ car
$$\frac{(N+1)^{d\ell}}{N^{d\ell}} \leq \frac{(2N)^{d\ell}}{N^{d\ell}} \leq 2^{d\ell}.$$
La condition (ii) est elle aussi satisfaite pour
$$r(N) = c_1 N^{d+\ell},\ \text{avec } c_1 = \sum_{k=1}^{d}\sum_{p=1}^{\ell} \mid x_k y_p \mid .$$
Pour vérifier les conditions $(\text{iii})'$ et $(\text{iv})'$, nous calculons $\exp(zw)$ avec
$$(z,w) \in X_N \times Y_N,\ z = t_1x_1 + \cdots + t_dx_d,\ w = s_1y_1 + \cdots + s_\ell y_\ell.$$
Nous obtenons
$$\exp(zw) = \prod_{i=1,j=1}^{d,\ell} \alpha_{i,j}^{t_is_j}.$$
Le polynôme $Q_{(z,w)}$ de $\mathbb{Z}[T_{i,j},\ 1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq \ell]$ qui correspond à l'élément (z,w) de $X_N \times Y_N$ est donc défini par
$$Q_{(z,w)} = \prod_{i=1,j=1}^{d,\ell} T_{i,j}^{t_is_j},\ \text{avec } \chi(Q_{(z,w)}) \leq N^{d+\ell}.$$
Nous utilisons donc la suite $(u_N)_{N\geq 1}$ définie par $u_N = N^{d+\ell}$, $(N \geq 1)$.

Il nous suffit enfin, pour établir l'hypothèse $(\text{iv})'$, de remarquer qu'il existe des entiers $\delta \geq 1$ et $\lambda \geq 1$ tels que
$$d + \ell < d\ell(1 - \frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda}).$$
En effet, cette inégalité équivaut à
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{\ell} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\lambda} < 1,$$
et nous avons supposé
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{\ell} < 1.$$

◇◇◇◇◇

Chapitre 13

Introduction de dérivées partielles

13.1 Le résultat principal

Théorème 13.1 - *Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{K}$ un corps de nombres, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des nombres algébriques contenus dans $\mathcal{K}$, $(X_N)_{N\geq 1}$, $(Y_N)_{N\geq 1}$ deux suites strictement croissantes de sous-ensembles finis de $\mathbb{C}$, ϕ une application de $\mathbb{R}_{>0}$ dans $\mathbb{R}_{>0}$, $(r_N, \mu_N)_{N\geq 1}$ une suite d'éléments de $(\mathbb{R}_{>0})^2$ et θ, θ_1, c_0, $\mathcal{M}$ des nombres réels strictement positifs, avec $\theta_1 < 1$. On suppose que la suite $(\frac{\mu_{N+1}}{\mu_N})_{N\geq 2}$ est majorée par $\mathcal{M}$ et que, pour chaque entier $N \geq 1$, les conditions suivantes sont vérifiées.*

(i) $\#X_N = \#Y_N = \mu_N$.

(ii) $\max\{| zw |, \ (z, w) \in X_N \times Y_N\} \leq r_N \leq \exp(c_0\mu_N^{\theta_1})$.

(iii) Pour tout $z \in X_N$, $z \in \mathcal{K}$ et $h(z) \leq c_0\mu_N^{\theta_1}$.

(iv) Pour tout $(z, w) \in X_N \times Y_N$, et tout entier $n \geq 0$, il existe un polynôme $Q_{(z,w),n} \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_r]$ tel que :

$$f^{(n)}(zw) = Q_{(z,w),n}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \ \textit{et} \ \chi(Q_{(z,w),n}) \leq c_0\mu_N^{\theta}.$$

(v) $\log | f |_{kr_N} \leq \phi(k)\mu_N^{\theta}$, $(k \in \mathbb{R}_{>0})$.

Alors la fonction f est un polynôme.

13.2 Démonstration du théorème 13.1

Nous posons par la suite

$$h_0 = \sum_{k=1}^{r} h(\alpha_k) + 1,$$

et nous supposons que la fonction f n'est pas constante car sinon la conclusion du théorème 13.1 est trivialement vérifiée.

Remarques.

1) Il existe des nombres entiers $\delta \geq 1$,$\lambda \geq 1$ et un nombre réel $\theta_0 > 0$ vérifiant la condition (C_1)

$$(C_1) \qquad \theta < 1 - \frac{\delta+\lambda}{\delta\lambda} + \theta_0(1-\frac{1}{\delta}).$$

(Il suffit par exemple de choisir $\theta_0 = 3\theta$ et $\delta = 2,\ \lambda = 3$.)
2) Nous avons déjà démontré, dans la remarque 1 qui suit le théorème 12.1, l'existence de k_0 un minorant strictement positif de r_N, pour tout entier $N \geq 2$.

13.2.1 Première étape : la fonction auxiliaire Φ_N

Considérons des nombres entiers δ et λ et un nombre réel θ_0 vérifiant la condition (C_1). Nous construisons une fonction Φ_N s'annulant sur $X_N^\delta \times Y_N^\lambda$ avec une multiplicité donnée.

