

CHAPITRE 2

CONVEXITÉ EN DIMENSION FINIE. POLYTOPES RÉGULIERS DE DIMENSION 3

Dans tout ce chapitre, \mathcal{E} désigne un espace affine de direction E , où E est un \mathbb{R} -espace vectoriel *euclidien*, i.e. E est de dimension finie et muni d'un produit scalaire, donc de la norme euclidienne associée.⁽¹⁾ Un repère **orthonormé** centré en un point $O \in \mathcal{E}$ est un repère affine (O, \mathcal{B}) , où \mathcal{B} est une base *orthonormée* de E .

8. Convexes : définitions, polygones réguliers, théorème de Hahn-Banach

On rappelle la définition du barycentre de points pondérés (A_i, t_i) , cf. chap. 1. On s'intéresse maintenant, lorsque $k = \mathbb{R}$, au cas où tous les poids t_i sont ≥ 0 (et donc dans $[0, 1]$ puisque de somme égale à 1).

Terminologie. — Soient $A, B \in \mathcal{E}$. Le **segment** $[A, B] = [B, A]$ est l'ensemble des points $(1-t)A + tB = A + t\overrightarrow{AB} = B + (1-t)\overrightarrow{BA}$, avec $t \in [0, 1]$.

Plus généralement, soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$. On appelle « *combinaison convexe* » des A_i tout point P de la forme $P = t_1A_1 + \dots + t_nA_n$ où les t_i sont des réels de somme 1 et tous ≥ 0 , donc tous dans $[0, 1]$.

Définition 8.1. — Une partie \mathcal{C} de \mathcal{E} est dite **convexe** si elle contient le segment qui joint deux quelconques de ses points, c.-à-d. si pour tout $A, B \in \mathcal{C}$ on a $[A, B] \subset \mathcal{C}$.⁽²⁾ Au lieu de dire « une partie convexe » on dira aussi « un convexe ».

Exemples. — (a) Dans \mathbb{R} , une partie est convexe ssi c'est un intervalle.

(b) Dans un plan euclidien \mathcal{P} , les points intérieurs (bord inclus) à un triangle, un carré ou un cercle forment une partie convexe.

(c) Dans un espace euclidien \mathcal{E} de dimension 3, les points intérieurs (bord inclus) à un tétraèdre, un cube ou une sphère forment une partie convexe.

Proposition 8.2. — *Tout convexe C de \mathcal{E} est stable par combinaisons convexes, c.-à-d. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in C$ et $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, le point $p = t_1x_1 + \dots + t_nx_n$ appartient à C .*

Démonstration. — Si $n = 1$ c'est évident et si $n = 2$ ceci est la définition de la convexité. Supposons donc $n > 2$ et le résultat établi pour $n - 1$. Avec les notations de l'énoncé, montrons que $p = t_1x_1 + \dots + t_nx_n$ appartient à C . Si $t_n = 1$ alors $p = x_n$ et c'est ok, donc

⁽¹⁾La plupart des résultats sont valables aussi pour un \mathbb{R} -ev arbitraire muni d'une norme quelconque, mais les énoncés et démonstrations sont plus simples dans le cas euclidien, qui est le cas qui nous intéresse pour l'étude des polygones réguliers du plan et polytopes réguliers de l'espace.

⁽²⁾On voit donc que la notion de convexité est valable dans tout espace affine réel et ne nécessite pas l'existence d'une structure euclidienne.

on peut supposer $t_n < 1$. Alors $t = t_1 + \dots + t_{n-1} = 1 - t_n$ est > 0 de sorte qu'on peut poser $\lambda_i = t_i/t$ pour $i = 1, \dots, n-1$. Les λ_i sont ≥ 0 et de somme égale à 1 donc, par hypothèse de récurrence, le point

$$q = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{t} x_i$$

appartient à C . De plus, on a $p = tq + (1-t)x_n$ donc $p \in C$. \square

Remarque 8.3. — Si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille de parties convexes de \mathcal{E} , leur intersection C est convexe. En effet, si $x, y \in C$ alors le segment $[x, y]$ est contenu dans C_i pour tout $i \in I$, donc dans C .

Définition et proposition 8.4. — Soit X une partie non vide de \mathcal{E} .

(i) Son **enveloppe convexe** $\text{Conv}(X)$ est l'ensemble des combinaisons convexes de points de X , i.e. un point p de \mathcal{E} appartient à $\text{Conv}(X)$ ssi il existe un entier $n \geq 1$, des points x_1, \dots, x_n de X et des réels $t_i \in [0, 1]$ de somme 1 tels que $p = t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$.

(ii) $\text{Conv}(X)$ est la plus petite partie convexe contenant X .

Notation. Il est commode, même si X est un ensemble infini, de représenter un élément de $\text{Conv}(X)$ par une somme $\sum_{x \in X} t_x x$, avec la convention que les t_x sont ≥ 0 , de somme égale à 1 (donc tous dans $[0, 1]$) et nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Démonstration de (ii). — D'après la proposition 8.2, toute partie convexe contenant X contient aussi $\text{Conv}(X)$, donc il suffit de vérifier que $\text{Conv}(X)$ est convexe. Or, si $p = \sum_{x \in X} s_x x$ et $q = \sum_{x \in X} t_x x$ en sont deux éléments et si $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$\lambda p + (1 - \lambda)q = \sum_{x \in X} (\lambda s_x + (1 - \lambda)t_x) x,$$

et les coefficients $\lambda s_x + (1 - \lambda)t_x$ sont bien dans $[0, 1]$ (car le segment $[0, 1]$ est convexe!) et nuls sauf si $s_x \neq 0$ ou $t_x \neq 0$, ce qui n'est le cas que pour un nombre fini de x . \square

Exemples. — (a) Soient A, B dans \mathcal{E} , leur enveloppe convexe est le segment $[A, B]$; si A, B, C sont non alignés, leur enveloppe convexe est le triangle⁽³⁾ dont ils sont les sommets.

(b) Dans un plan euclidien \mathcal{P} , si A, B, C, D sont les quatre sommets d'un rectangle, leur enveloppe convexe est ce rectangle; et si X est le cercle de centre A et de rayon r , son enveloppe convexe est le disque fermé de centre A et de rayon r (cf. ci-dessous).

Dans la suite, on aura besoin de dire, par exemple, que le carré (resp. disque) « ouvert » :

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\} \quad \text{resp.} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

sont des convexes « ouverts », tandis que le carré et le disque « fermés », définis par les mêmes inégalités mais prises au sens large, sont des convexes « fermés ». Pour pouvoir parler de parties « ouvertes » ou « fermées », faisons quelques rappels de topologie.

Rappels 8.5 (de topologie). — Si $x, y \in E$, on note $(x \mid y)$ leur produit scalaire.⁽⁴⁾ Alors E est muni de la norme euclidienne, définie par $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$, et \mathcal{E} est muni de la distance euclidienne, définie par $d(A, B) = AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

(1) Pour tout $A \in \mathcal{E}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, la *boule ouverte* (resp. *fermée*) de centre A et de rayon r est :

$$B(A, r) = \{M \in \mathcal{E} \mid AM < r\} \quad \text{resp.} \quad \overline{B}(A, r) = \{M \in \mathcal{E} \mid AM \leq r\}.$$

⁽³⁾Ici et dans la suite, on dira « triangle » (resp. « rectangle », etc.) pour désigner l'ensemble des points qui sont sur le bord du triangle (resp. rectangle, etc.) et à l'intérieur.

⁽⁴⁾Pour alléger la notation, on le notera parfois $x \cdot y$.

Remarquons que si \mathcal{F} est un sea de \mathcal{E} passant par A , l'intersection de $B(A, r)$ (resp. $\overline{B}(A, r)$) avec \mathcal{F} est la boule ouverte (resp. fermée) de \mathcal{F} de centre A et de rayon r .

(2) On dit qu'une partie U de \mathcal{E} est **ouverte** si pour tout $a \in U$ il existe une boule ouverte (de rayon suffisamment petit) centrée en a et contenue dans U , i.e. s'il existe $r = r_a > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Alors :

- a) \mathcal{E} et \emptyset sont des parties ouvertes (\emptyset ne contient aucun point a donc la condition est vérifiée).
- b) Toute réunion (finie ou infinie) de parties ouvertes est ouverte.
- c) Toute intersection finie de parties ouvertes U_1, \dots, U_N est ouverte. ⁽⁵⁾

Remarquons aussi que si U est un ouvert et \mathcal{F} un sea de \mathcal{E} , alors $U \cap \mathcal{F}$ est un ouvert de \mathcal{F} (éventuellement vide).

(3) On dit qu'une partie F de \mathcal{E} est **fermée** si son complémentaire est ouvert. Il résulte de ce qui précède que \mathcal{E} et \emptyset sont fermés, que toute intersection et toute réunion finie de fermés est fermée.

(4) On dit qu'une suite $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de points de \mathcal{E} **converge** vers une limite $q \in \mathcal{E}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq i_0$ on ait $qp_i < \varepsilon$, i.e. $p_i \in B(q, \varepsilon)$.

(5) On montre sans difficulté le résultat suivant :

Une partie F de \mathcal{E} est fermée ssi la propriété suivante est vérifiée : pour toute suite $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de points de \mathcal{E} qui converge vers une limite $q \in \mathcal{E}$, on a $q \in F$.

(6) Soit A une partie arbitraire de \mathcal{E} . Il existe un plus petit fermé contenant A (c'est l'intersection des fermés contenant A) ; il est noté \overline{A} et appelé **l'adhérence** de A . On dit que ses éléments sont **adhérents** à A . C'est l'ensemble des points de \mathcal{E} qui sont limite d'une suite d'éléments de A .

D'autre part, un point $p \in A$ est dit **intérieur** à A s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que A contienne la boule $B(p, r)$; on note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble de ces points et on l'appelle **l'intérieur** de A . Enfin, l'ensemble $\overline{A} - \overset{\circ}{A}$ est appelé la **frontière** (ou le **bord**) de A ; on le notera $\text{Fr}(A)$ ou ∂A . C'est l'ensemble des points qui sont à la fois adhérents à A et à son complémentaire $\mathcal{E} - A$. (En effet, si $p \in \partial A$ alors pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ la boule $B(p, 1/r)$ contient un élément q_r de $\mathcal{E} - A$ (car $p \notin \overset{\circ}{A}$) et ceci fournit une suite $(q_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{E} - A$ convergeant vers p .)

(7) Une partie X de \mathcal{E} est dite :

a) **compacte** si de toute suite $(P_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de points de X on peut extraire une sous-suite $(P_{\varphi(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point A de X .

b) **bornée** si la distance entre deux quelconques de ses points est bornée par une constante $c \in \mathbb{R}_+$, i.e. s'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $AB \leq c$ pour tous $A, B \in X$.

(7') Une partie X de \mathcal{E} est compacte ssi elle est fermée et bornée. ⁽⁶⁾

(8) Soit (\mathcal{E}', E') un second espace affine euclidien. Une application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ est **continue** si pour tout $A \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $B \in \mathcal{E}$ vérifiant $AB < \delta$, on ait $f(A)f(B) < \varepsilon$.

(8') Dans ce cas, si X est un compact de \mathcal{E} alors $f(X)$ est un compact de \mathcal{E}' .

(9) Toute application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ est continue. En effet, $f(p)f(q) = \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\| = \|\overrightarrow{f(p\vec{q})}\|$ pour tout $p, q \in \mathcal{E}$ et l'on peut montrer que toute application linéaire $\phi : E \rightarrow E'$ est **lipschitzienne**⁽⁷⁾, i.e. il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ (dépendant de ϕ) tel que $\|\phi(u)\| \leq k\|u\|$ pour tout $u \in E$.

⁽⁵⁾En effet, si a appartient à l'intersection U des U_i alors pour $i = 1, \dots, N$ il existe un réel $r_i > 0$ tel que $B(a, r_i) \subset U_i$. Donc, posant $r = \min(r_1, \dots, r_N)$, on a $B(a, r) \subset U$.

⁽⁶⁾L'hypothèse $\dim(E) < \infty$ est ici essentielle.

⁽⁷⁾Rudolf Lipschitz, mathématicien allemand (1832-1903), qui a introduit la « condition de Lipschitz » pour démontrer un fameux théorème sur les équations différentielles [obtenu dans certains cas particuliers par Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)], le « théorème de Cauchy-Lipschitz ».

Exemples. — (a) L'intérieur d'une boule fermée $\overline{B}(p, r)$ est la boule ouverte $B(p, r)$; sa frontière est la sphère $S(p, r) = \{q \in \mathcal{E} \mid pq = r\}$.

