Exercices - Feuille D `24 Mars 2004`

Exercice D1.
a) Soient K un corps et L une extension finie de degré n de K. Pour $\gamma \in L$ on désigne par $[\gamma]$ l'endomorphisme du K-espace vectoriel L défini par $x \mapsto \gamma x$. Vérifier que $\gamma \mapsto [\gamma]$ est un morphisme d'anneaux du corps L dans l'anneau des endomorphismes de L sur K.
b) Soit $\alpha \in L$. On suppose $L = K(\alpha)$ et on considère la base $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ de L sur K. Quelle est la matrice représentant l'endomorphisme $[\gamma]$ dans cette base? En déduire un isomorphisme du corps L sur un sous-anneau (que l'on précisera) de l'anneau $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans K.

Exercice D2. Soit p un nombre premier. On note $\mathbf{F}_p$ le corps à p éléments. Les lettres m, n et d désignent des entiers ≥ 1. On note E_n l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de $\mathbf{F}_p[X]$ de degré n et $\psi(n)$ le nombre d'éléments de E_n.

a) Soit f un polynôme irréductible dans $\mathbf{F}_p[X]$ de degré m. Montrer que f divise $X^{p^n} - X$ dans $\mathbf{F}_p[X]$ si et seulement si m divise n.

b) En déduire
$$X^{p^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{f \in E_d} f(X) \in \mathbf{F}_p[X].$$

c) Vérifier
$$p^n = \sum_{d|n} d\psi(d).$$

d) Montrer
$$\psi(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) p^{n/d},$$

où $\mu(n)$ désigne la fonction de Möbius.
`Rappel:` *$\mu : \mathbf{N} \setminus \{0\} \to \mathbf{Z}$ est l'unique application vérifiant $\mu(1) = 1$ et*
$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad n > 1.$$

Pour s et t applications de $\mathbf{N}$ dans un groupe additif, on a
$$s(n) = \sum_{d|n} t(d) \quad \textit{pour tout} \quad n \geq 1 \quad \textit{si et seulement si} \quad t(n) = \sum_{d|n} \mu(d) s(n/d) \quad \textit{pour tout} \quad n \geq 1.$$

http://www.math.jussieu.fr/~miw/enseignement.html