Valeurs spéciales de polylogarihmes multiples

par

M. WALDSCHMIDT

Algèbre

On fixe un corps k (commutatif). Les anneaux sont supposés unitaires (mais pas commutatifs!).

Une *algèbre* (sur k) est un anneau A avec une application $\eta_A : k \to A$, qui est un morphisme d'anneaux dont l'image est contenue dans le centre de A. L'application $(\lambda, a) \mapsto \eta_A(\lambda)a$ de $k \times A$ dans A munit A d'une structure de k-espace vectoriel et l'application $\mu_A : A \times A \to A$ est bilinéaire.

Un *morphisme d'algèbres* est un morphisme d'anneaux $f : A \to B$ tel que $f \circ \eta_A = \eta_B$.

Conséquence: $f(1) = 1$.

Exemples:

- k est une algèbre et $\eta_A : k \to A$ est un morphisme d'algèbres.
- Étant données deux algèbres A et B, les homomorphismes d'algèbres $A \to B$ forment naturellement une algèbre $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(A, B)$.
- Quand A est un anneau et k un sous-anneau de A qui est aussi un corps, alors A est une k-algèbre. Cas particuliers avec $k = \mathbb{Q}$: chacun des corps $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(e^{2i\pi/n})$,…, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$… (et plus généralement tout corps de caractéristique nulle) est une algèbre sur $\mathbb{Q}$. Tout anneau de caractéristique finie p avec p premier est une algèbre sur le corps $\mathbb{F}_p$ à p éléments.
- Algèbres de polynômes (commutatives) $k[T]$, $k[T_1, T_2]$, $k[X]$ (pour X ensemble quelconque)
- Toute algèbre A est quotient d'un $k\langle X\rangle$ pour un certain ensemble X (prendre pour X un ensemble de générateurs de A comme k-algèbre - par exemple $X = A$)
- $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(k\langle X\rangle, A)$ est naturellement en bijection avec X. Pour $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ (ensemble fini),
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(k\langle x_1, \dots, x_n\rangle, A) \simeq A^n.$$
Si I est l'idéal bilatère engendré par les commutateurs $xy - yx$, avec x et y décrivant X, alors $k\langle X\rangle / I$ est isomorphe à l'anneau des polynomes $k[X]$. Ainsi
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(k[x_1, \dots, x_n], A) \simeq \big\{(a_1, \dots, a_n) \in A^n,\ a_i a_j = a_j a_i \quad \text{pour tout } i,\, j\big\}.$$

En particulier si A est commutative on trouve A^n. Pour $n = 1$ on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(k[x_1], A) \simeq A.$$

Ainsi $k[x_1]$ est la *droite affine*: les morphismes d'algèbre de $k[x_1]$ dans A sont les A-points de la droite affine. Pour $n = 2$ on a (pour une algèbre A commutative)

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(k[x_1, x_2], A) \simeq A^2. \qquad \textit{(Plan Affine)}$$

Algèbres graduées, filtrations, série de Hilbert

On va s'intéresser provisoirement uniquement aux anneaux commutatifs (les cas importants seront ceux des anneaux de polynômes en variables - commutatives - sur un corps).

Une *graduation* sur un anneau A est une décomposition en somme directe de sous-groupes additifs

$$A = \bigoplus_{k \geq 0} A_k,$$

telle que la multiplication de A envoie $A_k \times A_h$ dans A_{k+h} pour tout couple (k, h) d'entiers ≥ 0. Au lieu de prendre comme indices les entiers ≥ 0 on peut prendre plus généralement un monoide additif (commutatif) G (voir [L 1993] Chap. X § 5). Les éléments de A_k sont dits *homogènes de poids (ou de degré)* k. Noter que A_0 est un sous-anneau de A et que chaque A_k est un A_0-module.

Quand A est un anneau gradué, une *graduation* sur un A-module E est une décomposition en somme directe de sous-groupes additifs

$$E = \bigoplus_{k \geq 0} E_k,$$

telle que $A_k E_n \subset E_{k+n}$. En particulier E_0 est un A_0-module. Les éléments de E_n sont dits *homogènes de poids (ou de degré)* n.

