JOURNAL OF NUMBER THEORY 5, 191–202 (1973)

Solution du Huitième Problème de Schneider

MICHEL WALDSCHMIDT

U. E. R. de Mathématiques et Informatique, Université de Bordeaux 1, 351, cours de la Libération, 33-Talence, France

Communicated by J. W. S. Cassels

Received March 11, 1971; revised May 3, 1971

The problem we shall now solve is the eighth of Schneider's problems: "Show that at least one of the two numbers e^e, e^{e^2}, must be transcendental." We shall deduce this result from a theorem of algebraic independence.

Nous désignerons par **N** l'ensemble des entiers rationnels positifs, **Z** l'anneau des entiers rationnels, **Q** le corps des nombres rationnels, **R** le corps des nombres réels et **C** le corps des nombres complexes. Le logarithme népérien sera noté: log. D'autre part, e sera le nombre réel tel que $\log e = 1$.

I. INTRODUCTION: ÉNONCÉS DES RÉSULTATS

Dans son livre "Introduction aux nombres transcendants" [7], Th. Schneider énonçait une liste de huit questions ouvertes dont la dernière était:

"*Montrer que l'un au moins des deux nombres e^e, e^{e^2} doit être transcendant.*"

Le seul résultat connu était alors que l'un au moins des trois nombres e^{e^r}, $e^{e^{2r}}$, $e^{e^{3r}}$ (r rationnel non nul) est transcendant, et même algébriquement indépendant de e. Ceci résulte d'un théorème de Gel'fond [4], dont un autre corollaire important est le suivant:

Si $\alpha \in \mathbf{C}$ est algébrique, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ et si r est un nombre rationnel non nul, l'un au moins des trois nombres $\alpha^{(\log\alpha)^r}$, $\alpha^{(\log\alpha)^{2r}}$, $\alpha^{(\log\alpha)^{3r}}$ est transcendant, et même algébriquement indépendant de $\log \alpha$.

Le résultat présenté ici permet de répondre, de façon affirmative, au problème de Schneider.

THÉORÈME. *Soient* x_1, x_2 (*resp.* y_1, y_2) *deux nombres complexes linéairement indépendants sur* **Q**. *Si les deux nombres* $e^{x_1 y_2}$ *et* $e^{x_2 y_2}$ *sont algébriques, alors deux au moins des nombres*

$$x_i\,,\, y_j\,,\, e^{x_i y_j} \qquad (i = 1, 2; j = 1, 2)$$

sont algébriquement indépendants.

Les principaux corollaires de ce théorème sont les suivants:

COROLLAIRE 1. *Si* α *est un nombre algébrique,* $\alpha \neq 0$ *et* $\alpha \neq 1$, *et si* $\alpha^{(\log\alpha)}$ *est algébrique, alors* $\log \alpha$ *et* e *sont algébriquement indépendants.*

En particulier, si e^{π^2} est algébrique, alors e et π sont algébriquement indépendants.

On déduit du Corollaire 1 la
Solution du problème de Schneider: *Soit* $r \in \mathbf{Q}$. *Alors l'un au moins des deux nombres* e^{e^r}, $e^{e^{2r}}$ *est transcendant.*

COROLLAIRE 2. *Soient* $r \in \mathbf{Q}$, $r \neq 0$ *et* α *algébrique,* $\alpha \neq 0$ *et* $\alpha \neq 1$. *Alors l'un au moins des deux nombres* $\alpha^{(\log\alpha)^r}$, $\alpha^{(\log\alpha)^{2r}}$ *est transcendant.*

On déduit que, si α est un nombre algébrique, l'un des trois nombres e^{e^α}, $e^{e^{2\alpha}}$, $e^{e^{3\alpha}}$ est transcendant.

COROLLAIRE 3. *Soient* a_1, a_2, b *des nombres algébriques, tels que* $\log a_1$, $\log a_2$ *soient linéairement indépendants sur* **Q**, *et* $b \notin \mathbf{Q}$. *Alors deux au moins des quatre nombres*

$$\log a_1\,, \qquad \log a_2\,,\, a_1{}^b,\, a_2{}^b$$

sont algébriquement indépendants.