Lemme 13.1 - *Soient S_0, N des entiers ≥ 1 et $\underline{L} = (L_{i,j})_{(1\leq i\leq\delta,\ 1\leq j\leq\lambda)}$ un élément de $\mathbb{N}^{\delta\lambda}$ vérifiant la condition $(\mathcal{I})$:*

$$(\mathcal{I}) \quad L > 2DS_0^\lambda \mu_N^{\delta+\lambda},\ \textit{avec}\ L = \prod_{i=1,j=1}^{\delta,\lambda} L_{i,j}.$$

Alors, le système d'équations linéaires

$$(\mathcal{S}) \qquad \sum_{\substack{\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda} \\ \underline{q}<\underline{L}}} a_{\underline{q}} \mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}} \varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w}) = 0,\ (\underline{z},\underline{w}) \in X_N^\delta \times Y_N^\lambda, \underline{\sigma} \in \mathbb{N}^\lambda, |\ \underline{\sigma}\ | < S_0,$$

admet une solution non triviale $(a_{\underline{q}})_{(\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q}<\underline{L})} \in \mathbb{Z}^{\delta\lambda}$ telle que :

$$\max_{\substack{\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda} \\ \underline{q}<\underline{L}}} |\ a_{\underline{q}}\ | \leq \sqrt{2}L\exp(2c_0D\delta\lambda^2S_0\mu_N^{\theta_1} + 2c_0Dh_0\|\underline{L}\|\mu_N^\theta + \lambda S_0\log\|\underline{L}\|).$$

Démonstration du lemme 13.1

Notations : Hauteurs et dénominateurs des coefficients

D'aprés les hypothèses (iii) et (iv) et le lemme 11.4, les coefficients du système d'équations $(\mathcal{S})$ sont des nombres algébriques. Nous définissons le nombre réel H comme le maximum de leurs hauteurs logarithmiques.
Le fait que les coefficients de $(\mathcal{S})$ soient des nombres algébriques entraîne, d'autre part, l'existence de nombres entiers positifs

$$d_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{\sigma}},\ (\underline{z},\underline{w}) \in X_N^\delta \times Y_N^\lambda,\ \underline{\sigma} \in \mathbb{N}^\lambda, |\ \underline{\sigma}\ | < S_0,$$

tels que $d_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{\sigma}}$ soit le plus petit dénominateur commun des L nombres algébriques :

$$\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}} \varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w}),\ \underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q} < \underline{L}.$$

Nous notons :

$$d = \sup\{d_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{\sigma}},\ (\underline{z},\underline{w}) \in X_N^\delta \times Y_N^\lambda,\ \underline{\sigma} \in \mathbb{N}^\lambda, \mid \underline{\sigma} \mid < S_0\}.$$

Application du lemme 11.2
Le système d'équations $(\mathcal{S})$ possède $S_0^\lambda \mu_N^{\delta+\lambda}$ équations et L inconnues, la condition d'application du lemme 13.2 :

$$\text{Nombre d'inconnues} > 2D \times \text{Nombre d'équations},$$

est donc satisfaite et $(\mathcal{S})$ admet, d'après le lemme 11.2, une solution

$$(a_{\underline{q}})_{(\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q}<\underline{L})} \in \mathbb{Z}^{\delta\lambda}$$

telle que :

$$0 < \max\{\mid a_{\underline{q}} \mid,\ \underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q} < \underline{L})\} \leq \sqrt{2} L d \exp(DH).$$

Majorations de d et de H
Soient

$$(\underline{z},\underline{w}) \in X_N^\delta \times Y_N^\lambda,\ \underline{\sigma} \in \mathbb{N}^\lambda,\ \underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q} < \underline{L}.$$

Nous considérons le polynôme $\mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}}$ de $\mathbb{Z}[U_1,\ldots,U_\delta,T_1,\ldots,T_r]$, définit, en posant $\underline{U} = (U_1,\ldots,U_\delta)$ et $\underline{T} = (T_1,\ldots,T_r)$, par :

$$\mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}}(\underline{U},\underline{T}) = \prod_{j=1}^{\lambda} \sum_{\substack{\underline{\nu}_j=(\nu_j^{(1)},\ldots,\nu_j^{(\delta)})\in\mathbb{N}^\delta \\ \|\underline{\nu}_j\|=\sigma_j}} \left(\prod_{i=1}^{\delta} U_i^{\sigma_j^{(i)}}\right) \binom{\sigma_j}{\underline{\nu}_j} \prod_{k=1}^{\delta} \mathcal{R}_{k,\underline{\nu}_j},$$

avec :

$$\mathcal{R}_{k,\underline{\nu}_j} = \sum_{\substack{\underline{\tau}_k=(\tau_k^{(1)},\ldots,\tau_k^{(q_{k,j})})\in\mathbb{N}^{q_{k,j}} \\ \|\underline{\tau}_k\|=\nu_j^{(k)}}} \binom{\nu_j^{(k)}}{\underline{\tau}_k} \prod_{p=1}^{q_{k,j}} Q_{(z_k,w_j),\tau_k^{(p)}}(\underline{T}).$$