Une *filtration* sur un A-module E est une suite décroissante de sous-modules

$$E = E_0 \supset E_1 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$$

On note parfois $\mathrm{Fil}_n(E)$ au lieu de E_n.

Une *filtration* sur un anneau A est une suite décroissante de sous-groupes abéliens

$$A = A_0 \supset A_1 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

telle que $A_n A_m \subset A_{n+m}$. Alors A_0 est un sous-anneau de A et chaque A_n est un A_0-module.

Si $\mathfrak{A}$ est un idéal de A une filtration sur l'anneau A est donnée par les puissances de $\mathfrak{A}$:

$$A = \mathfrak{A}^0 \supset \mathfrak{A}^1 \supset \cdots \supset \mathfrak{A}^n \supset \cdots$$

Le premier anneau *gradué associé* est alors

$$\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{A}^n,$$

et le second est

$$\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{A}^n/\mathfrak{A}^{n+1}.$$

Par exemple si $\mathfrak{A}$ est un idéal *propre* (c'est-à-dire distinct de $\{0\}$ et de A) et principal, alors le premier gradué est isomorphe à l'anneau de polynômes $A[t]$ et le second à $(A/\mathfrak{A})[t]$.

Une K*-algèbre graduée* est une K-algèbre A munie d'une graduation (comme anneau) $A = \bigoplus_{k\geq 0} A_k$ de telle sorte que $KA_k \subset A_k$ pour tout $k \geq 0$ (voir [L 1993] Chap. XVI, § 6). Si la dimension d_k de chaque A_k comme K-espace vectoriel est fini, on définit la *série de Hilbert* de l'algèbre graduée A par

$$\mathfrak{H}_A(t) = \sum_{k\geq 0} d_k t^k.$$

Nous nous intéressons maintenant au cas particulier suivant: étant donnée une suite

$$\bigl(N(1), N(2), \ldots, N(k), \ldots\bigr)$$

d'entiers ≥ 0, on désigne par A la K-algèbre commutative des polynômes à coefficients dans K en les indéterminées Z_{nk} ($k \geq 1$, $1 \leq n \leq N(k)$). On munit la K-algèbre A de la graduation pour laquelle Z_{nk} est homogène de poids k avec $A_0 = K$.

Lemme 1.A. *La série de Hilbert de A est*

$$\mathfrak{H}_A(t) = \prod_{k\geq 1} \frac{1}{(1-t^k)^{N(k)}}.$$

Démonstration. Le K-espace vectoriel A_ℓ des éléments homogènes de poids ℓ a pour base les monomes

$$\prod_{k=0}^{\infty} \prod_{n=1}^{N(k)} Z_{nk}^{h_{nk}},$$

où $\underline{h} = (h_{nk})_{\substack{k\geq 1\\ 1\leq n\leq N(k)}}$ décrit l'ensemble (fini) des uplets d'entiers ≥ 0 satisfaisant

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{N(k)} k h_{nk} = \ell. \qquad (1.B)$$

Par conséquent la dimension d_ℓ de A_ℓ sur K est le nombre de ces uplets $\underline{h}$ (avec $d_0 = 1$), et par définition on a

$$\mathfrak{H}_A(t) = \sum_{\ell\geq 0} d_\ell t^\ell.$$

Dans l'identité

$$\frac{1}{(1-z)^N} = \sum_{h_1 \geq 0} \cdots \sum_{h_N \geq 0} \prod_{n=1}^{N} z^{h_n}$$

on remplace z par t^k et N par $N(k)$. On en déduit

$$\prod_{k\geq 1} \frac{1}{(1-t^k)^{N(k)}} = \sum_{\underline{h}} \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{n=1}^{N_k} t^{kh_{nk}}$$

Le coefficient de t^ℓ dans le membre de droite est le nombre de $\underline{h} = (h_{nk})_{\substack{k\geq 1\\ 1\leq n\leq N(k)}}$ avec $h_{nk} \geq 0$ vérifiant (1.B); c'est donc d_ℓ. $\square$

Example 1 . Prenons $N(k) = 0$ pour $k \geq 2$ et notons N pour $N(1)$. Alors A est l'anneau des polynômes $k[Z_1, \ldots, Z_N]$ avec la graduation habituelle du degré total (chaque variable Z_i a comme poids 1). La série de Hilbert est

$$\frac{1}{(1-t)^N} = \sum_{\ell\geq 0} \binom{N+\ell-1}{\ell} t^\ell.$$

Si on donne à chaque variable Z_i un autre poids, mais toujours le même, disons k, cela revient à remplacer t par t^k.