COROLLAIRE 4. *Soient* α, β, γ *des nombres algébriques tels que* $\log \alpha$, $\log \gamma$ (*resp.* $\log \beta$, $\log \gamma$) *soient* **Q**-*linéairement indépendants. Alors deux des quatre nombres*

$$\log \alpha, \qquad \log \beta, \qquad \log \gamma, \qquad \exp(\log \alpha \log \beta / \log \gamma)$$

sont algébriquement indépendants.

Si r est un nombre rationnel, $r \neq 0$ et $r \neq 1$, l'un des deux nombres e^{π^r}, $e^{\pi^{2-r}}$ (resp. $e^{i\pi^r}$, $e^{i\pi^{2-r}}$) est transcendant. On le déduit du corollaire avec $\alpha = e^{\pi^r}$, $\beta = e^{\pi^{2-r}}$ et $\gamma = e^{i\pi}$ (resp. $\alpha = e^{i\pi^r}$, $\beta = e^{i\pi^{2-r}}$ et $\gamma = e^{i\pi}$).

Démonstration des corollaires.

1. Pour le premier corollaire, on pose:

$$x_1 = y_2 = \log \alpha; \qquad x_2 = y_1 = 1.$$

2. Pour le second, on pose:

$$x_1 = (\log \alpha)^r; \qquad x_2 = 1; \qquad y_1 = \log \alpha; \qquad y_2 = (\log \alpha)^{r+1}.$$

3. Enfin, pour le troisième:

$$x_1 = \log a_1 ; \qquad x_2 = \log a_2 ; \qquad y_1 = 1; \qquad y_2 = b.$$

Terminons ce chapitre par une conjecture qui généraliserait le théorème précédent:

Soient x_1, x_2 (resp. y_1, y_2) deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Si $e^{x_2 y_2}$ est algébrique, montrer que deux au moins des nombres

$$x_i , y_j , e^{x_i y_j} \qquad (i = 1, 2; y = 1, 2)$$

sont algébriquement indépendants.

On en déduirait en particulier que si a est algébrique, $a \neq 0$, 1 et b quadratique, les deux nombres $\log a$ et a^b sont algébriquement indépendants. Par exemple, π et e^π seraient alors algébriquement indépendants.

Notations. Soit L un corps de nombres, (c'est-à-dire une extension finie de $\mathbf{Q}$) a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n éléments de L. On notera $\|(a_i)\|$ le maximum des valeurs absolues (ordinaires) des conjugués des a_i sur $\mathbf{Q}$; un *dénominateur* de (a_i) sera un élément Δ de l'anneau I_L des entiers de L, tel que

$$\Delta a_i \in I_L \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n.$$

La hauteur d'un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ sera le maximum des valeurs absolues des coefficients de ce polynôme.

II. Lemmes Auxiliaires

Nous rappelons, dans ce chapitre, trois lemmes qui seront utilisés dans la démonstration du théorème.

Le premier de ces lemmes est dû à Siegel et donne des conditions suffisantes pour résoudre un système d'équations linéaires homogènes à coefficients algébriques.

LEMME 1 [5]. *Soit L un corps de nombres. Soit*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant r, \qquad r < n,$$

un système de r équations à n inconnues à coefficients dans L. Soit $A = \| \alpha_{i,j} \|$ *et* d_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *un dénominateur de* $(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n})$, *soit* $d = \max d_i$. *Alors il existe une solution non triviale* $X = (x_1, \ldots, x_n)$ *dans* I_L *telle que*

$$\| X \| \leqslant C_1 (C_2 n\, dA)^{r/n-r} + C_1 \tag{1}$$

où C_1 *et* C_2 *sont des constantes ne dépendant que de L.*

Démonstration. Voir Lang [5, ch. I, §2].

Le second lemme a été pour la première fois formulé par Gel'fond [3] puis généralisé par Mahler [6]. Voici l'énoncé de Gel'fond.

