Exercices - Feuille H `à rendre le 3 Mai 2004`

Exercice H1. Soit n un entier ≥ 2. On désigne par $\Phi_n \in \mathbf{Z}[X]$ le n-ième polynôme cyclotomique et par R_n son corps de décomposition sur $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$.

a) Vérifier $[R_n : \mathbf{Q}] = \varphi(n)$ et donner une base de R_n comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel.

b) On pose $G = \mathrm{Aut}(R_n)$. Monter que pour tout $\varphi \in G$, il existe $a_\varphi \in \mathbf{Z}$, premier avec n, tel que, pour toute racine n-ième de l'unité $\zeta \in R_n$, on ait $\varphi(\zeta) = \zeta^{a_\varphi}$. Montrer que la classe $u(\varphi)$ de a_φ modulo n est déterminée de manière unique par φ et que l'application $u : G \to (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ ainsi définie est un isomorphisme de groupes.

c) Soit H un sous-groupe de G. Montrer que

$$R_n^H = \{x \in R_n\ ;\ \psi(x) = x \text{ pour tout } \psi \in H\}$$

est un sous-corps de R_n.

d) Soit L est un sous-corps de R_n. Montrer que

$$G(R_n/L) = \{\psi \in G\ ;\ \psi(x) = x \text{ pour tout } x \in L\}$$

est un sous-groupe de G.

On admettra que les applications $H \mapsto R_n^H$ et $L \mapsto G(R_n/L)$ définissent des bijections réciproques entre l'ensemble des sous-groupes de G et l'ensemble des sous-corps de R_n.

e) Soit $\zeta \in R_n$ une racine primitive n-ième de l'unité et soit $K = \mathbf{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$. Vérifier que $K = R_n \cap \mathbf{R}$.

Montrer que si `le groupe` $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ `est cyclique,` alors K est le seul sous-corps de R_n tel que R_n soit une extension quadratique de K.

Combien y a-t-il de sous-corps L de R_8 tels que R_8 soit une extension quadratique de L?

Exercice H2.

a) Quels sont les degrés des facteurs irréductibles des polynômes cyclotomiques ϕ_5, ϕ_7 et ϕ_{11} sur $\mathbf{F}_2$ et sur $\mathbf{F}_3$?

b) Décomposer le polynôme ϕ_{15} en facteurs irréductibles sur $\mathbf{F}_2$.

c) Vérifier que le polynôme $X^4 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbf{F}_8$.

d) Pour chacun des corps $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{F}_8$ et $\mathbf{F}_{16}$, donner les polynômes irréductibles sur $\mathbf{F}_2$ des racines primitives.

http://www.math.jussieu.fr/~miw/enseignement.html