Le lemme 11.4 permet d'écrire,

$$\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}} \varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w}) = \mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}}(\underline{z},\underline{\alpha}). \tag{13.1}$$

a) Une majoration de $\log \mid \mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}} \mid_1$ **.**
Nous avons, d'aprés les majorations $\mid Q_{(z_k,w_j),\tau_k^{(p)}} \mid_1 \leq \exp(c_0\mu_N^\theta)$,

$$\begin{aligned}
\mid \mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}} \mid_1 \quad &\leq \quad \prod_{j=1}^{\lambda} \sum_{\|\underline{\nu}_j\|=\sigma_j} \binom{\sigma_j}{\underline{\nu}_j} \prod_{k=1}^{\delta} \sum_{\|\underline{\tau}_k\|=\nu_j^{(k)}} \binom{\nu_j^{(k)}}{\underline{\tau}_k} \exp(c_0\mu_N^\theta q_{k,j}) \\
&\leq \quad \exp(c_0\mu_N^\theta \|\underline{L}\|) \prod_{j=1}^{\lambda} (q_{1,j} + \cdots + q_{\delta,j})^{\sigma_j}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\log \mid \mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}} \mid_1 \leq \lambda S_0 \log \|\underline{L}\| + c_0\mu_N^\theta \|\underline{L}\|. \tag{13.2}$$

b) Une majoration des degrés de $\mathcal{Q}_{\underline{q},\underline{\sigma}}$.
Pour tout nombre entier p, $1 \leq p \leq \delta$,

$$\begin{aligned}
\deg_{U_p} \mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}} &\leq \deg_{U_p} \prod_{j=1}^{\lambda} \sum_{\substack{\underline{\nu}_j=(\nu_j^{(1)},\ldots,\nu_j^{(\delta)})\in\mathbb{N}^\delta \\ \|\underline{\nu}_j\|=\sigma_j}} \prod_{i=1}^{\delta} U_i^{\nu_j^{(i)}} \\
&\leq \max\left\{\sum_{j=1}^{\lambda} \nu_j^{(i)},\ \underline{\nu}_j = (\nu_j^{(1)},\ldots,\nu_j^{(\delta)}) \in \mathbb{N}^\delta,\ \|\underline{\nu}_j\| = \sigma_j\right\} \\
&\leq \lambda^2 S_0. \qquad (13.3)
\end{aligned}$$

et, d'autre part, pour $1 \leq k \leq r$,

$$\deg_{T_k} \mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}} \leq c_0\|\underline{L}\|\mu_N^{\theta}. \qquad (13.4)$$

c) Utilisation des inégalités de Liouville lorsque $\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}}\varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w}) \neq 0$.
Si $\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}}\varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w}) \neq 0$, il est possible, d'aprés les égalités (13.1), d'appliquer au polynôme $\mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}}$ les inégalités de Liouville au point $(\underline{z},\underline{\alpha})$ de $\overline{\mathbb{Q}}^{\delta+r}$.
Nous obtenons, en utilisant les hypothèses (iii) et (vi) et les inégalités (13.2), (13.3) et (13.4),

$$\begin{aligned}
h(\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}}\varphi_{\underline{q}}(\underline{z},\underline{w})) &\leq \log \mid \mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}} \mid_1 + \sum_{p=1}^{\delta} \deg_{U_p} \mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}} h(z_p) \\
&+ \sum_{k=1}^{r} \deg_{T_k} \mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}} h(\alpha_k)) \\
&\leq \lambda S_0 \log\|\underline{L}\| + c_0\mu_N^{\theta}\|\underline{L}\| + c_0\delta\lambda^2 S_0\mu_N^{\theta_1} \\
&+ c_0 h_0 \mu_N^{\theta}\|\underline{L}\|.
\end{aligned}$$

Nous majorons le nombre d en introduisant les dénominateurs respectifs des nombres algébriques $z_1,\ldots,z_\delta,\alpha_1,\ldots,\alpha_r$, en remarquant que le nombre

$$\prod_{p=1}^{\delta} \mathrm{den}(z_p)^{\deg_{U_p} \mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}}} \prod_{k=1}^{r} \mathrm{den}(\alpha_k)^{\deg_{T_k} \mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}}} \times \mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}}(\underline{z},\underline{w})$$

est entier sur $\mathbb{Z}$.
Or, d'aprés les hypothèses (iii), (vi) et les inégalités (13.3), (13.4)

$$\begin{aligned}
\sup\{d_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}},\ (\underline{z},\underline{w}) \in X_N^{\delta} \times Y_N^{\lambda},\ \underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q} < \underline{L}),\ \underline{\sigma} \in \mathbb{N}^{\lambda}, \mid \underline{\sigma} \mid < S_0\} \\
\leq \exp\left(c_0 D\delta\lambda^2 S_0\mu_N^{\theta_1} + Dc_0h_0\|\underline{L}\|\mu_N^{\theta}\right).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons l'énoncé suivant :

Lemme 13.2 - *Les nombres H et d admettent les majorations suivantes.*

$$\begin{aligned}
H &\leq \lambda S_0 \log\|\underline{L}\| + c_0\mu_N^{\theta}\|\underline{L}\| + c_0\delta\lambda^2 S_0\mu_N^{\theta_1} + c_0h_0\mu_N^{\theta}\|\underline{L}\|. \\
d &\leq \exp\left(c_0 D\delta\lambda^2 S_0\mu_N^{\theta_1} + c_0Dh_0\|\underline{L}\|\mu_N^{\theta}\right).
\end{aligned}$$

Définition de la fonction auxiliaire Φ_N Nous définissons par la suite, pour tout entier $N \geq 3$, l'entier $S_0(N)$ et l'élément $\underline{L}(N) = (L_{i,j}(N))_{(1\leq i\leq \delta,\ 1\leq j\leq \lambda)}$ de $\mathbb{N}^{\delta\lambda}$ par :

$$S_0(N) = \lceil \mu_N^{\theta_0} \rceil \text{ et } L_{i,j}(N) = \lceil (2D+1)^{\frac{1}{\delta\lambda}} \mu_N^{\frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}} \rceil + 1, (1 \leq i \leq \delta,\ 1 \leq j \leq \lambda).$$