LEMME 2 (Gel'fond [3], [4]). *Soit N une variable entière positive, P, Q, R des fonctions entières positives de N telles que* $PQ = M$ *tende vers* $+\infty$ *avec N. A chaque valeur de N on associe deux ensembles de nombres complexes,* $\alpha_1, \ldots, \alpha_Q$ *et* $\beta_1, \ldots, \beta_R$, *distincts deux à deux. On suppose qu'il existe des constantes positives* $\epsilon, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ *et une constante* γ *telles que* $P < Q^\gamma$, $\gamma_0 + \gamma_1 < 1$, *et*

(i) $\quad | \beta_k | < M^{\gamma_0} \qquad 1 \leqslant k \leqslant R$

(ii) $\quad | \alpha_e | < M^{\gamma_1} \qquad 1 \leqslant e \leqslant Q$

(iii) $\quad \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{Q} | \alpha_i - \alpha_k | > e^{-\gamma_2 Q \log M} \qquad 1 \leqslant i \leqslant Q$

(iv) $\quad | \alpha_i - \alpha_k | > e^{-\gamma_2 Q \log M} \qquad 1 \leqslant k \leqslant Q, \qquad 1 \leqslant i \leqslant Q.$

Alors il existe un entier N_0 *tel que, pour tout* $N > N_0$, *si*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{s=1}^{Q} A_{k,s} z^k e^{z\alpha_s}$$

où $A_{k,s}$ *sont des nombres complexes non tous nuls, et si* R_1 *est un entier tel que*

$$RR_1 \geqslant [\lambda M], \qquad \lambda = (1 + \gamma_0 + 2\gamma_2 + \epsilon)/(1 - \gamma_1 - \gamma_0),$$

alors l'un au moins des nombres

$$f^{(s)}(\beta_k), \qquad 0 \leqslant s \leqslant R_1 - 1, \qquad 1 \leqslant k \leqslant R$$

est différent de zéro.

On peut améliorer le Lemme 2 en supprimant les hypothèses (iii) et (iv) [10].

Le troisième lemme est une généralisation d'un lemme de Gel'fond ([3], Lemme VII ou [4] ch. III, Lemme VII). Il donne une condition suffisante (et trivialement nécessaire) pour qu'un nombre soit algébrique.

LEMME 3 [10]. *Soient* $\alpha \in \mathbf{C}$, $\epsilon > 0$, σ_1 *et* σ_2 *deux fonctions réelles de variable réelle* x, *strictement croissantes, qui tendent vers* $+\infty$ *avec* x; *soient* $a_1(x)$ *et* $a_2(x)$ *deux fonctions réelles de* x, *supérieures à* 1. *On suppose que, pour tout* $x > 0$, *on a*:

$$\sigma_2(x) \leqslant \sigma_1(x); \qquad \sigma_i(x+1) \leqslant a_i(x)\,\sigma_i(x) \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

On suppose qu'il existe un entier N_0 *positif et, pour tout entier* $N > N_0$, *un polynôme* $P_N \in \mathbf{Z}[X]$, *non nul, de hauteur* H_N *et de degré* d_N *tel que*

$$\begin{aligned} |P_N(\alpha)| &< \exp\{-c(N)\,\sigma_1(N)\,\sigma_2(N)\} \\ \log H_N &\leqslant \sigma_1(N); \qquad d_N \leqslant \sigma_2(N) \end{aligned} \tag{3}$$

où $c(N) = \max[10+\epsilon, (4+\epsilon)\sup_{N-1\leqslant x<N} a_1(x)\,a_2(x)]$. *Alors* α *est algébrique, et il existe un entier* N_1 *tel que, pour* $N > N_1$, *on ait*: $P_N(\alpha) = 0$.

III. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

La démonstration utilise la méthode de Gel'fond–Baker [1, 3, 4] et se décompose en plusieurs étapes:

Soit t_0 un nombre entier assez grand et supposons le théorème faux.

(1) Le Lemme 1 permet de construire une fonction F entière telle que

$$F^{(m)}(ay_1 + by_2) = 0 \qquad \text{pour} \quad \begin{aligned} &0 \leqslant a \leqslant [t_0(\log t_0)^{-1/2}] - 1, \\ &0 \leqslant b \leqslant [t_0(\log t_0)^{1/2}] - 1, \\ &0 \leqslant m \leqslant [t_0^2(\log t_0)^{-1/2}] - 1. \end{aligned}$$

(2) Grâce au principe du maximum, on peut majorer les dérivées de F sur le disque $|t| \leqslant t_0 \log t_0$. On a alors

$$|F^{(s)}(t)| \leqslant \exp -\tfrac{1}{2}t_0^4(\log t_0)^{1/2}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant \tfrac{1}{2}[t_0^2(\log t_0)^{-1/2}] - 1.$$

(3) Le Lemme 2 montre que les nombres

$$\{F^{(s)}(a_1y_1 + b_1y_2) \text{ tels que } |\, |a_1y_1 + b_1y_2| \leqslant t_0 \log t_0, \quad 0 \leqslant s \leqslant \tfrac{1}{2}[t_0^2(\log t_0)^{-1/2}] - 1\}$$

ne sont pas tous nuls.

