Université P. et M. Curie (Paris VI) Maîtrise de Mathématiques 2000/2001
Michel Waldschmidt

Théorie des Groupes

Éxamen écrit - jeudi 6 juin 2002- durée: 4 heures

Les documents ne sont pas autorisés

Les exercices sont indépendants

$\boxed{1}$ Soient G un groupe fini, H un sous-groupe normal de G et P un sous-groupe de Sylow de H. On note $N_G(P)$ le normalisateur de P dans G:

$$N_G(P) = \{x \in G \; ; \; xP = Px\}.$$

Vérifier

$$G = HN_G(P).$$

$\boxed{2}$ Soient p un nombre premier, G un groupe fini, H un sous-groupe normal de G et Q un p-sous-groupe de Sylow de G/H.
a) Montrer qu'il existe un p-sous-groupe de Sylow P de G dont l'image $(PH)/H$ dans G/H est Q.
b) On suppose que H est un p-groupe. Montrer que P est unique.

$\boxed{3}$ Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
a) Soit ϕ un automorphisme du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. On suppose que ϕ transforme toute transposition en une transposition. Montrer que ϕ est un automorphisme intérieur.
b) Soit τ un élément de $\mathfrak{S}_n$; on peut écrire τ comme produit de k transpositions à supports disjoints. Montrer que le centralisateur

$$C(\tau) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \; ; \; \sigma\tau = \tau\sigma\}$$

de τ dans $\mathfrak{S}_n$ contient un sous-groupe normal d'ordre 2^k.

$\boxed{4}$ On considère les trois matrices

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Soit H le groupe non cyclique d'ordre 4. On note $\{a, b\}$ un système générateur de H. On considère la représentation linéaire ϱ de H de degré 3 donnée sous forme matricielle par

$$\varrho_a = R_1, \qquad \varrho_b = R_2.$$

Décomposer le caractère de ϱ en somme de caractères irréductibles.
b) Soit G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ engendré par R_1, R_2, S. Vérifier que G est d'ordre 12. L'inclusion de G dans $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ est une représentation de G. Soit χ son caractère. calculer le produit scalaire $(\chi \mid \chi)$. En déduire la table des caractères de G. Écrire les classes de conjugaison de G.

$\boxed{5}$ Soient G un groupe cyclique fini d'ordre n, H un sous-groupe d'ordre d.
a) Écrire sous forme matricielle la représentation régulière de G.
b) Soit ϱ une représentation irréductible de H. Écrire sous forme matricielle la représentation $\mathrm{Ind}_H^G \varrho$ de G induite par ϱ.

$\boxed{6}$ Soit G un groupe fini d'ordre g. On note e son élément neutre.
a) Soient $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible de G de degré n, χ son caractère, K une classe de conjugaison de G, k le nombre d'éléments de K et x un élément de K. Montrer que

$$\sum_{t \in K} \varrho_t$$

est une homothétie de V. Calculer son rapport en fonction de n, k et $\chi(x)$.
b) Soient $\chi_1, \ldots, \chi_h$ les caractères irréductibles de G. Pour $1 \leq i \leq h$ on note $\varrho^i : G \to \mathrm{GL}(V_i)$ la représentation irréductible associée à χ_i et n_i son degré. Pour $1 \leq i \leq h$, $1 \leq j \leq h$ et $v \in V_i$, vérifier

$$\frac{n_j}{g} \sum_{s \in G} \chi_j(s^{-1}) \varrho_s^i(v) = \delta_{ij} v$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.
c) On définit

$$p_j = \frac{n_j}{g} \sum_{s \in G} \chi_j(s^{-1}) s \in \mathbb{C}[G] \quad (1 \leq j \leq h).$$

Vérifier

$$p_i p_j = \delta_{ij} p_i \quad (1 \leq i, j \leq h)$$

et

$$p_1 + \cdots + p_h = 1.$$