Exercices - Feuille B 20 Février 2004

Exercice B1.

a) Soit n un nombre entier n'ayant aucun facteur premier inférieur ou égal à 7. Montrer que le nombre $n^6 - 1$ est divisible par $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$.

b) Soit n un nombre entier n'ayant aucun facteur premier inférieur ou égal à 31. Montrer que le nombre $n^{30} - 1$ est divisible par $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 = 171\,864$.

Exercice B2.

a) Soient a, b et r des entiers positifs. On note $k = \mathrm{pgcd}(a, r)$. Montrer que la congruence

$$ax \equiv b \pmod r$$

a une solution $x \in \mathbf{Z}$ si et seulement si k divise b.

Quand cette condition est satisfaite, montrer qu'il y a exactement k solutions modulo r.

b) Soient a un entier positif, G un groupe cyclique d'ordre r et $y \in G$. On note $k = \mathrm{pgcd}(a, r)$. Monter qu'il existe $x \in G$ satisfaisant $x^a = y$ si et seulement si $y^{r/k} = 1$.

Dans ce cas montrer qu'il y a exactement k éléments $x_1, \ldots, x_k$ dans G vérifiant cette équation.

Exercice B3.

Soient a et n deux nombres entiers avec $n \geq 2$. On suppose

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod n$$

et

$$a^{(n-1)/q} \not\equiv 1 \pmod n \quad \text{pour tout diviseur premier } q \text{ de } n-1.$$

Montrer que n est premier.

Exercice B4. Soit n un entier ≥ 2. Vérifier

$$(n-1)! \equiv \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est premier,} \\ 2 & \text{si } n = 4, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

http://www.math.jussieu.fr/~miw/enseignement.html