(4) La condition 3 entraîne l'existence d'une suite de polynômes P_N vérifiant les relations (3) du Lemme 3 pour un nombre α transcendant, ce qui donne la contradiction cherchée.

Soient x_1 et $x_2 \in \mathbf{C}$ linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, y_1 et $y_2 \in \mathbf{C}$ linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$ tels que $e^{x_1 y_2}$ et $e^{x_2 y_2}$ soient algébriques, et que le corps obtenu en adjoignant à $\mathbf{Q}$ les six nombres

$$x_1, x_2, y_1, y_2, e^{x_1 y_1}, e^{x_2 y_1},$$

soit de degré de transcendance sur $\mathbf{Q} \leqslant 1$. Nous voulons aboutir à une contradiction qui démontrera le théorème. On pose:

$$L = \mathbf{Q}(e^{x_1 y_2}, e^{x_2 y_2}) \qquad \text{et} \qquad K = L(x_1, x_2, y_1, y_2, e^{x_1 y_1}, e^{x_2 y_1}).$$

On sait que, si $\alpha \neq 0$ est algébrique, e^α est transcendant ([4], [5], ou [7]). Donc K est une extension de $\mathbf{Q}$ de degré de transcendance 1, et il existe ω, $\omega_1 \in K$ tels que

$$K = \mathbf{Q}(\omega, \omega_1); \qquad \text{donc} \qquad K = L(\omega, \omega_1)$$

où ω est transcendant sur $\mathbf{Q}$ et ω_1 est entier sur $\mathbf{Z}[\omega]$. On pose

$$d = [K : L(\omega)].$$

Un élément de $\mathbf{Z}[\omega, \omega_1]$ se décompose de façon unique sous la forme:

$$x = \sum_{h=0}^{d-1} \sum_{k=0}^{N} a_{h,k} \omega_1{}^h \omega^k, \qquad a_{h,k} \in Z;$$

on dit alors que x est de *degré* $\leqslant N$.

Tout élément de K est alors quotient de deux éléments de $\mathbf{Z}[\omega, \omega_1]$. On a

$$x_1 = \frac{N_1}{N_0}, \quad x_2 = \frac{N_2}{N_0}, \quad y_1 = \frac{N_3}{N_0}, \quad y_2 = \frac{N_4}{N_0}, \quad e^{x_1 y_1} = \frac{N_5}{N_0}, \quad e^{x_2 y_1} = \frac{N_6}{N_0}$$

où N_i $(0 \leqslant i \leqslant 6)$ sont des éléments de $\mathbf{Z}[\omega, \omega_1]$.

Soit r le maximum des degrés des N_i, Δ un dénominateur de $(e^{x_1 y_2}, e^{x_2 y_2})$.

Soit $t_0 \in \mathbf{N}$ arbitrairement grand. (t_0 sera minoré par un nombre fini d'inégalités). *On pose*

$$s_0 = [t_0{}^2 (\log t_0)^{1/2}], \qquad t_2 = [t_0 (\log t_0)^{1/2}], \qquad t_1 = [t_0 (\log t_0)^{-1/2}]$$
$$p = 12 r s_0, \tag{4}$$

k_i, $i \in \mathbf{N}$ seront des constantes indépendantes de t_0.