(b) Si C est le « carré fermé » $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ son intérieur est le carré ouvert, défini par les inégalités strictes $|x| < 1$ et $|y| < 1$, et sa frontière est formée des quatre côtés du carré.

Terminologie 8.6 (Demi-espaces). — Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de \mathcal{E} . Il définit deux demi-espaces ouverts (ou fermés) dont il est la frontière commune (cf. les exemples ci-dessous).

Définition 8.7. — Soit C un convexe fermé non vide de \mathcal{E} . On dit qu'un hyperplan \mathcal{H} est un **hyperplan d'appui** de C si $C \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ et si C est contenu dans l'un des deux demi-espaces fermés définis par \mathcal{H} . Dans ce cas, ce demi-espace fermé est noté $\overline{\mathcal{H}}^+$.

Exemples. — (1) Pour le rectangle $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$, les droites d'appui sont les droites D_1, \dots, D_4 d'équations $x = \pm a, y = \pm b$ et aussi toutes les droites qui passent par un sommet du rectangle et ne le rencontrent qu'en ce point. Dans cet exemple, on voit que R est l'intersection des quatre demi-plans fermés :

$$\begin{aligned} \overline{D}_1^+ &= \{(x, y) \mid x \geq -a\}, & \overline{D}_2^+ &= \{(x, y) \mid x \leq a\}, \\ \overline{D}_3^+ &= \{(x, y) \mid y \geq -b\}, & \overline{D}_4^+ &= \{(x, y) \mid y \leq b\}. \end{aligned}$$

(2) Soient $O \in \mathcal{E}$ et B (resp. S) la boule fermée (resp. la sphère) de centre O et de rayon $r > 0$. On identifie \mathcal{E} à E en prenant O comme origine.

(i) Pour tout $p \in S$, l'unique hyperplan d'appui de B passant par p est l'hyperplan tangent à S en p :

$$T_p(S) = \{x \in E \mid (x - p \mid p) = 0\}.$$

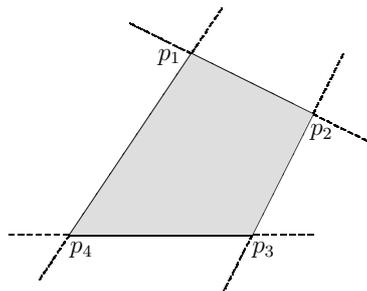
(ii) Le demi-espace fermé correspondant est $T_p^+ = \{x \in E \mid (x - p \mid p) \leq 0\}$. L'intersection de ces demi-espaces fermés égale B .

Exercice. Soit $n = \dim(E)$. Pour $n = 2$, dessiner un cercle et se convaincre des assertions ci-dessus. Essayer de les démontrer pour $n = 2$ ou n arbitraire. Indication : pour (i) et la 2ème assertion de (ii), utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour arriver rapidement à la notion de polygone convexe régulier, adoptons la définition suivante.

Définition 8.8 (Polygones convexes). — Soit n un entier ≥ 3 et soient p_1, \dots, p_n des points du plan euclidien, deux à deux distincts. On dit que ces points forment (dans cet ordre) un *n-gone convexe* si la condition suivante est vérifiée. (On pose $p_{n+1} = p_1$ et $p_0 = p_n$.)

(*) Pour chaque $i = 1, \dots, n$, tous les points p_j avec $j \neq i, i + 1$ sont contenus dans l'un des demi-plans ouverts définis par la droite $(p_i p_{i+1})$, qu'on notera \mathcal{P}_i^+ , cf. la figure suivante :

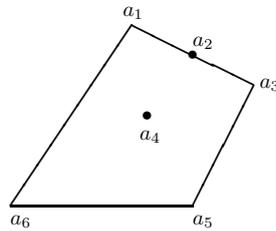


Dans ce cas, l'intersection des demi-plans fermés $\overline{\mathcal{P}_i^+}$, pour $i = 1, \dots, n$, est un convexe compact $C^{(8)}$ (en gris sur la figure) et l'on dit que les p_i (resp. les segments $[p_i, p_{i+1}]$) sont ses *sommets* (resp. *arêtes*).

Terminologie. Pour $n = 5, 6, 7, 8$ on dit pentagone, hexagone, heptagone et octogone. Pour $n = 3$ (resp. $n = 4$) on dit triangle (resp. quadrilatère) plutôt que trigone ou tétragone.

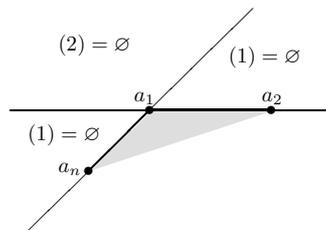
Remarque (Importante). — Dans la littérature, un polygone convexe est défini soit comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points du plan, soit comme une intersection finie de demi-plans fermés qui est compacte. Il faut un peu de travail pour démontrer que ces définitions sont équivalentes entre elles et à celle donnée plus haut. Par exemple, la proposition suivante est « évidente » si l'on fait un dessin, mais une démonstration rigoureuse nécessite un peu de travail.

Proposition 8.9. — Soient a_1, \dots, a_N des points du plan euclidien, pas tous alignés. Alors leur enveloppe convexe C est un n -gone convexe, dont les sommets sont certains des a_i :



Démonstration. — Si l'un des a_i , disons a_N , appartient à l'enveloppe convexe des autres, on le retire de la liste. Puis, si l'un des points restants, disons a_{N-1} , appartient à l'enveloppe convexe des autres, on le retire également. En continuant ce processus, on arrive à un sous-ensemble X de points a_1, \dots, a_n tels que $C = \text{Conv}(X)$ et aucun de ces a_i n'est dans l'enveloppe convexe de $X_i = X - \{a_i\}$.⁽⁹⁾

Considérons le point a_1 . Comme trois a_i ne sont jamais alignés, les angles non orientés $\widehat{a_j a_1 a_k}$ sont distincts de 0 et π , donc il existe j, k tels que cet angle atteigne son maximum θ_1 avec $0 < \theta_1 < \pi$. Quitte à renuméroter les a_i , on peut supposer que $j = n$ et $k = 2$. On a alors la figure suivante :

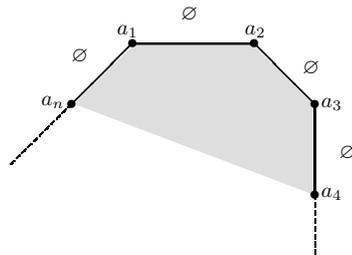


où les zones (1) ne contiennent aucun a_i en raison de la maximalité de $\theta_1 = \widehat{a_n a_1 a_2}$, et la zone (2) non plus car sinon a_1 serait contenu dans le triangle $a_n a_i a_2$. D'autre part, C contient le triangle $a_n a_1 a_2$, en gris sur la figure. Ceci montre de plus que $(n, 2)$ est l'unique couple à réaliser l'angle maximum θ_1 en a_1 , car tous les autres a_i sont dans le secteur angulaire défini par a_1, a_n, a_2 donc tout autre choix donne un angle $\theta < \theta_1$.

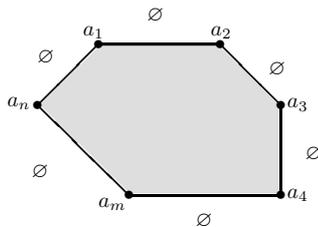
Le même raisonnement s'applique au point a_2 : il existe un unique point a_3 réalisant le maximum de l'angle θ_2 en a_2 , et ce point appartient au secteur angulaire précité. En procédant ainsi, on obtient une suite de points $a_n = a_0, a_1, \dots, a_k$ deux-à-deux distincts, où chaque angle $\widehat{a_{j-1} a_j a_{j+1}}$ est l'angle maximal en a_j , et où il n'y a aucun a_k dans la réunion des demi-plans ouverts indiqués par des \emptyset :

⁽⁸⁾Exercice : fixant un point O intérieur à C , montrer que pour tout $M \in C$ on a $OM \leq OM' \leq Op_i$, où M' est l'intersection de la demi-droite $[OM)$ avec le bord de C et p_i l'un des sommets de l'arête contenant M' . En déduire que $C \subset \overline{B}(O, r)$ où $r = \max\{Op_i \mid i = 1, \dots, n\}$.

⁽⁹⁾Il n'est pas évident *a priori* que X ne dépend **pas** de l'ordre dans lequel on retire les points ; ceci sera une conséquence du résultat final.



Comme il n'y a que n points, cette construction ne peut pas fournir indéfiniment un nouveau point a_{k+1} à chaque étape, donc il existe un entier $m \leq n - 1$ tel que $a_{m+1} = a_n$, i.e. on obtient la figure suivante :



Mais alors la réunion des zones \emptyset est le complémentaire du polygone convexe a_n, a_1, \dots, a_m , et par hypothèse celui-ci ne contient aucun autre a_k . Donc nécessairement $m = n - 1$, nos n points a_1, \dots, a_n forment un n -gone convexe, et celui-ci est l'enveloppe convexe C des N points de départ.

On voit ainsi que a_1, \dots, a_n sont uniquement déterminés (étant les sommets du n -gone convexe C) et ne dépendent donc pas de l'ordre dans lequel on a retiré des points. \square

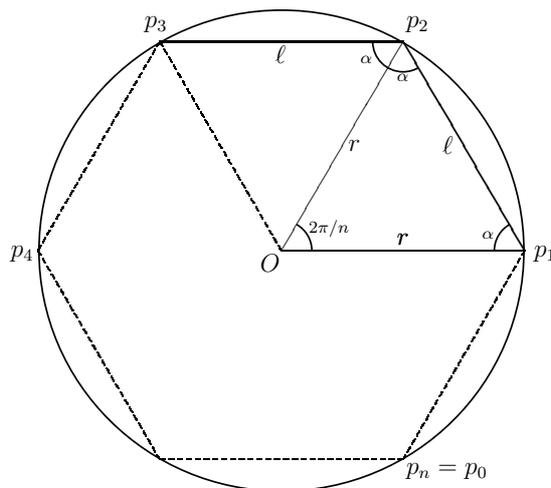
Définition 8.10. — Sous les hypothèses de 8.8, on dit que p_1, \dots, p_n forment un n -gone convexe **régulier** si de plus les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Les arêtes $[p_i, p_{i+1}]$ sont toutes d'une même longueur ℓ .

(ii) Les angles $\widehat{p_{i-1}p_i p_{i+1}}$ sont tous égaux, et donc tous égaux à $\theta = (n-2)\pi/n = \pi - \frac{2\pi}{n}$.

En effet, sachant que la somme des angles d'un triangle vaut π , on montre facilement par récurrence que, pour tout $n \geq 3$, la somme des angles d'un n -gone convexe vaut $(n-2)\pi$.

Soit alors D_1 (resp. D_2) la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{p_0 p_1 p_2}$ (resp. $\widehat{p_1 p_2 p_3}$) et soit O leur point de concours. Posant $\alpha = \theta/2$ et $r = Op_1$, on a la figure suivante :



Notant R la rotation de centre O qui envoie p_1 sur p_2 , on voit alors que $R(p_2)$ égale p_3 . Et de même $R(p_i) = p_{i+1}$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Ceci montre que les p_i sont tous situés sur le cercle de centre O et de rayon r , où r est défini par $r \sin(\pi/n) = \ell/2$, et que les angles $\widehat{p_i O p_{i+1}}$ valent tous $2\pi/n$.

Définitions 8.11. — Revenant à un espace affine euclidien (\mathcal{E}, E) quelconque, on note $\text{Is}(E)$ le groupe des isométries vectorielles de E et $\text{Is}(\mathcal{E})$ celui des isométries affines de \mathcal{E} . On rappelle que :

(1) Tout élément de $\text{Is}(E)$ est de déterminant égal à 1 ou -1 ; ceux de déterminant 1 forment le sous-groupe $\text{Is}^+(E)$ des isométries *directes* ; les autres sont dites *indirectes* et leur ensemble est noté $\text{Is}^-(E)$ (ce n'est pas un sous-groupe : le produit de deux éléments de $\text{Is}^-(E)$ est dans $\text{Is}^+(E)$).

(2) Les éléments de $\text{Is}(\mathcal{E})$ dont la partie linéaire est dans $\text{Is}^+(E)$ forment un sous-groupe $\text{Is}^+(\mathcal{E})$, appelé le groupe des isométries directes (ou *déplacements*) ; les autres sont appelés isométries indirectes ou *anti-déplacements* et leur ensemble est noté $\text{Is}^-(\mathcal{E})$.

(3) Soit X une partie non vide de \mathcal{E} . On note $\text{Is}(X)$ le sous-groupe de $\text{Is}(\mathcal{E})$ formé des isométries f de \mathcal{E} qui vérifient $f(X) = X$, et l'on définit de même $\text{Is}^+(X)$.