Example 2 . Plus généralement, si on travaille avec un nombre fini de variables, c'est-à -dire s'il existe un entier $k_0 \geq 1$ tel que $N(k) = 0$ pour $k > k_0$, le même argument donne

$$d_\ell = \prod_{\ell_1+2\ell_2+\cdots+k_0\ell_{k_0}=\ell} \prod_{j=1}^{k_0} \binom{N_j+\ell_j-1}{\ell_j}.$$

Example 3 .Étant donné un entier rationnel positif a, montrons que, sous les hypothèses du lemme 1.A, les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) La fonction de Hilbert de A est

$$\mathfrak{H}_A(t) = \frac{1}{1-at}.$$

(ii) Pour $\ell \geq 0$ on a

$$d_\ell = a^\ell.$$

(iii) Pour $k \geq 1$ on a

$$N(k) = \frac{1}{k} \sum_{n|k} \mu(k/n) a^n.$$

Remarque: en remplaçant t par t^b avec b entier positif on trouve une caractérisation similaire pour que la série de Hilbert de A soit $1/(1-at^b)$.

On a désigné par μ la fonction de Möbius ([HW 1979] § 16.3), définie par

$$\begin{cases} \mu(1) = 1, \\ \mu(p_1\cdots p_r) = (-1)^r \text{ si } p_1, \ldots, p_r \text{ sont des nombres premiers deux-à-deux distincts,} \\ \mu(n) = 0 \text{ si } n \text{ admet un facteur carré} > 1. \end{cases}$$

Démonstration. L'équivalence entre (i) et (ii) résulte immédiatement de la définition de $\mathfrak{H}$. Démontrons l'équivalence entre (i) et (iii). Le terme constant de chacune des séries représentant

$$\frac{1}{1-at} \quad \text{et} \quad \prod_{k\geq 1} \frac{1}{(1-t^k)^{N(k)}}$$

est 1; pour montrer l'égalité entre ces deux séries quand $N(k)$ est donnée par (iii), il suffit donc de vérifier que les dérivées logarithmiques sont les mêmes. La dérivée logarithmique de $1/(1-at)$ est

$$\frac{-a}{1-at} = -\sum_{\ell\geq 1} a^\ell t^{\ell-1}.$$

La dérivée logarithmique de $\prod_{k\geq 1} 1/(1-t^k)^{N(k)}$ est

$$-\sum_{k\geq 1} \frac{kN(k)t^{k-1}}{1-t^k} = -\sum_{\ell\geq 0}\sum_{n|\ell} nN(n)t^{\ell-1}.$$

Finalement l'équivalence entre (iii) et l'égalité

$$a^\ell = \sum_{n|\ell} nN(n) \quad \text{pour tout } \ell \geq 1$$

n'est autre que la formule d'inversion de Möbius (voir par exemple [L 1993] Chap. II Ex. 12.c et Chap. V, Ex. 21; [HW 1979] § 16.4).

Example 4 .Étant donnés deux entiers rationnels positifs a et b avec $a < b$, montrons que, sous les hypothèses du lemme 1.A, les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) La fonction de Hilbert de A est

$$\mathfrak{H}(t) = \frac{1}{1-t^a-t^b}.$$

(ii) Les entiers d_ℓ satisfont la relation de récurrence

$$d_\ell = d_{\ell-a} + d_{\ell-b} \quad \text{pour } \ell \geq b+1$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} d_0 = 1, \\ d_\ell = 0 \quad \text{pour } 0 \leq \ell \leq b. \end{cases}$$

(iii) Pour $k \geq 1$ on a

$$N(k) = \frac{1}{k}\sum_{n|k} \mu(k/n) d_n,$$

où la suite $(P_\ell)_{\ell\ge 0}$ est définie par

$$P_\ell = P_{\ell-a} + P_{\ell-b} \quad \text{pour } \ell \ge b+1$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} P_\ell = 0 & \text{pour } 0 \le \ell < a, \\ P_\ell = a & \text{pour } a \le \ell < b \text{ si } a \text{ divise } \ell, \\ P_\ell = 0 & \text{pour } a < \ell < b \text{ si } a \text{ ne divise pas } \ell, \\ P_b = b. \end{cases}$$