Le produit $L(N) = \prod_{i=1,j=1}^{\delta,\lambda} L_{i,j}(N)$ est supérieur ou égal à $(2D+1)\mu_N^{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}$ et la condition $(\mathcal{I})$ du lemme 15.1 est vérifiée si :

$$(2D+1)\mu_N^{\delta+\lambda+\theta_0\lambda} > 2D\mu_N^{\delta+\lambda+\theta_0\lambda},$$

ce qui équivaut à :

$$2D+1 > 2D.$$

La condition $(\mathcal{I})$ est donc satisfaite, et le lemme 13.1 nous assure de l'existence d'une solution non triviale $(a_{\underline{q}})_{\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q}<\underline{L}(N))} \in \mathbb{Z}^{\delta\lambda}$ au système $(\mathcal{S})$, majorée en valeur absolue par un nombre de la forme

$$\exp\left(k_1\mu_N^{\theta_0+\theta_1} + k_2\mu_N^{\theta+\frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}}\right),$$

avec k_1 et k_2 qui sont deux nombres réels strictement positifs indépendants du choix de l'entier N.
Nous poursuivons la démonstration avec la fonction auxiliaire entière sur $\mathbb{C}^{\delta+\lambda}$, définie par

$$\Phi_N = \sum_{\substack{\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda} \\ \underline{q}<\underline{L}(N)}} a_{\underline{q}}\varphi_{\underline{q}}.$$

Remarques.
3) Nous prendrons $N \geq 3$ de façon à pouvoir minorer r_N par une constante $k_0 > 0$.
4) Les coefficients $(a_{\underline{q}})_{(\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda}(\underline{L}(N))}$ qui définissent la fonction auxiliaire Φ_N ne sont pas tous nuls et nous savons de plus d'après le lemme 11.5 de Bézivin que les fonctions $\varphi_{\underline{q}}$, $(\underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda},\ \underline{q} < \underline{L}(N))$, sont linéairement indépendantes, la fonction Φ_N n'est donc pas identiquement nulle sur $\mathbb{C}^{\delta+\lambda}$.

13.2.2 Deuxième étape : Extrapolation

Considérons l'ensemble des nombres entiers $M \geq N+1$ vérifiant

$$\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}}\Phi_N = 0 \text{ sur } X_{M-1}^{\delta} \times Y_{M-1}^{\lambda}, \text{ pour tout } \underline{\sigma} \in \mathbb{N}^{\lambda},\ \mid \underline{\sigma} \mid < S_0(M-1).$$

Cet ensemble n'est pas vide, puisqu'il contient le nombre entier $N+1$, et il admet un élément maximum M_0, car nous avons montré que la fonction Φ_N n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{C}^{\delta+\lambda}$.
Il existe donc $(\underline{z}_0, \underline{w}_0) \in X_{M_0}^{\delta} \times Y_{M_0}^{\lambda}$ et $\underline{\sigma}_0 \in \mathbb{N}^{\lambda}$, $\mid \underline{\sigma}_0 \mid < S_0(M_0)$, tels que le nombre algébrique $\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0}\Phi_N(\underline{z}_0, \underline{w}_0)$ soit différent de 0.

13.2.3 Troisième étape : Majoration

Nous montrons que le nombre $\log \mid \mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0}\Phi_N(\underline{z}_0, \underline{w}_0) \mid$ admet une majoration de la forme

$$\log \mid \mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0}\Phi_N(\underline{z}_0, \underline{w}_0) \mid \quad \leq \quad \ell_1 \left(\mu_{M_0}^{\theta + \frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}} + \mu_{M_0}^{\theta_0+\theta_1} \right) - \mu_{M_0-1}^{\theta_0+1}. \tag{13.5}$$

le nombre réel ℓ_1 étant strictement positif et indépendant de N.

Utilisation du lemme de Schwarz. L'utilisation du lemme 11.3 exige de connaître un majorant des ensembles $\{\mid z \mid,\ z \in X_{M_0-1}\}$ et $\{\mid w \mid,\ w \in Y_{M_0-1}\}$, or nous ne disposons, par l'hypothèse (ii) que d'une majoration des valeurs absolues des produits zw, $x \in X_{M_0-1}$ et $w \in Y_{M_0-1}$, par r_{M_0-1}.
C'est la raison pour laquelle nous commençons par uniformiser les distances à l'origine des ensembles X_{M_0} et Y_{M_0} en les remplaçant respectivement par

$$X^* = \gamma_{M_0} X_{M_0} \text{ et } Y^* = \frac{Y_{M_0}}{\gamma_{M_0}},$$

(le nombre γ_{M_0} a déjà été défini dans la remarque 2, § 12.3.2).