LEMME 4. *Il existe une famille d'entiers de L non tous nuls,*

$$q(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \qquad \begin{array}{ll} 0 \leqslant \lambda_0 \leqslant s_0 - 1 & 0 \leqslant \lambda_3 \leqslant p - 1 \\ 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 2t_0 - 1 & 0 \leqslant \lambda_4 \leqslant d - 1 \\ 0 \leqslant \lambda_2 \leqslant 2t_0 - 1 & \end{array}$$

majorés par:

$$\| q(\lambda) \| \leqslant \exp k_0 t_0^2 (\log t_0)^{1/2}$$

et tels que la fonction F définie par

$$F(z) = \sum_{\lambda_0=0}^{s_0-1} \sum\sum_{\lambda_1,\lambda_2=0}^{2t_0-1} \sum_{\lambda_3=0}^{p-1} \sum_{\lambda_4=0}^{d-1} q(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)\, z^{\lambda_0} e^{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) z} \omega^{\lambda_3} \omega_1^{\lambda_4} \tag{5}$$

vérifie

$$F^{(m)}(ay_1 + by_2) = 0 \qquad \textit{pour} \quad \begin{array}{l} a = 0, 1, \ldots, t_1 - 1 \\ b = 0, 1, \ldots, t_2 - 1 \\ m = 0, 1, \ldots, s_0 - 1. \end{array} \tag{6}$$

Démonstration. On notera de façon abrégée $\sum_{(\lambda)} q(\lambda) \cdots$ pour

$$\sum_{\lambda_0=0}^{s_0-1} \sum\sum_{\lambda_1,\lambda_2=0}^{2t_0-1} \sum_{\lambda_3=0}^{p-1} \sum_{\lambda_4=0}^{d-1} q(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \cdots$$

$$F^{(m)}(z) = \sum_{(\lambda)} \sum_{\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2=m} q(\lambda) \frac{m!}{\sigma_0!\, \sigma_1!\, \sigma_2!} \frac{\lambda_0\,!}{(\lambda_0 - \sigma_0)!} \lambda_1^{\sigma_1} \lambda_2^{\sigma_2} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \tag{7}$$
$$\cdot z^{\lambda_0 - \sigma_0} \cdot e^{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) z} \cdot \omega^{\lambda_3} \omega_1^{\lambda_4}.$$

Pour $z = ay_1 + by_2$, on a

$$z^{\lambda_0 - \sigma_0} e^{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) z} = \sum_{i=0}^{\lambda_0 - \sigma_0} \frac{(\lambda_0 - \sigma_0)!}{(\lambda_0 - \sigma_0 - i)!\, i!} a^i b^{\lambda_0 - \sigma_0 - i}$$
$$\times e^{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(ay_1 + by_2)} y_1^{\ i} y_2^{\lambda_0 - \sigma_0 - i};$$

donc $N_0^{6s_0} \Delta^{4t_0 t_2} F^{(m)}(ay_1 + by_2)$, pour $0 \leqslant a \leqslant t_1 - 1$, $0 \leqslant b \leqslant t_2 - 1$, est un élément de $I_L[\omega, \omega_1]$. Ainsi il s'écrit:

$$\sum_{h=0}^{\tau-1} \sum_{h_1=0}^{d-1} \left(\sum_{(\lambda)} q(\lambda)\, A^{a,b,m}_{(\lambda),h,h_1} \right) \omega^h \omega_1^{h_1},$$

où

$$A^{a,b,m}_{(\lambda),h,h_1} \in I_L \qquad \text{et} \qquad \tau \leqslant 24 r s_0 .$$

D'autre part, d'après (4) et (7), on a

$$\| A^{a,b,m}_{(\lambda),h,h_1} \| \leqslant \exp k t_0^2 (\log t_0)^{1/2},$$

où k est une constante indépendante de t_0.

Considérons le système linéaire homogène en $q(\lambda)$:

$$\sum_{(\lambda)} q(\lambda)\, A^{a,b,m}_{(\lambda),h,h_1} = 0 \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant a \leqslant t_1 - 1 \\ 0 \leqslant b \leqslant t_2 - 1 \\ 0 \leqslant h \leqslant \tau - 1 \\ 0 \leqslant h_1 \leqslant d - 1 \\ 0 \leqslant m \leqslant s_0 - 1 \end{array}$$

Soit $24dr\, t_0^2 s_0^2$ équations à $48dr\, t_0^2 s_0^2$ inconnues; à coefficients dans I_L. D'après le Lemme 1, il existe une solution dans I_L non triviale telle que

$$\| q(\lambda) \| \leqslant \exp k_0 t_0^2 (\log t_0)^{1/2}, \tag{8}$$

où k_0 est une constante indépendante de t_0.

