

**Exercices - Feuille J**      5 Mai 2004

**Exercice J1.** Soient  $n$  et  $d$  deux entiers satisfaisant

$$2^{d+1} > (d+1)^{n(n+1)/2}.$$

Montrer qu'il existe un polynôme non nul  $P \in \mathbf{Z}[X]$  de degré  $\leq d$ , dont les coefficients sont 0, 1 ou  $-1$ , qui vérifie

$$P(1) = P'(1) = \dots = P^{(n-1)}(1) = 0.$$

**Exercice J2.** Soient  $p$  un nombre premier et  $f \in \mathbf{Z}[X]$  un polynôme. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout  $a \in \mathbf{Z}$ ,  $f(a) \equiv 0 \pmod{n}$ .

(ii) Il existe deux polynômes  $g$  et  $h$  dans  $\mathbf{Z}[X]$  tels que

$$f(X) = (X^p - X)g(X) + ph(X).$$

**Exercice J3.** Montrer que le nombre de polynômes unitaires de  $\mathbf{Z}[X]$  de degré  $n$  sans facteur carré est

$$\begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0, \\ p & \text{pour } n = 1, \\ p^n - p^{n-1} & \text{pour } n \geq 2. \end{cases}$$