Démonstration. Ici encore l'équivalence entre (i) et (ii) résulte de la définition de d_ℓ: la série

$$\mathfrak{H}(t) = \sum_{\ell\ge 0} d_\ell t^\ell$$

satisfait

$$(1 - t^a - t^b)\mathfrak{H}(t) = 1$$

si et seulement si la suite $(d_\ell)_{\ell\ge 0}$ satisfait (ii).

Pour l'équivalence entre (i) et (iii), on prend de nouveau les dérivées logarithmiques: la dérivée logarithmique de $1/(1-t^a-t^b)$ est

$$\frac{-at^{a-1} - bt^{b-1}}{1 - t^a - t^b} = \sum_{\ell\ge 0} P_\ell t^{\ell-1}$$

tandis que celle de de $\prod_{k\ge 1} 1/(1-t^k)^{N(k)}$ est, nous l'avons vu,

$$-\sum_{k\ge 1} \frac{kN(k)t^{k-1}}{1-t^k} = -\sum_{\ell\ge 0}\sum_{n\mid\ell} nN(n)t^{\ell-1}.$$

Quand on multiplie cette dernière série par $1 - t^a - t^b$ et qu'on écrit que le produit est $-at^{a-1} - bt^{b-1}$ on trouve (iii). $\square$

Voici un cas particulier de l'exemple 4: prenons $a = 2$, $b = 3$. Alors la suite $(P_\ell)_{\ell\ge 0}$ est la *suite de Perrin* $(0, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, \ldots)$ définie par

$$P_n = P_{n-2} - P_{n-3} \quad \text{pour } n \ge 4$$

avec les conditions initiales

$$P_0 = P_1 = 0, \quad P_2 = 2, \quad P_3 = 3.$$

Les mêmes arguments donnent:

Lemme 1.E. *Soient $D(p,k)$ des entiers ≥ 0, pour $p \geq 0$ et $k \geq 1$. Alors*

$$\prod_{p\geq 0}\prod_{k\geq 1}(1-X^pY^k)^{D(p,k)} = \sum_{p\geq 0}\sum_{k\geq 1} d_{pk}X^pY^k,$$

où d_{pk} désigne le nombre de uplets d'entiers ≥ 0 de la forme $\underline{h} = (h_{ij\ell})_{i\geq 0\ j\geq 1,\ 1\leq \ell\leq D(p,k)}$ satisfaisant

$$\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 1}\sum_{n=1}^{D(p,k)} ih_{ij\ell} = p \quad \textit{et} \quad \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 1}\sum_{n=1}^{D(p,k)} jh_{ij\ell} = k.$$

Algèbres de Hopf.

Soient k un corps et G un ensemble. L'ensemble $\mathcal{H} = k^G$ des applications de G dans k est naturellement muni d'une structure d'algèbre sur k, avec les lois (pour f et g dans $\mathcal{H}$, λ dans k):

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)g \quad \text{et} \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Supposons maintenant que G soit un groupe (noté multiplicativement). Alors $\mathcal{H}$ possède des structures supplémentaires. En premier lieu, pour $f \in \mathcal{H}$, notons Δf l'application

$$\begin{array}{rccc} \Delta f: & G\times G & \longrightarrow & k \\ & (x,y) & \longmapsto & f(xy). \end{array}$$

Alors $\Delta f \in k^{G\times G} \simeq \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$. L'application

$$\Delta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$$

est appelée "coproduit".

Ensuite, pour $f \in \mathcal{H}$, notons Sf l'application

$$\begin{array}{rccc} Sf: & G & \longrightarrow & k \\ & x & \longmapsto & f(x^{-1}). \end{array}$$

L'application $S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ainsi définie est appelée "antipode".

`Remark.` Si A est une k-algèbre, l'application produit (multiplication)

$$\begin{array}{rccc} m: & A\times A & \longrightarrow & A \\ & (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

est k-bilinéaire, donc se prolonge en une application $A\otimes A \to A$. Pour le coproduit on renverse les flèches.