Nous obtenons, comme au chapitre 2, pour tout $z^* \in X^*$, $z^* = \gamma_{M_0} z$ et pour tout $w^* \in Y^*$, $w^* = w/\gamma_{M_0}$,

$$\mid z^* \mid \leq \sqrt{r_{M_0}} \text{ et } \mid w^* \mid \leq \sqrt{r_{M_0}}.$$

D'après le corollaire 11.1 : $\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0}\Phi_N(\underline{z}_0^*, \underline{w}_0^*) \neq 0$, avec
$\underline{z}_0^* = \gamma_{M_0}\underline{z}_0$, $\underline{w}_0^* = \underline{w}_0/\gamma_{M_0}$, et :

$$\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}}\Phi_N = 0 \ \text{ sur } (X_{M_0-1}^*)^\delta \times (Y_{M_0-1}^*)^\lambda, \text{ pour tout } \underline{\sigma} \in \mathbb{N}^\lambda,\ \mid \underline{\sigma} \mid < S_0(M_0-1),$$

Cela nous permet d'appliquer le lemme 11.3 avec

$$\begin{aligned} m \ &= \delta + 1 \text{ et } n = \delta + \lambda,\ E = e \\ r \ &= \sqrt{r_{M_0}}, \\ \mathcal{E}_i \ &= X_{M_0-1}^* \text{ pour } 1 \leq i \leq \delta, \\ \mathcal{E}_j \ &= Y_{M_0-1}^* \text{ pour } \delta + 1 \leq i \leq \lambda. \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\mid \Phi_N \mid_{2r} \leq \mid \Phi_N \mid_{2c_1 er} e^{-S_0(M_0-1)\mu_{M_0-1}}, \text{ avec } c_1 = \lambda 18^\lambda, \tag{13.6}$$

Utilisons les inégalités de Cauchy en remarquant :

$$\underline{\sigma}_0! \leq (S_0(M_0))^{\lambda S_0(M_0)},\ \|\underline{\sigma}_0\| \leq \lambda S_0(M_0) \text{ et } r \geq \sqrt{k_0},$$

nous obtenons une première majoration de $\mid \mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0}\Phi_N(\underline{z}_0^*, \underline{w}_0^*) \mid$:

$$\begin{aligned} \mid \mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0}\Phi_N(\underline{z}_0^*, \underline{w}_0^*) \mid \quad &\leq \quad \frac{\mid \Phi_N \mid_{2r} \underline{\sigma}_0!}{\sqrt{k_0}^{\|\underline{\sigma}_0\|}} \\ &\leq \quad \frac{\mid \Phi_N \mid_{2r} (S_0(M_0))^{\lambda S_0(M_0)}}{\sqrt{k_0}^{\|\underline{\sigma}_0\|}} \end{aligned}$$

Et d'aprés l'inégalité (13.6)

$$|\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0}\Phi_N(\underline{z}_0^*,\underline{w}_0^*)| \leq \frac{|\Phi_N|_{2c_1er}\ (S_0(M_0))^{\lambda S_0(M_0)}e^{-S_0(M_0-1)\mu_{M_0-1}}}{\sqrt{k_0}^{\|\underline{\sigma}_0\|}}. \tag{13.7}$$

Une majoration de $\log|\Phi_N|_{2c_1er}$. Nous pouvons écrire

$$|f_{i,j}|_R \leq |f|_{R^2},\ (R\in\mathbb{R}_{>0}),$$

par conséquent, pour chaque $\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda}(\underline{L}(N))$,

$$\begin{aligned}|\varphi_{\underline{q}}|_{2c_1er} &\leq |f|_{(2c_1er)^2}^{\|\underline{q}\|}.\\ &\leq |f|_{(2c_1e)^2r_N}^{\|\underline{q}\|}.\\ &\leq \phi(4c_1^2e^2)^{\|\underline{L}(N)\|}\exp(c_0\mu_{M_0}^{\theta}\|\underline{L}(M_0)\|).\end{aligned}$$

Or,

$$|\Phi_N|_{c_1er} \leq \sum_{\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda}(\underline{L}(N))}|a_{\underline{q}}||\varphi_{\underline{q}}|_{c_1er},$$

et

$$|a_{\underline{q}}| \leq \exp\left(k_1\mu_{M_0}^{\theta_0+\theta_1}+k_2\mu_{M_0}^{\theta+\frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}}\right).$$

Nous pouvons donc majorer $|\Phi_N|_{c_1er}$ par

$$L(M_0)\phi(4c_1^2e^2)^{\|\underline{L}(N)\|}\exp\left(k_1\mu_{M_0}^{\theta_0+\theta_1}+k_2\mu_{M_0}^{\theta+\frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}}+c_0\mu_{M_0}^{\theta}\|\underline{L}(M_0)\|\right)$$

Il existe donc deux nombres réels strictement positifs k_3 et k_4 indépendants du choix de N tel que :

$$\log|\Phi_N|_{c_1er} \leq k_3\mu_{M_0}^{\theta+\theta_1}+k_4\mu_{M_0}^{\theta+\frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}}. \tag{13.8}$$

Une majoration de $\log|\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0}\Phi_N(\underline{z}_0,\underline{w}_0)|$. D'aprés le corollaire 11.1 nous savons que :

$$|\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0}\Phi_N(\underline{z}_0,\underline{w}_0)| = \gamma_{M_0}^{-\|\underline{\sigma}_0\|}|\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0}\Phi_N(\underline{z}_0^*,\underline{w}_0^*)|.$$

et le lemme 12.1 permet d'écrire, pour un nombre réel $\zeta_1>0$,

$$\frac{\zeta_1}{\sqrt{r_{M_0}}} \leq \gamma_{M_0},$$

ce qui entraîne :

$$\log(\gamma_{M_0}^{-\|\underline{\sigma}_0\|}) \leq \frac{\lambda S_0(M_0)}{2}\log r_{M_0}-\lambda S_0(M_0)\log\zeta_1.$$