Revenons à notre n -gone convexe régulier P de sommets p_1, \dots, p_n . D'après ce qui précède, la rotation R envoie chaque p_i sur p_{i+1} donc fixe l'isobarycentre G des p_i . Or O est l'unique point fixe de R , d'où $O = G$. On en déduit que $\text{Is}^+(P)$ est un groupe cyclique d'ordre n , formé des rotations de centre O et d'angle $2k\pi/n$, pour $k = 1, \dots, n$. En effet, toute isométrie directe f du plan euclidien est une rotation ; si elle vérifie $f(P) = P$ alors elle permute les sommets p_i donc fixe leur centre de gravité O , donc c'est une rotation de centre O ; enfin comme $p_0 = p_n$ est envoyé sur un certain p_k , avec $1 \leq k \leq n$, c'est la rotation R^k pour un certain $k \in \{1, \dots, n\}$.

Pour décrire $\text{Is}(P)$, identifions \mathcal{E} , muni de l'origine O , au « plan complexe » $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Quitte à effectuer une similitude directe de centre O , on peut supposer que p_n est le nombre complexe 1 ; alors $p_k = \exp(2ik\pi/n) = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ pour $k = 0, \dots, n$.

On voit alors que la conjugaison complexe $\tau : z \mapsto \bar{z}$, i.e. la symétrie orthogonale par rapport à la droite (Ox) , est un élément de $\text{Is}^-(P)$. Si $\sigma \in \text{Is}^-(P)$, alors $\tau\sigma$ appartient à $\text{Is}^+(P)$ donc est une rotation $R^k : z \mapsto \exp(2ik\pi/n)z$ et comme $\tau^2 = \text{id}$ on a :

$$\sigma(z) = (\tau \circ R^k)(z) = \overline{\exp(2ik\pi/n)z} = \exp(-2ik\pi/n)\bar{z} = (R^{-k} \circ \tau)(z).$$

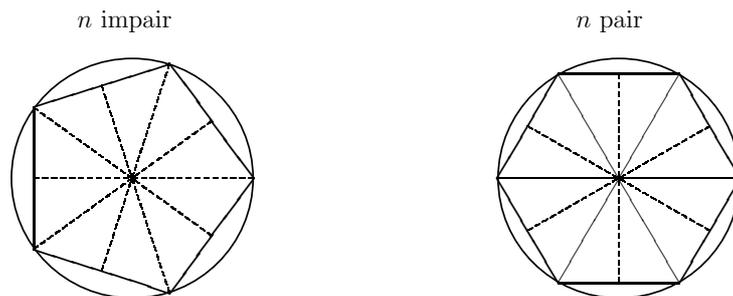
Ceci montre que les éléments de $\text{Is}(P)$ sont les rotations R^k et les symétries orthogonales $\tau_k = \tau R^k = R^{-k}\tau$, pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. De plus, on a la formule $\tau R^k \tau^{-1} = R^{-k}$.

Comme τ_k laisse fixe le point $q_k = \exp(-ik\pi/n)$, c'est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D_k = (Oq_k)$. L'angle entre les droites D_k et D_{k+1} est π/n , donc la composée $\tau_{k+1}\tau_k$ est la rotation R de centre O et d'angle $2\pi/n$.

Remarque 8.12. — Remarquons que le point opposé $-q_k$ égale $\exp((n-k)i\pi/n)$ et donc :

a) si $n = 2m + 1$ alors l'un des entiers k et $n - k$ est pair et l'autre impair, donc les droites D_k sont toutes conjuguées sous $\text{Is}^+(P)$: ce sont les droites joignant chaque p_i au milieu du côté opposé.

b) si $n = 2m$ alors les droites D_k sont de deux types : si $k = 2r$ alors D_k joint les points opposés p_r et p_{r+m} , tandis que si $k = 2r + 1$ alors D_k joint le milieu du segment $[p_r, p_{r+1}]$ avec le milieu du segment opposé $[p_{r+m}, p_{r+m+1}]$:



On peut résumer ce qui précède en la :

Proposition 8.13. — Soit P un n -gone convexe régulier du plan euclidien et soit O son centre de gravité (i.e. celui des sommets de P). Alors :

(i) $\text{Is}^+(P)$ est un groupe cyclique C_n d'ordre n , engendré par la rotation R de centre O et d'angle $2\pi/n$.

(ii) $\text{Is}^-(P)$ est formé des symétries orthogonales par rapport aux n droites D_k décrites plus haut.

(iii) $\text{Is}(P)$ a $2n$ éléments ; il est engendré par R et l'une quelconque des symétries précédentes, disons τ , et l'on a $\tau R^k \tau^{-1} = R^{-k}$. Par conséquent, $\text{Is}(P)$ est le produit semi-direct du groupe cyclique C_n par le groupe à deux éléments $\{1, \tau\}$.

(iv) $\text{Is}(P)$ est appelé le **groupe diédral** de cardinal $2n$.⁽¹⁰⁾ Il est aussi engendré par tout couple (s, t) de symétries « consécutives » (i.e. correspondant à deux droites D_k et D_{k+1}) puisqu'alors le produit $s \circ t$ égale R .

Quittant les polygones, on va démontrer le théorème de Hahn-Banach ci-dessous. Remarquons d'abord que si C est un carré ou disque fermé du plan, non réduit à un point, son intérieur U est le carré ou disque ouvert, et C est l'adhérence de U . Ceci est une propriété générale des convexes :

Lemme 8.14 (de densité). — Soit C un convexe de \mathcal{E} tel que $U = \overset{\circ}{C}$ soit non vide.

(i) Si $p \in U$ et $q \in C$, le segment $[p, q[$ est contenu dans U .⁽¹¹⁾

(ii) Par conséquent, U est convexe et $\overline{U} = C$ (i.e. U est dense dans C).

Démonstration. — Soit $r > 0$ tel que la boule ouverte $B = B(p, r)$ soit contenue dans C . Soit $m \in [p, q[$; alors $\overrightarrow{qm} = t \overrightarrow{qp}$ pour un certain $t \in]0, 1[$. Comme C est convexe et contient q , il est stable par l'homothétie h de centre q et de rapport t (car pour tout $m' \in C$, $h(m') \in]q, m[$). Donc C contient $h(B) = B(m, tr)$ et donc $m \in U$. Ceci prouve (i).

Le premier point de (ii) en découle aussitôt, et le second aussi car q est adhérent au segment $[p, q[$. \square

Théorème 8.15 (de Hahn-Banach dans le plan). — Soit C un convexe ouvert non vide du plan euclidien et soit O un point hors de C .

(i) Il existe au moins une droite \mathcal{D} passant par O et ne rencontrant pas C .

(ii) \overline{C} est contenu dans l'un des demi-plans fermés définis par \mathcal{D} . En particulier, si $O \in \overline{C} - C$, alors \mathcal{D} est une droite d'appui de \overline{C} en O .

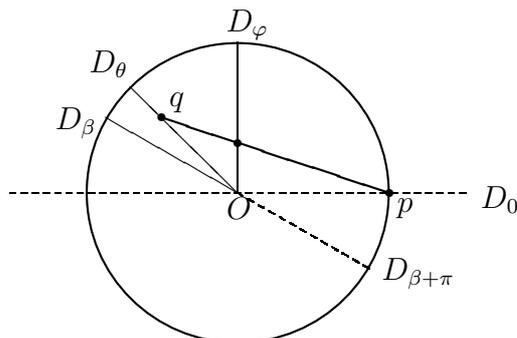
Démonstration. — (i) Soit \mathcal{R} un repère orthonormé centré en O . Alors les demi-droites D_θ issues de O sont paramétrées par leur point d'intersection $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ avec le cercle de rayon $r > 0$ fixé, θ variant dans $[0, 2\pi[$.

Comme C contient un disque ouvert, il n'est pas contenu dans une de ces demi-droites, donc il existe au moins deux demi-droites coupant C . Comme C est convexe et $O \notin C$, ces demi-droites ne sont pas opposées. Donc, quitte à effectuer une rotation de centre O , on peut supposer que C coupe la demi-droite D_0 au point $p = (r, 0)$ et coupe au moins une demi-droite D_α avec $0 < \alpha < \pi$. Soit β la borne supérieure de l'ensemble $I = \{\theta \in [0, \pi[\mid D_\theta \cap C \neq \emptyset\}$; alors $\beta \geq \alpha > 0$.

Pour tout $\varphi \in [0, \beta[$, il existe donc $\theta \in]\varphi, \beta[$ tel que D_θ coupe C en un point q ; comme C est convexe il contient $[p, q]$ et l'on en déduit que $D_\varphi \cap C \neq \emptyset$, cf. la figure suivante :

⁽¹⁰⁾Certains auteurs le notent D_{2n} et d'autres D_n , donc il vaut mieux préciser qu'il est « de cardinal » $2n$.

⁽¹¹⁾C'est même vrai pour $q \in \overline{C}$, voir [Go, Prop. 5.1].



Par maximalité de β , C ne rencontre pas D_φ si $\theta < \varphi \leq \pi$. D'autre part, pour $0 \leq \theta < \beta$, comme C est convexe, ne contient pas O et rencontre D_θ alors il ne rencontre pas $D_{\theta+\pi}$. Notant \mathcal{D} la droite $D_\beta \cup D_{\beta+\pi}$, il en résulte que C est contenu dans le demi-plan fermé $\overline{\mathcal{D}^+}$ délimité par \mathcal{D} et contenant p . Mais comme C est ouvert, il ne rencontre pas \mathcal{D} , car sinon il rencontrerait aussi le demi-plan ouvert \mathcal{D}^- . Par conséquent, \mathcal{D} est une droite passant par O ne rencontrant pas C , d'où (i).

(ii) Soit $f(x, y) = 0$ une équation affine de \mathcal{D} . Remarquons que si deux points p, q vérifient $f(p) < 0 < f(q)$ alors le segment $[p, q]$ rencontre \mathcal{D} (en effet, la fonction $g : t \mapsto f(p + t\overrightarrow{pq})$ est continue et vérifie $g(0) < 0 < g(1)$). Comme C est convexe et ne rencontre pas \mathcal{D} , on en déduit que C est contenu l'un des demi-plans ouverts définis par \mathcal{D} , disons \mathcal{D}^+ . Par conséquent \overline{C} est contenu dans $\overline{\mathcal{D}^+}$. En particulier, si $O \in \overline{C} - C$, on obtient que \mathcal{D} est une droite d'appui de \overline{C} en O . \square

Remarque. — Le théorème et le lemme précédents conduisent à la question suivante : quand un convexe C du plan affine euclidien \mathcal{E} est-il d'intérieur non vide ? Si C contient une boule ouverte, il contient au moins trois points non alignés. Réciproquement, si C contient trois points p, q, r non alignés, il contient le triangle $T = (pqr)$ donc est d'intérieur non vide.

Pour généraliser ceci dans tout espace affine euclidien \mathcal{E} , on a besoin des définitions suivantes. Les deux premières sont valables dans tout espace affine sur un corps k et auraient pu figurer dans le chapitre 1 :

Définition et proposition 8.16 (Sea engendré). — Soient k un corps, E un k -ev, \mathcal{E} un espace affine de direction E , X une partie non vide de E et F le sev de E engendré par les vecteurs \overrightarrow{xy} , pour $x, y \in X$.

(i) Pour tout $x_0 \in X$, le sea $\mathcal{F} = x_0 + F$ est le plus petit sea de \mathcal{E} contenant X ; en particulier il ne dépend pas du choix de $x_0 \in X$. On dira que c'est le sea engendré par X et on le notera $\text{Aff}\langle X \rangle$.

(ii) On peut aussi le décrire comme suit : c'est l'ensemble des combinaisons barycentriques de points de X , i.e. un point p de \mathcal{E} appartient à $\text{Aff}\langle X \rangle$ ssi il existe un entier $n \geq 1$, des points x_1, \dots, x_n de X et des scalaires $t_i \in k$ de somme 1 tels que $p = t_1x_1 + \dots + t_nx_n$.

Démonstration. — En effet, \mathcal{F} contient X et si \mathcal{F}' est un sea contenant X alors sa direction F' contient tous les vecteurs \overrightarrow{xy} , pour $x, y \in X$, donc \mathcal{F}' contient \mathcal{F} . Ceci prouve (i)

Pour prouver (ii), notons provisoirement \mathcal{F}' l'ensemble introduit en (ii). Si p est comme en (ii), on a $\overrightarrow{x_0p} = \sum_{i=1}^n t_i \overrightarrow{x_0x_i}$ et donc $p \in \mathcal{F}'$.