LEMME 5. *La fonction F définie au Lemme 4 par (5) possède la propriété: quel que soit $t \in \mathbf{C}$ tel que $|t| \leqslant t_0 \log t_0$, et quel que soit s tel que $0 \leqslant s \leqslant [s_0/2] - 1$, on a*

$$| F^{(s)}(t) | < \exp -\tfrac{1}{2} t_0^4 (\log t_0)^{1/2}. \tag{9}$$

Démonstration. Pour $0 \leqslant s \leqslant [s_0/2] - 1$, la fonction $F^{(s)}(z)$ admet les zéros

$$z = a y_1 + b y_2 \qquad 0 \leqslant a \leqslant t_1 - 1 \qquad 0 \leqslant b \leqslant t_2 - 1$$

d'ordre au moins $[s_0/2]$ d'après le Lemme 4. Donc la fonction

$$G(z) = F^{(s)}(z) \prod_{a=0}^{t_1-1} \prod_{b=0}^{t_2-1} (z - a y_1 - b y_2)^{-[s_0/2]} \tag{10}$$

est entière. On lui applique le principe du maximum sur le disque $|z| \leqslant t_0 s_0$

$$\sup_{|z| \leqslant t_0 s_0} | G(z) | \leqslant (t_0 s_0 - k_1 t_2)^{-t_0^2 s_0/2} \cdot \sup_{|z| = t_0 s_0} | F^{(s)}(z) |. \tag{11}$$

D'après (4), (7) et (8), on voit qu'il existe une constante k_3, indépendante de t_0, telle que

$$\sup_{|z| = t_0 s_0} | F^{(s)}(z) | \leqslant k^{t_0^2 s_0}. \tag{12}$$

Pour $|t| \leqslant t_0 \log t_0$, on a, d'après (4),

$$0 \leqslant a \leqslant t_1 - 1 \leqslant t_0(\log t_0)^{-1/2}$$
$$0 \leqslant b \leqslant t_2 - 1 \leqslant t_0(\log t_0)^{1/2}.$$

Donc

$$|t - ay_1 - by_2| \leqslant 2t_0 \log t_0 . \tag{13}$$

En utilisant (10), (11), (12), et (13), on obtient

$$|F^{(s)}(t)| \leqslant \left(\frac{t_0 s_0 - k_1 t_2}{2t_0 \log t_0}\right)^{-t_0^2 s_0/2} \cdot k_3^{t_0^2 s_0} < \exp -\frac{1}{2} t_0^4 (\log t_0)^{1/2}.$$

Lemme 6. *Soit F la fonction entière définie au Lemme* 4 *par* (5). *Il existe trois entiers* a_1, b_1, s_1 *tels que*

$$\begin{matrix} 0 \leqslant a_1 \leqslant 14t_1 - 1 \\ 0 \leqslant b_1 \leqslant 14t_2 - 1 \end{matrix} \qquad 0 \leqslant s_1 \leqslant [s_0/2] - 1 \tag{14}$$

et

$$F^{(s_1)}(a_1 y_1 + a_2 y_2) \neq 0.$$

Démonstration. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{4t_0^2}$ (resp. $\beta_1, \ldots, \beta_{(14t_0)^2}$) les nombres $\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 2t_0 - 1\}$ (resp. les nombres $\{ay_1 + by_2 \mid 0 \leqslant a \leqslant 14t_1 - 1, 0 \leqslant b \leqslant 14t_2 - 1\}$) qui sont deux à deux distincts puisque x_1 et x_2 (resp. y_1 et y_2) sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Utilisons le Lemme 2 avec

$$P = s_0 ; \qquad Q = 4t_0^2; \qquad R = 14t_0^2; \qquad R_1 = [s_0/2];$$
$$\epsilon = \gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \tfrac{1}{3}; \qquad \lambda = 7; \qquad \gamma = 1.$$

Comme x_2/x_1 est le quotient de deux logarithmes de nombres algébriques d'après un théorème de Gel'fond [4] (que Baker a généralisé [1]), il existe un entier N_0 tel que, pour tout N, n_1, n_2 entiers rationnels avec $N > N_0$, $|n_i| \leqslant N$, on ait

$$\left| n_1 + n_2 \frac{x_2}{x_1} \right| > e^{-(\log N)^3}. \tag{O}$$

La condition (iv) du Lemme 2 est une conséquence de (O). Montrons que la condition (iii) est vérifiée. Soit $x_0 = x_2/x_1$.