`Definition.` Soit A un espace vectoriel sur un corps k. Un *coproduit* sur A est une application k-linéaire $A \to A\otimes A$.

Comme l'associativite du produit pour une k-algèbre A se traduit par la commutativite du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (A\otimes A)\otimes A & & \simeq & & A\otimes(A\otimes A) \\ \downarrow m\otimes 1 & & & & \downarrow 1\otimes m \\ A\otimes A & & & & A\otimes A \\ & \searrow m & & \swarrow m & \\ & & A & & \end{array}$$

on dit qu'un coproduit Δ est *co-associatif* si le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (A\otimes A)\otimes A & & \simeq & & A\otimes(A\otimes A) \\ \uparrow \Delta\otimes 1 & & & & \uparrow 1\otimes \Delta \\ A\otimes A & & & & A\otimes A \\ & \nwarrow \Delta & & \nearrow \Delta & \\ & & A & & \end{array}$$

est commutatif.

De même on définit une counité comme une forme linéaire $\eta : A \to k$ telle que les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} k\otimes A & \xleftarrow{\eta\otimes 1} & A\otimes A \\ & \nwarrow \sim & \uparrow \Delta \\ & & A \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} k\otimes A & \xleftarrow{1\otimes \eta} & A\otimes A \\ & \nwarrow \sim & \uparrow \Delta \\ & & A \end{array}$$

soient commutatifs.

`Definition.` Une *algèbre de Hopf* est une algèbre associative unitaire sur un corps k, munie

- d'un coproduit Δ qui est co-associatif et qui est un morphisme d'algèbres de A dans $A\otimes A$,
- d'une co-unité η qui est un morphisme d'algèbres de A dans k,
- et d'une antipode S qui est un morphisme d'algèbres de A dans A (pour l'antipode il suffit de demander qu'elle soit k-linéaire: alors c'est un morphisme d'algèbres)

de telle manière que les deux diagrammes suivants commutent:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A\otimes A & \xrightarrow{1\otimes S} & A\otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ & \searrow^{\eta} & & & & {}^{\epsilon}\nearrow & \\ & & & k & & & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A\otimes A & \xrightarrow{S\otimes 1} & A\otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ & \searrow^{\eta} & & & & {}^{\epsilon}\nearrow & \\ & & & k & & & \end{array}$$

`Example.` Quand G est un groupe, k^G est une algèbre de Hopf (on peut remplacer G par un groupe algébrique affine et considérer $k[G]$) et kG aussi. Si G est fini ces deux algèbres k^G et kG sont duales.

`Example.` Soient X un ensemble, k un corps et $\widehat{\mathfrak{H}}$ l'algèbre $k\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries formelles non commutatives sur X. On définit l'antipode $a(S)$ d'un élément

$$S = \sum_{w \in X^*} (S|w)w$$

de $\widehat{\mathfrak{H}}$ de la manière suivante:

$$a(S) = \sum_{w \in X^*} (-1)^{|w|}(S|w)\widetilde{w},$$

où $\widetilde{w}$ est le "miroir" de w: pour $w = x_1 \cdots x_k \in X^*$,

$$\widetilde{w} = x_k \cdots x_1.$$

Le miroir de $S \in \widehat{\mathfrak{H}}$ est aussi défini par

$$\widetilde{S} = \sum_{w \in X^*} (S|w)\widetilde{w}$$

`Remark.` Il y a encore une autre loi sur $\mathfrak{H} = k\langle X\rangle$: le crochet de Lie de deux polynômes

$$[P, Q] = PQ - QP.$$

Ce crochet est anticommutatif

$$[P, Q] = -[Q, P]$$

et vérifie l'identité de Jacobi

$$\big[P, [Q, R]\big] + \big[Q, [R, P]\big] + \big[R, [P, Q]\big] = 0.$$

On note Lie$X$ le plus petit sous-k-module de $k\langle X\rangle$ qui contient X et est stable par le crochet de Lie et $i_X : X \to \mathrm{Lie}X$ l'inclusion. Alors Lie$X$ est une algèbre de Lie qui possède la propriété universelle suivante:

