Exercices - Feuille G `À rendre le 28 Avril 2004`

Soit p un nombre premier. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un nombre premier q tel que, pour tout n,

$$n^p \not\equiv p \pmod{q}.$$

a) Résoudre le cas $p = 2$.

b) Montrer que le nombre

$$a = \frac{p^p - 1}{p - 1}$$

possède un diviseur premier q tel que

$$q \not\equiv 1 \pmod{p^2}.$$

c) Soit x un nombre entier et soit ℓ un nombre premier $\neq p$ qui divise $1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$. Quel est l'ordre de x modulo ℓ? En déduire

$$\ell \equiv 1 \pmod{p}.$$

Quelle est la classe de q modulo p?

d) Soit n un entier tel que

$$n^p \equiv p \pmod{q}.$$

Montrer que l'on a d'une part

$$p^{(q-1)/p} \equiv 1 \pmod{q}.$$

et d'autre part

$$p^p \equiv 1 \pmod{q}.$$

En déduire l'ordre de p modulo q.

e) Conclure.

http://www.math.jussieu.fr/~miw/enseignement.html