Soient a un nombre complexe, N et p deux nombres entiers, $N > 0$. Il existe un entier s tel que $0 \leqslant s \leqslant N$ et

$$\prod_{k=p}^{N+p} |a-k| \geqslant \tfrac{1}{2}s!\,(N-1-s)! \min_{p \leqslant k \leqslant N+p} |a-k|$$
$$\geqslant 2^{-N-2}(N-1)! \min_{p \leqslant k \leqslant N+p} |a-k|.$$

D'où, pour tout λ_1 et λ_2 avec

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 2t_0 - 1; \qquad 0 \leqslant \lambda_2 \leqslant 2t_0 - 1,$$

$$\prod_{\substack{k_1=-\lambda_1 \\ k_1^2+k_2^2\neq 0}}^{2t_0-\lambda_1-1} \prod_{k_2=-\lambda_2}^{2t_0-\lambda_2-1} \cdot |k_1x_1 + k_2x_2|$$
$$> x_1^{4t_0^2-1} \cdot 2^{-2t_0(2t_0-1)} \cdot (2t_0-1)!^{(2t_0-1)} \cdot \prod_{\substack{k_2=-\lambda_2 \\ k_2\neq 0}}^{2t_0-\lambda_2-1} \min_{|k_1| \leqslant 2t_0-1} |k_1 + k_2x_0|.$$

Pour k_1 et k_2 entiers vérifiant

$$-\lambda_2 \leqslant k_2 \leqslant 2t_0 - \lambda_2 - 1, \qquad k_2 \neq 0, \qquad |k_1| \leqslant 2t_0 - 1,$$

on a, d'après (O),

$$|k_1 + k_2x_0| > e^{-(\log 2t_0)^3}.$$

Donc

$$\prod_{\substack{k_2=-\lambda_2 \\ k_2\neq 0}}^{2t_0-\lambda_2-1} \min_{|k_1| \leqslant 2t_0-1} |k_1 + k_2x_0| \geqslant e^{-2t_0(\log 2t_0)^3}.$$

D'où

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant 4t_0^2} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{q} |\alpha_i - \alpha_k| = \min_{\substack{0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 2t_0-1 \\ 0 \leqslant \lambda_2 \leqslant 2t_0-1}} \prod_{\substack{k_1=-\lambda_1 \\ k_1^2+k_2^2\neq 0}}^{2t_0-\lambda_1-1} \prod_{k_2=-\lambda_2}^{2t_0-\lambda_2-1} |k_1x_1 + k_2x_2|$$
$$> e^{-\gamma_2 Q \log M}.$$

LEMME 7. *Le nombre ω vérifie les hypothèses du Lemme* 3.

Comme on sait que ω est transcendant, le Lemme 7 terminera la démonstration.

Démonstration du Lemme 7. Les formules (4) et (7) montrent que

$$q(\omega_1) = \Delta^{56t_0t_2} N_0^{70s_0} F^{(s_1)}(a_1y_1 + b_1y_2) \tag{15}$$

est un élément de $I_L[\omega, \omega_1]$.

On pose

$$P_{t_0}(\omega) = N_{K/\mathbf{Q}(\omega)} q(\omega_1) \tag{16}$$

où $N_{K/\mathbf{Q}(\omega)}$ est la norme de K sur $\mathbf{Q}(\omega)$. Alors $P_{t_0}(\omega)$ est un élément de $\mathbf{Q}(\omega)$ entier sur $\mathbf{Z}[\omega]$; comme $\mathbf{Z}[\omega]$ est intégralement clos,

$$P_{t_0}(\omega) \in \mathbf{Z}[\omega].$$

La clôture intégrale de $\mathbf{Z}[\omega]$ dans $L(\omega)$ étant $I_L[\omega]$, on a

$$r(\omega) = N_{K/L(\omega)} q(\omega_1) \in I_L[\omega].$$

De plus

$$r(\omega) = \prod_{i=1}^{d} q(\omega_i) \qquad \text{et} \qquad P_{t_0}(\omega) = N_{L(\omega)/\mathbf{Q}(\omega)}(r(\omega)),$$

où

$$\omega_1, ..., \omega_d \text{ sont les conjugués de } \omega_1 \text{ sur } L(\omega).$$