Réciproquement, notons que F est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{x_0x}$ pour $x \in X$, puisque $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x_0y} - \overrightarrow{x_0x}$. Donc un élément arbitraire de \mathcal{F} s'écrit sous la forme :

$$p = x_0 + \sum_{i=1}^n t_i \overrightarrow{x_0x_i}$$

pour certains $x_i \in X$ et $t_i \in k$. Posons $t_0 = 1 - \sum_{i=1}^n t_i$; d'après la définition du barycentre (cf. 6.1), ceci signifie que p est le barycentre des points pondérés (x_i, t_i) pour $i = 0, \dots, n$, donc $p \in \mathcal{F}'$. Ceci montre l'égalité $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. \square

Définition 8.17 (Points affinement indépendants ou liés)

Soit (\mathcal{E}, E) un espace affine et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que $(p+1)$ points $A_0, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ sont **affinement indépendants** si $\text{Aff}\langle A_0, \dots, A_p \rangle$ est de dimension p . Dans le cas contraire, on dit que $A_0, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ sont **affinement liés**.

Terminologie. Si $p = 2$, trois points A_0, A_1, A_2 sont affinement liés \Leftrightarrow ils sont alignés. Donc A_0, A_1, A_2 sont affinement indépendants \Leftrightarrow ils sont **non alignés**.

On dit que des points $A_0, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ sont **coplanaires** s'ils sont contenus dans un sea \mathcal{P} de dimension 2 (un plan affine), i.e. si $\dim \text{Aff}\langle A_0, \dots, A_p \rangle \leq 2$. Donc quatre points A_0, \dots, A_3 sont affinement indépendants \Leftrightarrow ils sont **non coplanaires**.

Revenons maintenant à notre espace affine euclidien (\mathcal{E}, E) .

Définition 8.18. — Soit X un convexe non vide de \mathcal{E} . On pose $\dim(X) = \dim(\text{Aff}\langle X \rangle)$ et l'on dit que X est un convexe *épais* de \mathcal{E} si $\dim(X) = \dim(\mathcal{E})$, ce qui équivaut à dire que $\text{Aff}\langle X \rangle = \mathcal{E}$.⁽¹²⁾

Définition 8.19 (Simplexes). — Soit $n = \dim(\mathcal{E})$ et soient p_0, \dots, p_r des points affinement indépendants ($r \leq n$). Leur enveloppe convexe s'appelle un *r-simplexe* (ou « simplexe de dimension r »). Par exemple, si $r = 1$, c'est le segment $[p_0, p_1]$, si $r = 2$ c'est le triangle $(p_0 p_1 p_2)$, et si $r = 3$ c'est le tétraèdre de sommets p_0, p_1, p_2, p_3 .

Proposition 8.20. — *Un convexe C de \mathcal{E} est d'intérieur non vide ssi il est épais.*

Démonstration. — Posons $n = \dim(\mathcal{E})$. Il est clair que C est d'intérieur vide s'il est contenu dans un hyperplan de \mathcal{E} . Montrons la réciproque.

Si C est épais, il contient un repère affine $\mathcal{R} = (p_0, \dots, p_n)$ de \mathcal{E} donc le n -simplexe correspondant $S = \{\sum_{i=0}^n t_i p_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$. Alors le « simplexe ouvert » :

$$U = \{\sum_{i=0}^n t_i p_i \in S \mid t_i > 0\} = \{p_0 + \sum_{i=1}^n t_i \overrightarrow{p_0 p_i} \mid t_i > 0, \sum_{i=1}^n t_i < 1\}$$

est non vide, et c'est un ouvert de \mathcal{E} car c'est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces ouverts. En effet, les coordonnées x_1, \dots, x_n dans le repère \mathcal{R} sont des applications affines $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ et U est l'intersection des demi-espaces ouverts définis par $x_i > 0$, pour $i = 1, \dots, n$, et par $x_1 + \dots + x_n < 1$. \square

On peut maintenant énoncer et démontrer le théorème de Hahn-Banach en général.

Théorème 8.21 (de Hahn-Banach géométrique). — ⁽¹³⁾ *Soient C un convexe de \mathcal{E} et U son intérieur.*

(i) *Supposons C épais et soient $O \in \mathcal{E} - U$ et \mathcal{L} un sea passant par O et ne rencontrant pas U . Il existe au moins un hyperplan contenant \mathcal{L} et ne rencontrant pas U .*

(ii) *Supposons C fermé. Par tout point p de ∂C passe au moins un hyperplan d'appui.*

Démonstration. — (i) Posons $n = \dim(\mathcal{E})$. Le résultat est clair si $n = 1$ et déjà prouvé si $n = 2$; on peut donc supposer $n \geq 3$. On se ramène au cas de la dimension 2 comme suit. Soit \mathcal{F} un sea tel que $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \cap U = \emptyset$ et maximal pour ces propriétés. Supposons que \mathcal{F} ne soit pas un hyperplan. Notant F sa direction, on a alors $\dim(F) \leq n - 2$ donc l'orthogonal G de F est de dimension $r \geq 2$.

Soit π la projection orthogonale de \mathcal{E} sur $\mathcal{G} = O + G$. Alors $\pi(U)$ est convexe car π est affine (cf. 6.7), et $\pi(U)$ est ouvert car l'image par π d'une boule ouverte de \mathcal{E} de centre p

⁽¹²⁾ En effet, si $\dim(X) = \dim(\mathcal{E})$ alors la direction F de $\text{Aff}\langle X \rangle$ est un sev de E tel que $\dim(F) = \dim(E)$, d'où $F = E$ et donc $\text{Aff}\langle X \rangle = \mathcal{E}$.

⁽¹³⁾ Hans Hahn (1879-1934) et Stefan Banach (1892-1945), mathématiciens autrichien et polonais.

et rayon r est la boule ouverte de \mathcal{G} de centre $\pi(p)$ et rayon r .⁽¹⁴⁾ De plus, $O \notin \pi(U)$ car sinon U rencontrerait $O + F = \mathcal{F}$. Soient G' un plan vectoriel de G et $\mathcal{G}' = O + G'$. Alors $\pi(U) \cap \mathcal{G}'$ est un convexe ouvert de \mathcal{G}' ne contenant pas O . D'après 8.15, il existe donc une droite vectorielle D de G' telle que $\mathcal{D} = O + D$ ne rencontre pas $\pi(U)$. Alors $\pi^{-1}(\mathcal{D})$ ne rencontre pas U , et comme $\pi^{-1}(\mathcal{D})$ est le sea passant par O de direction $F \oplus D$, ceci contredit la maximalité de \mathcal{F} . Ceci prouve (i).

(ii) Si C n'est pas épais, il est contenu dans un hyperplan \mathcal{H} donc \mathcal{H} est un hyperplan d'appui en tout point de C (et le résultat n'est pas intéressant). On peut donc supposer C épais. Alors $C = \overline{U}$ d'après la proposition 8.20 et le lemme 8.14.

Soit $p \in \partial C = C - U$. D'après (i) il existe un hyperplan \mathcal{H} passant par O et ne rencontrant pas U . Il en résulte que U est contenu dans l'un des demi-plans ouverts définis par \mathcal{H} , disons \mathcal{H}^+ . (L'argument est identique à celui en dimension 2, cf. 8.15.) Par conséquent, $C = \overline{U}$ est contenu dans $\overline{\mathcal{H}^+}$, donc \mathcal{H} est un hyperplan d'appui de C en p . \square

Corollaire 8.22. — *Tout convexe fermé C est l'intersection des demi-espaces fermés le contenant et définis par un hyperplan d'appui. (C'est-à-dire, notant $\mathcal{A}(C)$ l'ensemble des hyperplans d'appui de C et, pour tout $\mathcal{H} \in \mathcal{A}(C)$, notant $\overline{\mathcal{H}^+}$ le demi-espace fermé contenant C , on a : $\bigcap_{\mathcal{H} \in \mathcal{A}(C)} \overline{\mathcal{H}^+} = C$.)*

Démonstration. — Notons C' l'intersection précitée. Il est clair que $C \subset C' \subset \text{Aff}\langle C \rangle$ (la seconde égalité car $\text{Aff}\langle C \rangle$ est l'intersection des hyperplans contenant C). Il suffit donc de montrer que si $q \in \text{Aff}\langle C \rangle - C$ alors $q \notin C'$. Remplaçant \mathcal{E} par $\text{Aff}\langle C \rangle$, on peut donc supposer C épais.

Soient alors $q \in \mathcal{E} - C$ et $O \in \overset{\circ}{C}$. Alors $[O, q] \cap C$ est un segment $[O, p]$ pour un certain $p \in]O, q[$ et l'on a $p \in \partial C$. D'après le théorème précédent, p appartient à un hyperplan d'appui \mathcal{H} donc il existe une forme linéaire f non nulle telle que

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathcal{E} \mid f(\overrightarrow{px}) = 0\} \quad \text{et} \quad C \subset \overline{\mathcal{H}^+} = \{x \in \mathcal{E} \mid f(\overrightarrow{px}) \geq 0\}.$$

Comme $O \in \overset{\circ}{C}$ on a $f(\overrightarrow{pO}) > 0$, et comme $p \in]O, q[$ on a $\overrightarrow{pq} = \lambda \overrightarrow{pO}$ avec $\lambda < 0$, d'où $f(\overrightarrow{pq}) < 0$. Ceci montre que $q \notin \overline{\mathcal{H}^+}$. \square

9. Projection sur un convexe fermé

Dans cette courte section, on introduit la projection sur un convexe fermé. C'est une notion importante et utile, qui permet de donner une démonstration plus géométrique du corollaire précédent.

Lemme 9.1. — *Soit $A \in \mathcal{E}$. L'application $d_A : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $P \mapsto d(A, P) = AP$ est 1-lipschitzienne, i.e. pour tout $P, Q \in \mathcal{E}$ on a :*

$$(*) \quad |AP - AQ| \leq PQ.$$

Par conséquent, d_A est continue.

Démonstration. — D'après l'inégalité triangulaire, on a $AP \leq AQ + QP$ d'où $AP - AQ \leq QP$ et de même $AQ - AP \leq PQ$, d'où (*). La continuité en découle. \square

⁽¹⁴⁾En prenant un repère orthonormé centré en O dont les r premiers vecteurs engendrent G , on se ramène à la projection $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r)$.

Théorème 9.2 (Projection sur un convexe fermé). — ⁽¹⁵⁾ Soit X un convexe fermé non vide de \mathcal{E} et soit $A \in \mathcal{E} - X$.

(i) La fonction $X \rightarrow \mathbb{R}_+$, $M \mapsto AM$ atteint son minimum en un unique point P de X , appelé la projection de A sur X . Il appartient à ∂X .

(ii) On a $(\overrightarrow{PA} | \overrightarrow{PM}) \leq 0$ pour tout $M \in X$, donc l'hyperplan orthogonal à \overrightarrow{AP} passant par P est **hyperplan d'appui** de C en P .

(iii) Notons $\Delta = P + \mathbb{R}_+^* \overrightarrow{PA}$ la demi-droite ouverte d'origine P passant par A . Alors tout point A' de Δ se projette sur P .

Démonstration. — Fixons $Q \in X$ et soit K l'intersection de X avec la boule fermée de centre A et de rayon AQ . Alors K est un compact non vide de \mathcal{E} donc son image par la fonction continue d_A est un intervalle fermé borné $[r, R]$ de \mathbb{R}_+ . Il existe donc au moins un point $P \in K$ tel que $AP = r \leq AQ$, d'où $AP \leq AP'$ pour tout $P' \in X$.

Comme $A \notin X$, alors $P \neq A$ donc le segment ouvert $]P, A[$ est non vide ; pour tout point A' de ce segment on a $A'A < PA$ et donc $A' \notin X$. Il en résulte que P n'est pas un point intérieur à X , d'où $P \in \partial X$.

Prouvons (ii) et l'unicité de P . Soit $M \in X$ arbitraire. Pour tout $t \in [0, 1]$, le point $M_t = P + t\overrightarrow{PM}$ appartient à X et l'on a donc $AM_t \geq AP$ d'où :

$$0 \leq AM_t^2 - AP^2 = t^2 PM^2 + t(\overrightarrow{PM} | \overrightarrow{AP})$$

et donc, pour tout $t \in]0, 1]$, $(\overrightarrow{PM} | \overrightarrow{AP}) \geq -tPM^2$. Comme la limite du membre de droite lorsque t tend vers 0 est 0, on en déduit que $(\overrightarrow{PM} | \overrightarrow{AP}) \geq 0$, d'où

$$(*) \quad \forall M \in X, \quad (\overrightarrow{PA} | \overrightarrow{PM}) \leq 0.$$

Cette inégalité montre que l'hyperplan orthogonal à \overrightarrow{AP} passant par P est hyperplan d'appui de C en P , et elle caractérise P .