Les inégalités (13.7) et (13.8) permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
&\log \mid \mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0}\Phi_N(\underline{z}_0,\underline{w}_0) \mid \leq k_3\mu_{M_0}^{\theta_0+\theta_1} + k_4\mu_{M_0}^{\theta+\frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}} \\
&+\lambda\mu_{M_0}^{\theta_0}\left(\mid \frac{\log k_0}{2} \mid + \frac{\log r_{M_0}}{2} + \mid \log\zeta_1 \mid + \log\|\underline{L}(M_0)\|\right) \\
&-\mu_{M_0-1}^{\theta_0+1}. \qquad (13.9)
\end{aligned}$$

L'hypothèse (ii) permet d'écrire $\log r_{M_0} \leq \mu_N^{\theta_1}$. On peut donc déduire de l'inégalité (13.9) l'existence d'un nombre réel $\ell_1 > 0$ indépendant de N, tel que :

$$\log \mid \mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0}\Phi_N(\underline{z}_0,\underline{w}_0) \mid \;\leq\; \ell_1\left(\mu_{M_0}^{\theta+\frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}} + \mu_{M_0}^{\theta_0+\theta_1}\right) - \mu_{M_0-1}^{\theta_0+1}.$$

13.2.4 Quatrième étape : Minoration

Nous montrons dans ce paragraphe que le nombre $\log \mid \mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0}\Phi_N(\underline{z}_0,\underline{w}_0) \mid$ admet une minoration de la forme suivante,

$$\log \mid \mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0}\Phi_N(\underline{z}_0,\underline{w}_0) \mid \geq -\ell_2\left(\mu_{M_0}^{\theta_0+\theta_1} + \mu_{M_0}^{\theta+\frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}}\right). \qquad (13.10)$$

où le nombre réel ℓ_2 est strictement positif et ne dépend pas du choix de l'entier N. *Mise en œuvre de l'inégalité de Liouville* Nous savons, d'après les résultats du paragraphe 13.2.1, qu'il existe des polynômes

$$\mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}},\ \underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda}(\underline{L}(N)) \in \mathbb{Z}[U_1,\ldots,U_\delta,T_1,\ldots,T_r],$$

tels que

$$\mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0}\Phi_N(\underline{z}_0,\underline{w}_0) = \sum_{\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda}(\underline{L}(N))} a_{\underline{q}}\mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}}(\underline{z}_0,\underline{w}_0).$$

Nous notons, par la suite, Ψ le polynôme

$$\Psi = \sum_{\underline{q}\in\mathbb{N}^{\delta\lambda}(\underline{L}(N))} a_{\underline{q}}\mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}}.$$

Alors,

$$\Psi(\underline{z}_0,\underline{w}_0) \neq 0,$$

et l'inégalité de Liouville permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\log \mid \Psi(\underline{z}_0,\underline{w}_0) \mid \geq -D\log \mid \Psi \mid_1 -D\sum_{p=1}^{\delta}\deg_{U_p}\Psi.h(z_p) \\
- D\sum_{k=1}^{r}\deg_{T_k}\Psi.h(\alpha_k). \qquad (13.11)
\end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à évaluer la norme et les degrés de Ψ.

Une majoration de $\log \mid \Psi \mid_1$ Nous avons immédiatement

$$\begin{aligned} \mid \Psi \mid_1 &\leq \sum_{\substack{\underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda} \\ \underline{q} < \underline{L}(N)}} \mid a_{\underline{q}} \mid\mid \mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}} \mid_1 \\ &\leq L(N) \max_{\substack{\underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda} \\ \underline{q} < \underline{L}(N)}} \mid a_{\underline{q}} \mid \max_{\substack{\underline{q} \in \mathbb{N}^{\delta\lambda} \\ \underline{q} < \underline{L}(N)}} \mid \mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}} \mid_1 . \end{aligned}$$

Nous en déduisons, d'aprés l'inégalité (13.2) et la définition de la fonction Φ_N,

$$\log \mid \Psi \mid_1 \leq \log L(M_0) + k_1 \mu_{M_0}^{\theta_0+\theta_1} + k_2 \mu_{M_0}^{\theta + \frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}} + \lambda S_0 M_0 \log \|\underline{L}(M_0)\| \\ + c_0 \mu_N^{\theta} \|\underline{L}(M_0)\|.$$

Ceci implique l'existence d'une constante réelle $p_1 > 0$ indépendante de N telle que :

$$\log \mid \Psi \mid_1 \leq p_1 \left(\mu_{M_0}^{\theta_0+\theta_1} + \mu_{M_0}^{\theta + \frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}} \right). \tag{13.12}$$

Une majoration des degrés de Ψ. Le polynôme Ψ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des polynômes $\mathcal{Q}_{(\underline{z},\underline{w}),\underline{q},\underline{\sigma}}$, par conséquent, d'après les résultats du paragraphe 13.2.1.b,

$$\begin{aligned} \deg_{U_p} \Psi &\leq \lambda^2 \mu_{M_0}^{\theta_0}, \ (1 \leq p \leq \delta) \\ \deg_{T_k} \Psi &\leq 2c_0(2D+1)^{\frac{1}{\delta\lambda}} \mu_{M_0}^{\theta + \frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}}, \ (0 \leq k \leq r). \end{aligned} \tag{13.13}$$