Donc le degré de $r(\omega)$ vérifie

$$\deg(r(\omega)) \leqslant \exp k_5 t_0^2 (\log t_0)^{-1/2}.$$

Donc P_{t_0} est un polynôme de degré d_{t_0} et de hauteur H_{t_0} avec

$$d_{t_0} \leqslant k_7 t_0^2 (\log t_0)^{-1/2}, \qquad H_{t_0} \leqslant \exp k_6 t_0^2 (\log t_0)^{1/2}.$$

De plus, pour $2 \leqslant i \leqslant d$, d'après (7) et (8), il existe une constante k_8 indépendante de t_0 telle que

$$| q(\omega_i)| \leqslant \exp k_8 t_0^2 (\log t_0)^{1/2}. \tag{17}$$

Or, d'après (4), (9) et (15)

$$| q(\omega_1)| \leqslant \exp -\tfrac{1}{3} t_0^4 (\log t_0)^{1/2}. \tag{18}$$

Donc, en utilisant (16), (17), et (18), on a:

$$| P_{t_0}(\omega)| \leqslant \exp -\tfrac{1}{4} t_0^4 (\log t_0)^{1/2}.$$

On pose:

$$t_0 = N, \qquad \sigma_1(t_0) = k_8 t_0^2 (\log t_0)^{1/2}, \qquad a_1 = a_2 = \sqrt{2},$$
$$\sigma_2(t_0) = k_7 t_0^2 (\log t_0)^{-1/2},$$

et les conditions précédentes s'écrivent:

$$\begin{aligned} |P_N(\omega)| &\leqslant \exp -12\sigma_1(N)\,\sigma_2(N), \\ \log H_N \leqslant \sigma_1(N), &\qquad d_N \leqslant \sigma_2(N), \end{aligned} \tag{3}$$

ce qui termine la démonstration.

Added in proof. D. Brownawell a aussi trouvé ces résultats; sa solution, obtenue indépendement de la mienne, doit paraître également au "Journal of Number Theory."

Reconnaissance

Je voudrais, en terminant, témoigner ma gratitude à Jean Fresnel qui a dirigé mes travaux de recherche pour l'élaboration de cette publication.

Bibliographie

1. A. Baker, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, *Mathematika*, **13** (1966), 204–216; II, *id.* **14** (1967), 102–107; III, *id.* **14** (1967), 220–228; IV, *id.* **15** (1968), 204–216.
2. A. O. Gel'fond, The approximation of algebraic numbers by algebraic numbers and the theory of transcendental numbers (en russe), *Uspehi Math. Nauk* **4** (1949), 19–49 (traduction anglaise: *Amer. Math. Soc. Transl.* **2** (1962), 81–124).
3. A. O. Gel'fond, On the algebraic independence of transcendental numbers of certain classes (en russe), *Uspehi Math. Nauk* **5** (1949), 14–48 (traduction anglaise: *Amer. Math. Soc. Transl.* **2** (1962), 125–169).
4. A. O. Gel'fond, "Transcendental and algebraic numbers" (en russe), Moscou, 1952 (traduction anglaise: Dover Publ., New York, 1960).
5. S. Lang, "Introduction to transcendental numbers," Addison-Wesley, Reading, MA, 1966.
6. K. Mahler, On a class of entire functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967), 83–96.
7. T. Schneider, "Einführung in die transzendenten Zahlen," Springer, Berlin, 1957 [traduction française: Gauthier-Villars, Paris, 1959].
8. A. A. Smelev, On algebraic independence of some numbers. [en russe] *Math. Zametki* **4** (1968), 525–532.
9. M. Waldschmidt, Solution d'un problème de Schneider sur les nombres transcendants, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A*, **271** (1970), 697–700.
10. M. Waldschmidt, Indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle, *Bull. Soc. Math. France* **99** (1971), 285–304.