En effet, si Q est un second point de X vérifiant (*), on a :

$$0 \geq (\overrightarrow{PA} | \overrightarrow{PQ}) \quad \text{et} \quad 0 \geq (\overrightarrow{QA} | \overrightarrow{QP}) = (\overrightarrow{AQ} | \overrightarrow{PQ})$$

et donc $PQ^2 = (\overrightarrow{PA} | \overrightarrow{PQ}) + (\overrightarrow{AQ} | \overrightarrow{PQ}) \leq 0$ d'où $Q = P$. En particulier, ceci entraîne l'unicité de P .

Prouvons (iii). Soit $B \in \Delta$, alors $\overrightarrow{PB} = t\overrightarrow{PA}$ pour un certain $t \in \mathbb{R}_+^*$ et donc (*) entraîne $(\overrightarrow{PB} | \overrightarrow{PM}) \leq 0$ pour tout $M \in X$. D'après ce qui précède, ceci montre que P est la projection de B sur X . \square

On obtient alors une autre démonstration du corollaire 8.22 :

Autre démonstration de 8.22. — Notons C' l'intersection considérée. Il est clair que $C \subset C'$. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{E} - C$. D'après le théorème 9.2, si l'on note P le projeté de A sur C et \mathcal{H} l'hyperplan orthogonal à \overrightarrow{AP} passant par P , alors C est contenu dans le demi-espace fermé

$$\overline{\mathcal{H}}^+ = \{M \in \mathcal{E} \mid (\overrightarrow{PM} | \overrightarrow{PA}) \leq 0\},$$

donc \mathcal{H} est un hyperplan d'appui. Comme $A \notin \overline{\mathcal{H}}^+$, on a donc $A \notin C'$. Ceci montre que $C' \subset C$, d'où l'égalité $C = C'$. \square

⁽¹⁵⁾Ce théorème est vrai, plus généralement, si E est un espace de Hilbert réel, cf. par exemple [Sch, §XXIII.3].

La fin de cette section fournit une **autre** démonstration, tirée de [Go, §5.3], du théorème de Hahn-Banach 8.21. Elle ne sera pas utilisée sauf dans la preuve de 10.15, donc on peut l'omettre en 1ère lecture.

Proposition 9.3. — Soit X un convexe fermé non vide de \mathcal{E} . La projection $\pi : \mathcal{E} - X \rightarrow \partial X$ est 1-lipschitzienne et surjective.

Démonstration. — Soient $A, B \in \mathcal{E} - X$ et P, Q leurs projections sur X . Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB}$, on a :

$$\begin{aligned} AB^2 - PQ^2 &= AP^2 + QB^2 + 2\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{PQ} \\ &= \|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QB}\|^2 - 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QP} \end{aligned}$$

et l'on a $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} \leq 0$ car $P = \pi(A)$ et $Q \in X$, et de même $\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QP} \leq 0$. Il en résulte que $AB^2 - PQ^2 \geq 0$ d'où $PQ \leq AB$. Ceci montre que π est 1-lipschitzienne (donc continue).

Notons $\Gamma = \pi(\mathcal{E} - X)$. Pour montrer que $\Gamma = \partial X$, on procède en trois étapes.

a) Montrons que Γ est dense dans ∂X . Soit $P \in \partial X$ et $\varepsilon > 0$. Comme $P \notin \overset{\circ}{X}$, il existe $A \in B(P, \varepsilon) - X$; notons $Q = \pi(A)$. Alors $QA \leq PA$ et donc, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$QP \leq QA + AP \leq 2PA < 2\varepsilon.$$

Ceci montre que Γ est dense dans ∂X , i.e. tout $P \in \partial X$ est limite d'une suite de points de Γ .

b) Montrons que π est surjective si X est *compact*. Choisissons une origine $O \in X$. Comme X est compact, il existe $R > 0$ tel que X soit contenu dans la boule ouverte $B(O, R)$. Remarquons qu'alors la sphère $S = S(O, R)$ ne rencontre pas X , i.e. est contenue dans $\mathcal{E} - X$, d'où $\pi(S) \subset \Gamma$. Montrons que cette inclusion est une égalité.

Soient $A \in \mathcal{E} - X$ et P sa projection sur X . Pour $t \in \mathbb{R}_+$, posons $A_t = P + t\overrightarrow{PA}$ et

$$f(t) = OA_t^2 = OP^2 + 2t\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + t^2AP^2.$$

Alors f est continue, $f(0) = OP^2 < R^2$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ donc la demi-droite d'origine P passant par A coupe la sphère $S = S(O, R)$ en (au moins) un point B ,⁽¹⁶⁾ et d'après le point (iii) de 9.2, on a $\pi(B) = \pi(A)$. Ceci montre que $\Gamma = \pi(S)$. Comme S est compacte et π continue, alors Γ est compact, donc fermé. Combiné avec a), ceci montre que $\Gamma = \partial X$ si X est compact.

c) Lorsque X n'est pas compact, fixons $P \in \partial X$ et notons K l'intersection de X avec la boule fermée de centre P et de rayon 1. Alors K est un convexe compact et $P \in \partial K$ (car $P \in K$ et P n'est pas un point intérieur de X). D'après ce qui précède, il existe un point $A \in \mathcal{E} - K$ dont la projection $\pi_K(A)$ sur K égale P , et d'après le point (iii) de 9.2, on a $P = \pi_K(B)$ pour tout point B du segment ouvert $]P, A[$. Alors, pour tout $M \in K$, on a

$$(1) \quad BM \geq BP.$$

D'autre part, pour tout $M \in X - K$, on a $1 < PM \leq PB + BM$, d'où $BM > 1 - PB$. Or, en le prenant assez proche de P , on peut choisir B de sorte que $PB < 1/2$. Alors, pour tout $M \in X - K$, on a

$$(2) \quad BM > 1 - PB > \frac{1}{2} > BP.$$

En combinant (1) et (2), on voit que $BP \leq BM$ pour tout $M \in X$, donc P est la projection de B sur X . Ceci achève la preuve de la proposition. \square

Corollaire 9.4 (Th. de Hahn-Banach). — Soit C un convexe fermé de \mathcal{E} . Par tout point de ∂C passe au moins un hyperplan d'appui.

⁽¹⁶⁾ B est unique car on a $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} \leq 0$ donc $f'(t)/2 = tAP^2 + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PA}$ est > 0 pour $t > 0$, donc f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

10. Points extrémaux, structure faciale des polytopes de dimension 3

Définitions 10.1. — Soit C une partie convexe de \mathcal{E} et p un point de C .

(i) On dit que p est un **point extrémal** de C s'il n'est pas intérieur à un segment de points de C , i.e. si les conditions $a, b \in C$ et $p \in [a, b]$ entraînent que $p = a$ ou $p = b$. On notera $\text{Extr}(C)$ l'ensemble des points extrémaux de C . (Il peut être vide, cf. l'exemple (c) ci-dessous.)

(ii) On dit que p est un **sommet** de C si l'intersection des hyperplans d'appui passant par p est égale à $\{p\}$.

(iii) Tout sommet est un point extrémal. (La réciproque est fautive, cf. l'exemple (b) ci-dessous.)

Démonstration de (iii). — Supposons que p soit intérieur à un segment $[a, b]$, avec $a, b \in C$ et que \mathcal{H} soit un hyperplan d'appui en p , donné par une équation $f(x) = \lambda$. Comme C est contenu dans l'un des demi-espaces définis par \mathcal{H} on peut supposer, quitte à changer f en $-f$, que $f(a)$ et $f(b)$ sont tous deux $\leq \lambda$. Par hypothèse, on a $p = ta + (1-t)b$, avec $0 < t < 1$, et comme $p \in \mathcal{H}$ on a :

$$\lambda = f(p) = tf(a) + (1-t)f(b) \leq t\lambda + (1-t)\lambda = \lambda.$$

On en déduit que $f(a) = \lambda = f(b)$, et donc \mathcal{H} contient le segment $[a, b]$. Il en résulte que l'intersection des hyperplans d'appui en p contient le segment $[a, b]$, donc p n'est pas un sommet de C . Ceci prouve (iii). \square

Exemples 10.2. — (a) Pour le rectangle $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$, les points extrémaux sont les quatre points $(\pm a, \pm b)$. Ce sont aussi des sommets car par chacun de ces points p il passe plus d'une droite d'appui, de sorte que l'intersection des droites d'appui en p égale $\{p\}$. D'autre part, on voit que C est l'enveloppe convexe de ces quatre points.

(b) Soit D un disque fermé de \mathbb{R}^2 de rayon $r > 0$; sa frontière est un cercle \mathcal{C} de rayon r . Tous les points de \mathcal{C} sont des points extrémaux de D . Aucun n'est un sommet, car par chacun de ces points p il ne passe qu'une seule droite d'appui, qui est la droite tangente $T_p\mathcal{C}$. On voit aussi que D est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

(c) Par contre, si C n'est pas *compact* il peut ne pas avoir de points extrémaux, par exemple si C est un sea de dimension ≥ 1 ou si $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$ et C est un demi-espace fermé.

Théorème 10.3 (de Minkowski-Krein-Milman). — ⁽¹⁷⁾ Soit C un convexe compact non vide de \mathcal{E} . Alors :

(i) C est l'enveloppe convexe de ∂C .

(ii) Pour tout hyperplan d'appui \mathcal{H} de C , tout point extrémal de $C \cap \mathcal{H}$ est aussi un point extrémal de C .

(iii) C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Démonstration. — (i) Comme C est fermé et convexe, il contient $\text{Conv}(\partial C)$. Pour montrer l'inclusion réciproque, considérons un point p intérieur à C et soit \mathcal{D} une droite quelconque passant par p . Comme C est un convexe compact, $\mathcal{D} \cap C$ est un segment $[a, b]$ de \mathcal{D} , avec a, b dans ∂C . Puisque $p \in [a, b]$, on a donc $p \in \text{Conv}(\partial C)$. Ceci prouve (i).

(ii) Posons $C' = C \cap \mathcal{H}$ et montrons que $\text{Extr}(C') \subset \text{Extr}(C)$. Supposons que $q \in C'$ ne soit pas un point extrémal de C , i.e. soit intérieur à un segment $[a, b]$, avec $a, b \in C$. Alors, comme dans la preuve de 10.1 (iii), on voit que $[a, b]$ est contenu dans \mathcal{H} , et donc q n'est pas un point extrémal de C' . Ceci prouve que $\text{Extr}(C') \subset \text{Extr}(C)$.

(iii) On procède par récurrence sur $d = \dim(\mathcal{E})$. Si $d = 1$, alors C est un intervalle $[a, b]$ et c'est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux a et b . Supposons donc $d \geq 2$ et le

⁽¹⁷⁾Ce théorème est dû à Hermann Minkowski (mathématicien allemand, 1864 -1909) dans le cas d'un espace affine de dimension finie, mais il est souvent appelé « théorème de Krein-Milman » en raison d'une généralisation en dimension infinie obtenue en 1940 par les mathématiciens soviétiques Mark Krein (1907-1989) et David Milman (1912-1982).

résultat démontré en dimension $< d$. Comme C est convexe il contient $\mathcal{C} = \text{Conv}(\text{Extr}(C))$ et nous allons montrer l'inclusion réciproque.

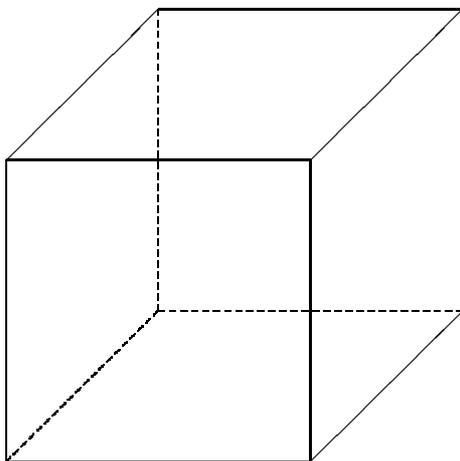
Soit $p \in \partial C$. D'après le théorème de Hahn-Banach 8.21, il existe un hyperplan d'appui \mathcal{H} passant par p . Posons $C' = C \cap \mathcal{H}$; par hypothèse de récurrence, C' est l'enveloppe convexe de $\text{Extr}(C')$. D'après (ii) on a donc $C' \subset \mathcal{C}$. Comme $p \in C'$, ceci montre que $\partial C \subset \mathcal{C}$, et d'après (i) on conclut que $C \subset \mathcal{C}$. \square

Définition 10.4. — Un **polytope** (convexe) est l'enveloppe convexe d'un ensemble *fini* de points.