Une minoration de $\log \mid \mathcal{D}_{\underline{w}}^{\underline{\sigma}_0} \Phi_N(\underline{z}_0, \underline{w}_0) \mid$. Les inégalités (13.11), (13.12) et (13.13) permettent d'écrire

$$\log \mid \Psi(\underline{z}_0, \underline{w}_0) \mid \geq -Dp_1 \left(\mu_{M_0}^{\theta_0+\theta_1} + \mu_{M_0}^{\theta + \frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}} \right) - Dc_0\delta\lambda^2 \mu_{M_0}^{\theta_0+\theta_1} \\ - 2Dc_0h_0\delta(2D+1)^{\frac{1}{\delta\lambda}} \mu_{M_0}^{\theta + \frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}}.$$

Il existe donc un nombre réel $\ell_2 > 0$ indépendant de N, tel que :

$$\log \mid \Psi(\underline{z}_0, \underline{w}_0) \mid \geq -\ell_2 \left(\mu_N^{\theta_0+\theta_1} + \mu_N^{\theta + \frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}} \right).$$

13.2.5 Conclusion

D'après les inégalités (13.5) et (13.10) :

$$\mu_{M_0-1}^{\theta_0+1} \leq (\ell_1+\ell_2) \left(\mu_{M_0}^{\theta_0+\theta_1} + \mu_{M_0}^{\theta + \frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda}} \right). \tag{13.14}$$

Or, nous avons supposé $\mu_{M_0} \leq \mathcal{M}\mu_{M_0-1}$, l'inégalité (3.14) entraine alors :

$$\frac{1}{\mathcal{M}^{\theta_0+1}} \leq (\ell_1+\ell_2) \left(\mu_{M_0}^{\theta_1-1} + \mu_{M_0}^{\theta + \frac{\delta+\lambda+\theta_0\lambda}{\delta\lambda} - \theta_0 - 1} \right). \tag{13.15}$$

Ceci est impossible si l'entier N, à partir duquel la fonction auxiliaire à été construite, est choisi assez grand, puisque les paramètres δ, λ et θ_0 vérifient d'après (C_1)

$$\theta + \frac{\delta + \lambda + \theta_0 \lambda}{\delta \lambda} - \theta_0 - 1 < 0,$$

et d'après l'hypothèse faite sur θ_1

$$\theta_1 - 1 < 0.$$

13.3 Une variante du théorème 13.1

Théorème 13.2 - *Soient ϱ, η_0, $\mathcal{M}$, θ, et θ_1 des nombres réels strictement positifs avec $\theta_1 < 1$, f une fonction entière sur $\mathbb{C}$, $(X_N)_{N\geq 1}$, $(Y_N)_{N\geq 1}$ deux suites strictement croissantes de sous-ensembles finis de $\mathbb{C}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des nombres complexes algébriques, $(\mu_N)_{N\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{N}$.*
On suppose que la suite $(\frac{\mu_{N+1}}{\mu_N})_{N\geq 2}$ est majorée par $\mathcal{M}$ et que les conditions suivantes sont vérifiées.
(i) Pour tout entier $N \geq 1$, $\# X_N = \# Y_N = \mu_N$.
(ii)' Pour tout entier $N \geq 1$, $\sup\{\mid zw \mid,\ (z,w) \in X_N \times Y_N\} \leq \eta_0 \mu_N^{\theta/\varrho}$.
(iii)' Pour tout entier $N \geq 1$ et tout $z \in X_N$, il existe un polynôme $P_z \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_r]$ tel que :

$$z = P_z(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \ \text{et}\ \chi(P_z) \leq \eta_0 \mu_N^{\theta_1}.$$

(iv)Pour tout entier $N \geq 1$, tout entier $n \geq 0$ et tout $(z,w) \in X_N \times Y_N$, il existe un polynôme $Q_{(z,w),n} \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_r]$ tel que :

$$f^{(n)}(zw) = Q_{(z,w),n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \ \text{et}\ \chi(Q_{(z,w),n}) \leq \eta_0 \mu_N^{\theta}.$$

(v)' La fonction f est d'ordre de croissance $\leq \varrho$.
Alors la fonction f est un polynôme.

13.3.1 Démonstration du théorème 13.2

La fonction f étant d'ordre de croissance $\leq \varrho$, il existe deux nombres réels strictement positifs α et β tels que :

$$\mid f \mid_R \leq \beta \exp(\alpha R^{\varrho}), \ \text{pour tout}\ R \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Le nombre réel θ_1 vérifie la condition $0 < \theta_1 < 1$ du théorème 13.1 et la suite $(\mu_{N+1}/\mu_N)_{N\geq 1}$ est majorée par un nombre réel $\mathcal{M}$, nous allons montrer que les hypothèses du théorème 13.2 impliquent celles du théorème 13.1 pour un entier N choisi assez grand, puis appliquer le théorème 13.1.
Nous utilisons les notations :

$$h_0 = \sum_{i=1}^{r} h(\alpha_i) + 1,\ c_0 = h_0\eta_0 \ \text{et}\ r_N = \eta_0 \mu_N^{\theta/\varrho},\ (N \geq 1).$$

Nous allons établir que la fonction ϕ qui intervient dans l'énoncé de l'hypothèse (v) du théorème 13.1 peut être définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(k) = \alpha \eta^{\varrho} k^{\varrho} + \mid \log \beta \mid,\ k \in \mathbb{R}.$$

$(ii)' \implies (ii)$ La suite d'entiers $(\mu_N)_{N\geq 1}$ est strictement croissante et $\theta/\varrho > 0$, il existe donc un entier N_0 à partir duquel $\eta_0 \mu_N^{\theta/\varrho} \leq \exp(\eta_0 \mu_N^{\theta_1}) \leq \exp(c_0 \mu_N^{\theta_1})$.