Pour toute application f de X dans une algèbre de Lie L, il existe un unique morphisme $\overline{f}$: Lie$X \to L$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[drr, "i_X"'] & & L \\ & & \mathrm{Lie}X \arrow[u, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

Les éléments de Lie$X$ sont appelés *polynômes de Lie sur* X. Une *série de Lie* est un élément de $\widehat{\mathfrak{H}}$ qui s'écrit $S=\sum_k S_k$ où chaque S_k est un polynôme homogène de Lie de degré (poids) k. On note Lie$\langle\langle X\rangle\rangle$ l'ensemble des séries de Lie. C'est une algèbre de Lie, avec le crochet

$$[S,T]=\sum_{k,\ell}[S_k,T_\ell].$$

Definition. Une algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ est *graduée* si elle est somme directe de $\mathcal{H}_p$, $p\geq 0$, avec

$$m:\mathcal{H}_p\otimes\mathcal{H}_q\to\mathcal{H}_{p+q},\quad \Delta:\mathcal{H}_n\to\oplus_{p+q=n}\mathcal{H}_p\otimes\mathcal{H}_q$$

et

$$\ker\eta\supset\oplus_{p\geq 1}\mathcal{H}_p.$$

Si, de plus, $\mathcal{H}_0$ est isomorphe à k, on dit que $\mathcal{H}$ est *connexe.*

Une algèbre de Hopf commutative correspond à un schéma en groupes affines. Elle est connexe s'il ny a pas d'élément e dans $\mathcal{H}$ autre que 0 et 1 tel que $e^2=e$; dans ce cas le schéma G est connexe.

Théorème (Hopf, Milnor, Moore). *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf commutative graduée connexe sur un corps de caractéristique nulle. Alors $\mathcal{H}$ est une algèbre de polynômes.*

L'algèbre $\mathfrak{H}=\mathbb{C}\langle x_0,x_1\rangle$ est l'algèbre tensorielle $T(V)$ de l'espace vectoriel $V=\mathbb{C}x_0+\mathbb{C}x_1$.

Remark. Les shuffles $S_{p,q}$ interviennent pour définir une structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre tensorielle $T(V)$.

Soit Lie$V$ l'algèbre de Lie sur V. L'algèbre enveloppante universelle $U(\text{Lie}V)$ est encore $T(V)$.

L'algèbre non commutative $\mathfrak{H}=\mathbb{C}\langle x_0,x_1\rangle$ est une algèbre de Hopf avec le coproduit

$$\begin{array}{cccc}\Delta: & \mathfrak{H} & \longrightarrow & \mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}\\ & x_0 & \longmapsto & x_0\otimes 1+1\otimes x_0\\ & x_1 & \longmapsto & x_1\otimes 1+1\otimes x_1.\end{array}$$

Dans $\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}$ posons

$$x_0'=x_0\otimes 1,\quad x_0''=1\otimes x_0,\qquad x_1'=x_1\otimes 1,\quad x_1''=1\otimes x_1.$$

Alors pour $P(x_0,x_1)\in\mathfrak{H}$ on a

$$\Delta P=P(x_0'+x_0'',x_1'+x_1'').$$

Les éléments de l'algèbre de Lie libre sont caractérisés par

$$\Delta P=P\otimes 1+1\otimes P,$$

et le membre de droite s'écrit encore

$$P(x_0', x_1') + P(x_0'', x_1'').$$

Pour

$$P(x_0, x_1) = \sum_{w \in X^*} (P|w) w \in \mathfrak{H},$$

on a

$$\Delta P = \sum_{w \in X^*} (P|w' ш w'') w \otimes w''.$$

Si $U = U(x_0, x_1, z)$ satisfait

$$dU = (x_0 \omega_0 + x_1 \omega_1) U,$$

alors

$$\Phi_{KZ}(x_0, x_1) = \lim_{z \to 1} (1 - z)^{-x_1} U(z).$$

[HW 1979] Hardy, G. H.; Wright, E. M. – *An Introduction to the Theory of Numbers.* Oxford Science Publications, Oxford University Press. First ed. 1938. Fifth Ed. 1979.

[L 1993] Lang, S. – *Algebra.* Third edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1993.