Exemples. — (a) Dans le plan, tout n -gone convexe (cf. 8.8) est l'enveloppe convexe de ses n sommets.

(b) Dans l'espace de dimension 3, un tétraèdre (resp. un cube) est l'enveloppe convexe de ses 4 (resp. 8) sommets.

Remarque. — Considérons plus en détail le cas d'un cube. Pour fixer les idées, disons que C est le cube de \mathbb{R}^3 dont les sommets sont les huit points $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$:



i.e. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x, y, z \leq 1\}$. Son intérieur est le cube ouvert

$$\overset{\circ}{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 < x, y, z < 1\}$$

et sa frontière est formée des six faces pour lesquelles une des égalités $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$ a lieu. De plus, chaque face a elle même une « frontière », formée de quatre arêtes, et « l'intérieur » de la face est le complémentaire des arêtes. Par exemple, la face de droite F est définie par l'égalité $x = 1$, ses quatre arêtes sont définies par l'une des égalités $y = \pm 1$ ou $z = \pm 1$, et « l'intérieur » de F est

$$\{(1, y, z) \in F \mid -1 < y, z < 1\}.$$

De même, chaque arête a deux extrémités (qui sont des sommets du cube) et « l'intérieur » de l'arête est le complémentaire des extrémités.

Ici, on a mis des guillemets à « frontière » et « intérieur » car, considérée comme partie de \mathbb{R}^3 , chaque face est d'intérieur vide (donc égale à sa frontière). Mais quand on considère F comme sous-ensemble du plan affine \mathcal{P} qu'elle engendre (ici, le plan $x = 1$), son intérieur est bien comme décrit plus haut et sa frontière est formée des quatre arêtes définies par $y = \pm 1$ ou $z = \pm 1$. De même, chaque arête de F est d'intérieur vide (donc égale à sa frontière) dans \mathcal{P} , mais quand on la considère comme sous-ensemble de la droite affine qu'elle engendre, son intérieur est bien le complémentaire des extrémités.

La suite de cette section a pour but de montrer que tout polytope X épais de \mathbb{R}^3 possède une décomposition analogue à celle du cube, i.e. X est d'intérieur non vide et sa frontière est réunion disjointe d'un nombre fini de faces ouvertes (i.e. privées de leurs arêtes), d'arêtes ouvertes (i.e. privées de leurs extrémités) et de sommets.

Définition 10.5. — Soit C un convexe non vide de \mathcal{E} ; c'est un convexe épais de $\mathcal{F} = \text{Aff}\langle C \rangle$. Donc, l'intérieur U de C dans \mathcal{F} est non vide (cf. 8.20) et l'on a $\overline{U} = C$ (cf. 8.14). On dit que U est « l'intérieur relatif » de C .

Cette notion est très naturelle : c'est précisément celle qu'on a utilisé pour parler de « l'intérieur » d'une face ou d'une arête. Pour cette raison, on omettra souvent dans la suite le mot « relatif » et il sera clair d'après le contexte que lorsqu'on parlera de l'intérieur d'une face (ou arête, etc), il s'agira de l'intérieur relatif.

Dans ce qui suit, on suppose que \mathcal{E} est de dimension 3 et que P est un polytope épais de \mathcal{E} . On pose $\text{Extr}(P) = \{p_1, \dots, p_\ell\}$.

Définition 10.6 (Faces, arêtes et sommets). — Si \mathcal{H} est un plan d'appui de P alors $\mathcal{H} \cap P$ est un convexe non vide de \mathcal{H} , qui est de dimension 0, 1 ou 2.

(i) Dans le dernier cas, on dit que $F = \mathcal{H} \cap P$ est une *face* de P et que \mathcal{H} est le plan facial associé. (Noter que $\mathcal{H} = \text{Aff}\langle F \rangle$.)

(ii) Si $\dim(\mathcal{H} \cap P) = 1$, alors $A = \mathcal{H} \cap P$ est un segment non réduit à un point, appelé une *arête* de P .

(iii) Si $\mathcal{H} \cap P = \{s\}$, on dit que s est un *sommet* de P . (Ceci est en accord avec la Déf. 10.1.)

Fixons une face F et montrons que F est un polygone. Quitte à renuméroter les p_i on peut supposer que $\text{Extr}(P) \cap F = \{p_1, \dots, p_k\}$ pour un certain $k < \ell$.

Lemme 10.7. — F est un k -gone convexe de sommets p_1, \dots, p_k .

Démonstration. — Soit $f(x) = 0$ une équation de \mathcal{H} . Quitte à changer f en $-f$ on peut supposer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in P$.

Soit $p \in F$; on peut l'écrire $p = \sum_{i \in I} t_i p_i$, avec $I \subset \{1, \dots, \ell\}$ et les $t_i > 0$ et de somme égale à 1. Alors, on a

$$0 = f(p) = \sum_{i \in I} t_i f(p_i)$$

et comme $f(p_i) \geq 0$ et $t_i > 0$, ceci entraîne $f(p_i) = 0$, d'où $p_i \in F$. On a donc $I \subset \{1, \dots, k\}$ et ceci montre que $F \subset \text{Conv}(p_1, \dots, p_k)$. L'inclusion réciproque est claire puisque F est convexe.

De plus, comme p_1, \dots, p_k sont des points extrémaux de P ce sont *a fortiori* des points extrémaux de F , donc F est un k -gone convexe dont ils sont les sommets. \square

Remarque 10.7.1. — La même démonstration montre que si A est une arête (resp. s un sommet) de P alors ses extrémités sont des points extrémaux de P (resp. s en est un).

On va maintenant montrer que ∂P est la réunion des faces de P .

Proposition 10.8. — Soit A une arête de P .

(i) Il existe exactement deux plans faciaux \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 contenant A .

(ii) Notant F_1, F_2 les faces correspondantes, on a $F_1 \cap F_2 = A$ et A est une arête de F_1 et de F_2 .

Proposition 10.9. — *Tout sommet s de P appartient à au moins une arête (et en fait à au moins trois).*

Démonstration. — Le début est commun aux deux propositions : soit \mathcal{H} un hyperplan d'appui tel que $\mathcal{H} \cap P$ égale A (resp. $\{s\}$). D'après la remarque précédente, on peut supposer (quitte à renuméroter les p_i) que $A = [p_1, p_2]$ (resp. que $s = p_1$).

Choisissons une base orthonormée (e_2, e_3) de la direction de \mathcal{H} de sorte que e_3 soit un vecteur directeur de la droite $(p_1 p_2)$ si $\mathcal{H} \cap P = [p_1, p_2]$, et complétons-la en une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E . Soient (x, y, z) les coordonnées centrées en $O = p_1$ correspondantes. Alors \mathcal{H} a pour équation $x = 0$ et comme c'est un hyperplan d'appui de P , on peut supposer (quitte à changer e_1 en $-e_1$) que P est contenu dans le demi-espace fermé donné par $x \geq 0$.

Prouvons maintenant la proposition 10.8. Les plans \mathcal{P} contenant A sont déterminés par leur intersection avec le plan (Oxy) ; il s'agit donc des plans \mathcal{P}_λ d'équation $y = \lambda x$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et du plan $\mathcal{H} = \mathcal{P}_\infty$ d'équation $x = 0$. Celui-ci n'est pas un plan facial puisque $P \cap \mathcal{H}$ est réduit à A .

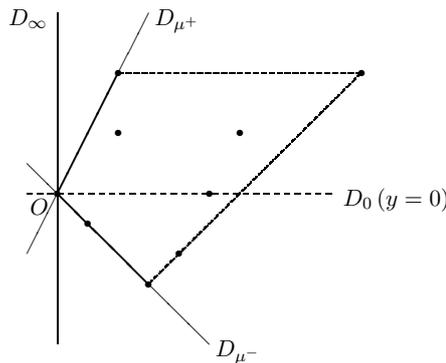
Un plan \mathcal{P}_λ est un plan d'appui ssi la forme linéaire $h_\lambda(x, y) = \lambda x - y$ est de signe constant (≥ 0 ou ≤ 0) sur $X = \{p_i \mid i > 2\}$; dans ce cas, comme $\mathcal{P}_\lambda \cap P$ est l'enveloppe convexe des p_i qu'il contient, c'est un plan facial ssi h_λ s'annule sur au moins un $p_i \in X$. Or, comme $x(p_i) > 0$ pour tout $i > 2$, on a les équivalences :

$$h_\lambda \geq 0 \text{ sur } X \Leftrightarrow \lambda \geq \mu^+ = \max_{2 < i \leq \ell} \frac{y(p_i)}{x(p_i)} \quad \text{et} \quad h_\lambda \leq 0 \text{ sur } X \Leftrightarrow \lambda \leq \mu^- = \min_{2 < i \leq \ell} \frac{y(p_i)}{x(p_i)}.$$

Notons que $\mu^+ > \mu^-$, car si on avait $\mu^+ = \mu^- = \mu$ alors la forme linéaire $h_\mu = \mu y - x$ serait nulle sur tout les p_i donc sur \mathcal{E} , ce qui est absurde.

On voit ainsi que \mathcal{P}_λ est un plan facial ssi $\lambda = \mu^-$ ou μ^+ : en effet ; si $\lambda \notin [\mu^-, \mu^+]$ alors $\mathcal{P}_\lambda \cap P = A$ et si $\mu^- < \lambda < \mu^+$ alors h_λ n'est pas de signe constant sur X .

Pour **comprendre** cette démonstration, il est utile de la visualiser en dimension 2, en utilisant la projection orthogonale π de \mathcal{E} sur le plan $\Pi = (Oxy)$. Alors $\pi(A) = \{O\}$ et $\pi(P)$ est un polygone convexe dont les sommets sont certains des $\pi(p_i)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\pi(\mathcal{P}_\lambda)$ est la droite D_λ d'équation $y = \lambda x$, i.e. la droite passant par O de pente λ . On cherche parmi ces droites celles qui contiennent un côté de $\pi(P)$:



Lorsque λ varie de $-\infty$ à $+\infty$, ces droites décrivent toutes les droites passant par O sauf la droite D_∞ d'équation $x = 0$, mais celle-ci n'est pas une des droites cherchées car $D_\infty \cap \pi(P)$ est réduit à $\{O\}$. Notant μ^- et μ^+ la plus petite (resp. plus grande) des pentes des droites $O\pi(p_i)$ pour $i > 2$, on voit alors que $\pi(P)$ est contenu dans le cône fermé de Π de sommet O délimité par ces deux demi-droites, et que celles-ci contiennent les deux côtés de $\pi(P)$ passant par O .

On obtient ainsi les deux plans faciaux \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . Leur intersection est la droite $\Delta = (Oz)$ et, posant $F_i = P \cap \mathcal{P}_i$, on a $F_1 \cap F_2 = P \cap \Delta = A$. Enfin, p_1, p_2 sont des sommets du

polygone F_1 et $A = [p_1, p_2]$ est l'intersection de F_1 avec la droite Δ , donc A est une arête de F_1 et, de même, de F_2 . Ceci prouve la proposition 10.8.

Prouvons la proposition 10.9. Conservant les notations précédentes, le plan \mathcal{P}_- d'équation $y = \mu^-x$ est un plan d'appui de P qui contient O et au moins un second point, donc $\mathcal{P}_- \cap P$ contient au moins une arête A d'extrémité O . D'après la proposition 10.8, déjà prouvée, A est l'intersection de deux faces F_1 et F_2 donc O , en tant que sommet de F_1 (resp. F_2) est l'extrémité d'une autre arête B de F_1 (resp. C de F_2). De plus, on a $C \neq B$ car F_1 et F_2 n'ont en commun que l'arête A . Ceci prouve que $s = O$ appartient à au moins trois arêtes (et à au moins trois faces, car B appartient à une face F_3 distincte de F_1 et F_2). \square

Il reste à montrer que toute « arête A d'une face F » est aussi une arête de P (i.e. qu'il existe un plan d'appui \mathcal{H} tel que $\mathcal{H} \cap P = A$) et que toute extrémité s d'une arête A de P est un sommet de P (i.e. qu'il existe un plan d'appui \mathcal{H} tel que $\mathcal{H} \cap P = \{s\}$).

Proposition 10.10. — *Soit X une face (resp. arête) de P et Y une arête (resp. extrémité) de X . Alors il existe un plan d'appui \mathcal{P} de P tel que $Y = P \cap \mathcal{P}$. Par conséquent, Y est une arête (resp. un sommet) de P .*

Démonstration. — Posons $I = \{i \in \{1, \dots, \ell\} \mid p_i \in X\}$. D'après le lemme 10.7 et la remarque 10.7.1, X est l'enveloppe convexe des p_i pour $i \in I$.