$(iv)' \implies (iii)$ Soit $z \in X_N,\ z \neq 0$ et $P_z \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_r]$ tel que :

$$z = P_z(\alpha_1, \ldots, \alpha_r).$$

L'inégalité de Liouville nous permet d'écrire
$h(z) \leq \log \mid P_z \mid_1 + \sum_{i=1}^r \deg_{T_i} h(\alpha_i) \leq h_0 \chi(P_z) \leq h_0 \eta_0 \mu_N^{\theta_1}$,
et donc

$$h(z) \leq c_0 \mu_N^{\theta_1}.$$

Vérification de la condition (v)
La fonction f étant d'ordre $< \varrho$, nous pouvons écrire, pour tout nombre réel $k > 0$:

$$\begin{aligned} \log \mid f \mid_{kr(N)} &\leq \mid \log \beta \mid + (\eta k)^\varrho \alpha (\mu_N^{\theta/\varrho})^\varrho \\ &\leq (\mid \log \beta \mid + (\eta k)^\varrho \alpha)\, \mu_N^\theta. \\ &\leq \phi(k) \mu_N^\theta. \end{aligned}$$

Les conditions d'applications du théorème 13.1 sont réalisées et la fonction f est un polynôme.

13.4 Le théorème de Gelfond-Schneider

En 1900, lors du congrés international de mathématiques qui se tenait à Paris le mathématicien allemand D.Hilbert ([Hil00]) pose, dans son septième problème, la question de la transcendance du nombre α^β pour α et β algébriques (cas triviaux exclus) (Il pense à ce moment là que la solution devrait en être "extraordinairement difficile"). Ce n'est qu'en 1934 que A.Gelfond ([Gel34a],[Gel34b]) et Th.Schneider ([Sch34]) démontrent indépendamment l'un de l'autre et par des méthodes différentes l'énoncé suivant :

Théorème 13.3 - *Soient ℓ un nombre complexe différent de zéro et β un nombre complexe non rationnel. Alors l'un des trois nombres β, $\exp(\ell)$, $\exp(\beta\ell)$ n'est pas algébrique.*

13.4.1 Démonstration du théorème 13.3

Supposons les trois nombres β, $\exp(\ell)$, $\exp(\beta\ell)$ algébriques. On se propose d'appliquer le théorème 13.2 à la fonction non polynômiale $f = \exp$, d'ordre $\varphi = 1$, et aux ensembles définis pour tout entier $N \geq 1$ par :

$$\begin{aligned} X_N &= \{t_1 + t_2\beta \ ;\ (t_1, t_2) \in \mathbb{N},\ 0 \leq t_1 < N,\ 0 \leq t_2 < N\}, \\ Y_N &= \{s\ell,\ s \in \mathbb{N},\ 0 \leq s < N^2\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\mu_N = \#X_N = \#Y_N = N^2, \text{ et } \sup\{zw,\ z \in X_N,\ w \in Y_N\} \leq (1+ \mid \beta \mid) \mid \ell \mid N^3.$$

On a donc :

$$\sup\{zw,\ z \in X_N,\ w \in Y_N\} \leq (1+ \mid \beta \mid) \mid \ell \mid \mu_N^{3/2},$$

et nous posons $\theta = 3/2$.
On vérifie que la suite $(\mu_{N+1}/\mu_N)_{N \geq 1}$ est majorée par $\mathcal{M} = 4.$, puisque

$$\frac{\mu_{N+1}}{\mu_N} \leq \frac{(2N)^2}{N^2} \leq 4.$$

Vérification de (iii)'. Pour tout entier $N \geq 1$, $X_N \subset \mathbb{Q}\left(\beta, \exp(\ell), \exp(\beta\ell)\right)$, et pour $z = t_1 + t_2\beta \in X_N$, le polynôme $P_z(T_1, T_2, T_3) = t_1 + t_2 T_1$ appartient à $\mathbb{Z}[T_1, T_2, T_3]$ et vérifie

$$z = P_z\left(\beta, \exp(\ell), \exp(\beta\ell)\right) \text{ avec } \chi(P_z) \leq \log(2N) + 1 \leq 2\log(2N) \leq N^{1/2}.$$

La condition (iii) est donc satisfaite avec le nombre $\theta_1 = 1/2 < 1$.

Vérification de (iv). Pour tout entier $n \geq 0$, et tout $z = t_1 + t_2\beta \in X_N$, $w = s\ell \in Y_N$,

$$f^{(n)}(zw) = \exp\left(t_1 s\ell + t_2 s\beta\ell\right) = \exp(\ell)^{t_1 s} \exp(\beta\ell)^{t_2 s}.$$

Le polynôme $\mathcal{Q}_{(z,w)}(T_1, T_2, T_3) = T_2^{t_1 s} T_3^{t_2 s}$ vérifie donc

$$f^{(n)}(zw) = \mathcal{Q}_{(z,w)}(\beta, \exp(\ell), \exp(\beta\ell)), \text{ avec } \chi(\mathcal{Q}_{(z,w)}) \leq 4N^3.$$

On a donc

$$\chi(\mathcal{Q}_{(z,w)}) \leq 4\mu_N^{\theta}.$$

La contradiction recherchée est établie par le théorème 13.2.

◇

◇ ◇ ◇

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

◇ ◇ ◇

◇

Table des matières