Choisissons comme origine de \mathcal{E} un point O de Y et identifions ainsi \mathcal{E} à E . Notons V la direction de $\text{Aff}\langle X \rangle$. Par hypothèse, il existe $f \in E^*$ et $\phi \in V^*$ telles que :

- a) $f(p) \geq 0$ pour tout $p \in P$ et $X = P \cap \text{Ker}(f)$.
- b) $\phi(x) \geq 0$ pour tout $x \in X$ et $Y = X \cap \text{Ker}(\phi)$.

On prolonge ϕ en une forme linéaire g sur E . Comme $f(p_i) > 0$ pour tout $i \notin I$, on peut choisir un réel $\lambda > 0$ tel que $\lambda f(p_i) + g(p_i) > 0$ pour tout $i \notin I$.

Alors la forme linéaire $h = \lambda f + g$ est nulle sur Y et prend des valeurs > 0 sur $X - Y$ et sur les p_i pour $i \notin I$, donc h est ≥ 0 sur P et nulle sur Y .

De plus, posant $J = \{i \in \{1, \dots, \ell\} \mid p_i \in Y\}$ on obtient, comme dans la preuve du lemme 10.7 que $P \cap \text{Ker}(h)$ est l'enveloppe convexe des p_j , pour $j \in J$, et donc $P \cap \text{Ker}(h) = Y$. \square

Corollaire 10.11. — *On obtient donc :*

(i) ∂P est la réunion des faces et c'est la réunion disjointe des intérieurs des faces, des intérieurs des arêtes, et des sommets.

(ii) Tout point extrémal de P est un sommet.

Démonstration. — (i) résulte des trois propositions précédentes. Prouvons (ii). Soit p un point extrémal de P . Il n'est pas intérieur à P , ni à une face ni à une arête ; c'est donc un sommet. \square

Définition 10.12. — On appelle **drapeau** de P tout triplet (s, A, F) où F est une face de P , A une arête de F et s un sommet de A .

Il résulte des trois propositions précédentes que chaque face, arête, ou sommet appartient à au moins un drapeau.

Proposition 10.13. — *Soient F, G deux faces de P distinctes et non disjointes. Alors $F \cap G$ est soit une arête de P soit un sommet.*

Démonstration. — Choisissons comme origine de \mathcal{E} un point $O \in F \cap G$ et identifions \mathcal{E} à E . Il existe $f, g \in E^*$ et telles que :

- a) $f(p) \geq 0$ pour tout $p \in P$ et $F = P \cap \text{Ker}(f)$.
- b) $g(p) \geq 0$ pour tout $p \in P$ et $G = P \cap \text{Ker}(g)$.

Alors $f + g$ est ≥ 0 sur P et $P \cap \text{Ker}(f + g) = F \cap G$. Il en résulte que $F \cap G$ est une face, une arête ou un sommet de P ; et le premier cas est exclu car sinon $F \cap G$ engendrerait le même plan facial \mathcal{P} que F et G et l'on aurait $F = P \cap \mathcal{P} = G$. \square

Remarque 10.13.1. — La même démonstration montre que si A est une arête et X une face ou arête ne contenant pas A , alors $A \cap X$ est soit vide soit un sommet de A .

Terminologie 10.14. — On dira que deux sommets p, q (resp. deux faces F, G) sont *adjacents* (resp. *adjacentes*) si $[p, q]$ (resp. $F \cap G$) est une arête.

Proposition 10.15. — (i) Pour tous sommets $p \neq q$, il existe une chaîne de sommets $p = p_0, \dots, p_k = q$ telle que p_i et p_{i+1} soient adjacents pour $i = 0, \dots, k - 1$.

(ii) Pour toutes faces $F \neq G$, il existe une chaîne de faces $F = F_0, \dots, F_k = G$ telle que F_i et F_{i+1} soient adjacentes pour $i = 0, \dots, k - 1$.

Démonstration. — Fixons un sommet p_0 et disons qu'un sommet q est joignable à p_0 s'il existe une chaîne comme ci-dessus. Remarquons que si q appartient à une face F et est joignable à p_0 alors tous les sommets de F le sont aussi. On peut donc parler de la « réunion des faces dont les sommets sont joignables à p_0 »; on obtient ainsi une réunion finie de faces $Z_0 = Z(p_0)$, qui est une partie fermée de ∂X . Supposons que $Z_0 \neq \partial X$.

Alors il existe un sommet p_1 non joignable à p_0 ; notons $Z_1 = Z(p_1)$ la réunion des faces dont les sommets sont joignables à p_1 . D'après la proposition précédente, chaque face de Z_1 est disjointe de chaque face de Z_0 , donc Z_1 et Z_0 sont disjointes. Si $\partial X \neq Z_0 \cup Z_1$, on peut répéter cette procédure et l'on obtient ainsi une *partition* de ∂X en parties fermées non vides Z_1, \dots, Z_r , avec $r \geq 2$.

Mais ceci est impossible car ∂X est *connexe*, car d'après la proposition 9.3 c'est l'image par une application continue de la sphère S^2 , qui est connexe.⁽¹⁸⁾ Cette contradiction montre que $Z_0 = \partial X$, ce qui prouve (i).

Prouvons d'abord (ii) dans le cas particulier où F et G ont en commun un sommet s . Soit \mathcal{H} un plan d'appui, donné par une équation $f(x) = 0$, tel que $\mathcal{H} \cap P = \{s\}$ et $f(x) > 0$ pour tout $x \in P - \{s\}$. Alors « on voit »⁽¹⁹⁾ que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le plan \mathcal{H}_ε d'équation $f(x) = \varepsilon$ coupe P selon un polygone convexe dont les arêtes (resp. sommets) sont les intersections de \mathcal{H}_ε avec les faces (resp. arêtes) de P contenant s . On peut donc numéroter ces faces de façon cyclique $F = F_0, F_1, \dots, F_r = F_0$ de sorte que F_i et F_{i+1} soient adjacentes.

Traisons maintenant le cas général. Fixons une face F_0 et notons Z_0 la réunion des faces qui sont joignables à F_0 par une suite de faces adjacentes. Supposons $Z_0 \neq \partial X$, il existe alors une face F_1 non joignable à F_0 ; notons Z_1 la réunion des faces joignables à F_1 .

Si F'_0 et F'_1 sont des faces de Z_0 et Z_1 respectivement, elles ne sont pas joignables donc, d'après la proposition 10.13 et le cas particulier traité ci-dessus, on en déduit que $F'_0 \cap F'_1 = \emptyset$. Il en résulte que Z_0 et Z_1 sont *disjointes*. Comme en (i), on obtient donc une *partition* de ∂X en parties fermées non vides Z_1, \dots, Z_r , avec $r \geq 2$, ce qui est impossible puisque ∂X est connexe. Cette contradiction montre que $Z_0 = \partial X$, ce qui prouve (ii). \square

⁽¹⁸⁾En effet, on peut relier chaque point de S^2 au « pôle Nord » par un arc de méridien. Ou bien on peut dire que S^2 est la réunion de deux demi-hémisphères, chacun homéomorphe à un disque du plan. *Par ailleurs*, on peut montrer, plus précisément, que ∂X est homéomorphe à S^2 , cf. par exemple [Go, Prop. 5.5].

⁽¹⁹⁾Ceci nécessiterait une démonstration, qui sera peut-être donnée dans une version ultérieure de la section 12.

11. Polytopes réguliers de dimension 3

Commençons par une définition valable dans tout espace affine euclidien \mathcal{E} .

Définition et proposition 11.1. — Soient $A \neq B$ deux points de \mathcal{E} . L'ensemble des points M tels que $AM = BM$ est l'hyperplan orthogonal à \overrightarrow{AB} passant par le milieu I du segment $[A, B]$. Il est appelé **hyperplan médiateur** de A et B .

Démonstration. — Comme $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ on a :

$$MB^2 - MA^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = 2(\overrightarrow{MI} \mid \overrightarrow{AB})$$

donc l'égalité $MB = MA$ équivaut à ce que \overrightarrow{IM} soit orthogonal à \overrightarrow{AB} . \square

11.1. Retour sur les polygones réguliers. — Afin de justifier la définition que l'on va donner plus bas des polytopes réguliers de \mathbb{R}^3 , revenons sur le cas des polygones convexes réguliers d'un plan euclidien (\mathcal{E}, E) . Soit P un tel polygone et soit O l'isobarycentre des sommets; il est laissé fixe par tout élément de $\text{Is}(P)$.

Terminologie. — On appelle **drapeau** de P tout couple (s, A) où A est une arête de P et s un sommet de A .

Remarque 11.2. — (1) Le groupe $\text{Is}(P)$ agit **transitivement** sur l'ensemble des drapeaux de P .

En effet, fixons deux arêtes A et A' et notons s et t les deux sommets de A . Il existe un unique élément f de $\text{Is}^+(P)$ tel que $f(A) = A'$; posons $s' = f(s)$ et $t' = f(t)$. Soit D la droite passant par O et le milieu de A' , alors la symétrie orthogonale τ_D par rapport à D échange s' et t' , donc f (resp. $\tau_D \circ f$) envoie (s, A) sur (s', A') (resp. (t', A')). Ceci prouve que l'action est transitive.

(2) D'autre part, cette action est **libre**. En effet, si $f \in \text{Is}(P)$ fixe un drapeau (s, A) alors f fixe aussi le second sommet t de A , et comme tout élément de $\text{Is}(P)$ fixe O on obtient que f fixe les points O, s, t , qui forment un repère du plan, d'où $f = \text{id}$.

Réciproquement, on peut prendre la propriété (1) de la remarque précédente comme *définition* d'un polygone convexe régulier, i.e. :

Définition 11.3. — Soit C un n -gone convexe du plan euclidien, de sommets (consécutifs) p_1, \dots, p_n . On dit que C est **régulier** si le groupe $\text{Is}(P)$ agit transitivement sur les drapeaux de P . Dans ce cas, l'action est également libre.

En effet, on a vu qu'avec la définition antérieure l'action est libre et transitive. Réciproquement, si l'action est transitive sur les arêtes (resp. les sommets) alors toutes les longueurs (resp. tous les angles) sont égaux, donc C est régulier au sens de la définition antérieure.

11.2. Polytopes réguliers de \mathbb{R}^3 . — Dans ce paragraphe, (\mathcal{E}, E) désigne un espace affine euclidien de dimension 3. Rappelons la classification des isométries de \mathcal{E} ayant un point fixe (cf. [Po, Chap. 6] ou [Co, §7.5]).

(1) Tout élément f de $\text{Is}^+(\mathcal{E})$ ayant un point fixe p est une *rotation* et si $f \neq \text{id}_{\mathcal{E}}$ l'ensemble des points fixes est une droite \mathcal{D} passant par p , appelée l'axe de rotation.

Supposons maintenant que g soit un élément de $\text{Is}^-(\mathcal{E})$ ayant un point fixe p . Distinguons plusieurs cas :

(2) Si la partie linéaire \overrightarrow{g} de g est $-\text{id}_E$, alors g est la *symétrie centrale* de centre p , i.e. pour tout point m de \mathcal{E} on a $\overrightarrow{pg(m)} = -\overrightarrow{pm}$. Dans ce cas, p est l'unique point fixe.

Sinon $\text{Ker}(\vec{g} + \text{id}_E)$ est une droite vectorielle D , appelée la droite des *anti-invariants* (c'est l'ensemble des $u \in E$ tels que $\vec{g}(u) = -u$). Posons $\mathcal{D} = p + D$ et $\mathcal{P} = p + D^\perp$. On a alors les deux cas suivants :

(3) g est la *symétrie orthogonale* $\tau_{\mathcal{D}}$ par rapport à \mathcal{D} , auquel cas l'ensemble des points fixes est le plan \mathcal{P} .

(4) g est la composée de $\tau_{\mathcal{D}}$ et d'une rotation d'axe \mathcal{D} et d'angle $\theta \neq 0$. Dans ce cas, p est l'unique point fixe et l'on dit que g est une *rotation gauche* d'axe \mathcal{D} (on pourrait dire aussi « anti-axe »).

En particulier, tout $h \in \text{Is}(\mathcal{E})$ ayant au moins deux points fixes est soit une rotation, soit une symétrie orthogonale.

Définition 11.4. — Soit C un polytope *épais* de \mathcal{E} . On dit que C est **régulier** si $\text{Is}(C)$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux de C (cf. 10.12).

Fixons un tel polytope régulier C et tirons des conséquences de la définition.

Notations 11.4.1. — (1) Notons s (resp. a, f) le nombre de sommets (resp. arêtes, faces) de C .

(2) Soit O le centre de gravité des sommets. Tout élément h de $\text{Is}(C)$ permute les sommets, donc fixe le point O .

(3) Comme l'action de $\text{Is}(C)$ sur les faces (resp. les sommets, resp. les arêtes) est transitive, alors toutes les faces ont le même nombre $m \geq 3$ d'arêtes, par chaque sommet passe le même nombre $k \geq 3$ d'arêtes, et toutes les arêtes ont la même longueur. De plus, tous les sommets sont à égale distance de O .

(4) Pour toute face F et toute arête A , notons q_F le centre de gravité des sommets de F et q_A le milieu de A .

Lemme 11.5. — (i) $\text{Is}(C)$ agit librement sur les drapeaux et est de cardinal $2mf = 2sk$.

(ii) Pour toute face F (resp. arête A , resp. sommet p), $\text{Is}^-(C)$ contient au moins une symétrie orthogonale qui fixe F (resp. A , resp. p).

(iii) $G = \text{Is}^+(C)$ est de cardinal $mf = sk$ et agit transitivement sur les faces (resp. les arêtes, resp. les sommets).

Démonstration. — Soit (p, A, F) un drapeau et soit $g \in \text{Is}(C)$ fixant ce drapeau. Alors g fixe les points O, p, q_A, q_F et comme ceux-ci forment un repère affine de \mathcal{E} (car p, q_A, q_F ne sont pas alignés et O n'est pas dans le plan engendré par F), il en résulte que g est l'identité. Ceci prouve que l'action de $\text{Is}(C)$ sur les drapeaux est libre. Comme elle est transitive, le cardinal de $\text{Is}(C)$ est le nombre N de drapeaux. Comme chaque face a m arêtes et chaque arête deux sommets, on a $N = 2mf$. D'autre part, comme chaque sommet appartient à k arêtes et chaque arête à deux faces, on a aussi $N = 2sk$. Ceci prouve (i).

(ii) Notons t le second sommet de A et B la seconde arête de F passant par p . Par hypothèse, il existe un élément h (resp. h') de $\text{Is}(C)$ qui envoie le drapeau (p, A, F) sur le drapeau (t, A, F) (resp. (p, B, F)). Alors h fixe les points O, q_F, q_A donc laisse fixe tout point du plan affine \mathcal{P} qu'ils engendrent. Comme $h \neq \text{id}$ (puisque $h(p) = t$), il en résulte que h est la symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{P} (qui est donc le plan médiateur de p et t). Elle vérifie $h(F) = F$ et $h(A) = A$. De même, h' fixe les points O, p, q_F donc laisse fixe tout point du plan affine \mathcal{P}' qu'ils engendrent. Comme $h' \neq \text{id}$ (puisque $h'(A) = B$), il en résulte que h' est la symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{P}' ; elle vérifie $h'(F) = F$ et $h'(p) = p$. Ceci prouve (ii).

Prouvons (iii). D'après (ii), $\text{Is}(C)$ contient au moins une symétrie orthogonale h . Alors, l'application $G \rightarrow \text{Is}^-(C)$, $g \mapsto h \circ g$ est *bijjective* (son inverse étant $\tau \mapsto h \circ \tau$) et comme $\text{Is}(C)$ est réunion disjointe de G et de $\text{Is}^-(C)$ on obtient que $|\text{Is}(C)| = 2|G|$ d'où $|G| = mf = sk$.

D'autre part, soient F, F' (resp. A, A' , resp. p, p') deux faces (resp. arêtes, resp. sommets) quelconques de C . Par hypothèse, il existe $g \in \text{Is}(C)$ envoyant F sur F' (resp. A sur A' , resp. p sur p'). Si $g \in G$ c'est gagné, et si $g \notin G$ soit τ un élément de $\text{Is}^-(C)$ fixant F (resp. A , resp. p), alors $g\tau$ est dans G et envoie F sur F' (resp. A sur A' , resp. p sur p'). Ceci achève la preuve de (iii). \square

Proposition 11.6. — Soient F, A, p une face, une arête et un sommet de C .

(i) F est un m -gone convexe régulier et son stabilisateur G_F dans G est un groupe cyclique d'ordre m , engendré par la rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{Oq_F}$ et d'angle $2\pi/m$.

(ii) Les k sommets voisins de p sont situés dans un plan Π orthogonal à \overrightarrow{Op} et forment dans ce plan un k -gone convexe régulier, appelé **l'étoile** de p . Par conséquent, le stabilisateur G_p de p dans G est un groupe cyclique d'ordre k , engendré par la rotation d'axe orienté par \overrightarrow{Op} et d'angle $2\pi/k$.

(iii) Le stabilisateur G_A de A dans G est un groupe cyclique d'ordre 2, engendré par le demi-tour d'axe (Oq_A) . On a donc $|G| = 2a$.

(iv) Les éléments de G sont de type (i), (ii) ou (iii) et les possibilités pour k, m, f, a, s sont données par le tableau suivant, où l'on a posé $n = |G|$:

k	m	n	f	a	s
3	3	12	4	6	4
3	4	24	6	12	8
4	3	24	8	12	6
3	5	60	12	30	20
5	3	60	20	30	12

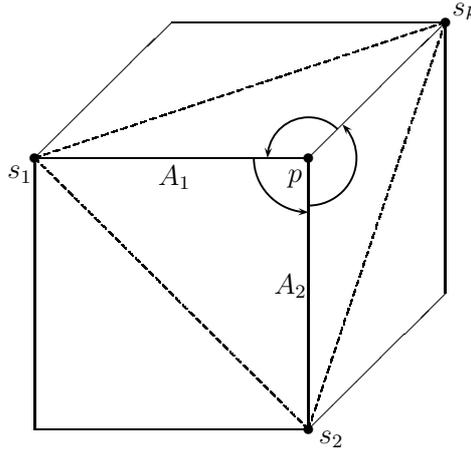
Démonstration. — (i) Notons \mathcal{P} le plan affine engendré par F . Remarquons d'abord que si un élément g de $\text{Is}(C)$ vérifie $g(F) = F$ alors, d'une part, $g(q_F) = q_F$ donc la droite (Oq_F) est formée de points fixes de g et, d'autre part, g laisse stable le plan \mathcal{P} et sa restriction $g' = g|_{\mathcal{P}}$ vérifie $g'(F) = F$, i.e. c'est un élément de $\text{Is}(F)$.

Par hypothèse, pour tout couple de drapeaux (s_1, A_1) et (s_2, A_2) de F , il existe un élément g de $\text{Is}(C)$ qui envoie (s_1, A_1, F) sur (s_2, A_2, F) et alors g' envoie (s_1, A_1) sur (s_2, A_2) . Ceci montre que $\text{Is}(F)$ agit transitivement sur les drapeaux de F , et donc F est un m -gone régulier.

Soit R_F la rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{Oq_F}$ et d'angle $2\pi/m$. Comme tout élément de G_F est une rotation d'axe (Oq_F) qui laisse F stable, on en déduit que G_F est contenu dans le groupe cyclique $\langle R_F \rangle$ engendré par R_F , qui est de cardinal m . Or, comme $|G| = mf$ et que la G -orbite de F est de cardinal f , on a aussi $|G_F| = m$, d'où $G_F = \langle R_F \rangle$. Ceci achève la preuve de (i).

Prouvons (ii). Nommons A_1, \dots, A_k les arêtes passant par p , de telle sorte que A_i et A_{i+1} appartiennent à une même face F_i , et notons s_i le second sommet de A_i . (On pose $A_{k+1} = A_1$ et $s_{k+1} = s_1$.) Comme $Os_1 = Os_i$ et $ps_1 = ps_i$, alors O et p appartiennent au plan médiateur de s_1 et s_i , donc $\overrightarrow{s_1s_i}$ est orthogonal à \overrightarrow{Op} , donc s_1, \dots, s_k appartiennent au plan $\Pi = s_1 + (\mathbb{R}\overrightarrow{Op})^\perp$.

Alors $C \cap \Pi$ est un polygone convexe Γ_p , appelé **l'étoile** de p , dont chaque arête $[s_i, s_{i+1}]$ est l'intersection de Π avec la face F_i , cf. la figure suivante :

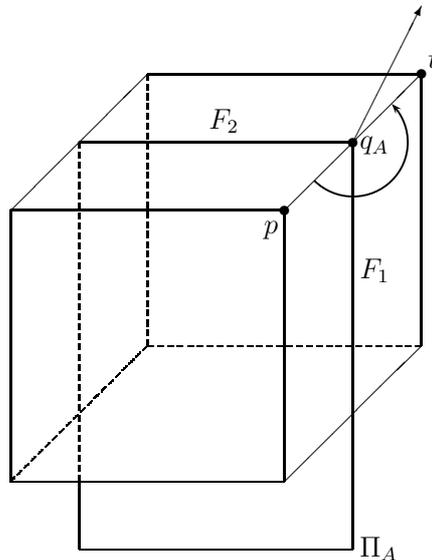


Remarquons maintenant que si un élément g de $\text{Is}(C)$ vérifie $g(p) = p$ alors la droite (Op) est formée de points fixes de g et, d'autre part, g laisse stable le plan Π et sa restriction $g' = g_\Pi$ vérifie $g'(\Gamma_p) = \Gamma_p$, i.e. c'est un élément de $\text{Is}(\Gamma_p)$.

Donnons-nous deux drapeaux $\mathcal{D}_1 = (s_i, \alpha)$ et $\mathcal{D}_2 = (s_j, \beta)$ de Γ_p , où α (resp. β) est l'intersection de Γ_p avec une face F (resp. F') de C contenant l'arête A_i (resp. A_j). Ils correspondent aux deux drapeaux $\tilde{\mathcal{D}}_1 = (p, A_i, F)$ et $\tilde{\mathcal{D}}_2 = (p, A_j, F')$ de C . Par hypothèse, il existe un élément g de $\text{Is}(C)$ qui envoie $\tilde{\mathcal{D}}_1$ sur $\tilde{\mathcal{D}}_2$; alors g fixe p et sa restriction g' à Π envoie \mathcal{D}_1 sur \mathcal{D}_2 . Ceci montre que $\text{Is}(\Gamma_p)$ agit transitivement sur les drapeaux de Γ_p , et donc Γ_p est un k -gone régulier.

Soit R_p la rotation d'axe orienté par \overrightarrow{Op} et d'angle $2\pi/k$. Comme tout élément de G_p est une rotation d'axe (Op) qui laisse Γ_p stable, on en déduit que G_p est contenu dans le groupe cyclique $\langle R_p \rangle$ engendré par R_p , qui est de cardinal k . Or, comme $|G| = ks$ et que la G -orbite de p est de cardinal s , on a aussi $|G_p| = k$, d'où $G_p = \langle R_p \rangle$. Ceci prouve (ii).

Prouvons (iii). Soient A une arête, p, t ses deux sommets, et F_1 et F_2 les deux faces qui ont A comme arête commune. Soit g un élément de $\text{Is}(C)$, distinct de l'identité, vérifiant $g(A) = A$; alors $g(q_A) = q_A$ et donc la droite (Oq_A) est formée de points fixes de g ; d'autre part ou bien $g(p) = p$ et $g(t) = t$ ou bien g échange p et t . Dans le premier cas, le plan engendré par O, p, t est formé de points fixes, et donc g est la symétrie orthogonale par rapport à ce plan. Si g échange p et t , alors g est ou bien la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur Π_A de p et t , auquel cas on a $g(F_1) = F_1$ et $g(F_2) = F_2$, ou bien le demi-tour R_A d'axe (Oq_A) , qui échange les faces F_1 et F_2 , cf. la figure ci-dessous :



Pour prouver (iii), il suffit donc de montrer que le demi-tour R_A d'axe (Oq_A) appartient à $\text{Is}(C)$. Or, par hypothèse, il existe un élément $h \in \text{Is}(C)$ qui envoie (p, A, F_1) sur (t, A, F_2) . Comme $h(p) \neq p$ et $h(F_1) \neq F_1$, alors h ne peut être aucune des deux symétries mentionnées plus haut, donc h est nécessairement égal à R_A . Ceci prouve (iii).

Prouvons (iv). Tout $g \in G$ distinct de l'identité est une rotation, donc fixe exactement deux points de la frontière de C . Soit q un tel point fixe. Distinguons trois cas :

(1) Si q est intérieur à une face F , alors $g(F) = F$ (car $q = g(q)$ est intérieur à la face $g(F)$), donc on est dans le cas (i) : l'unique point de F fixé par g est q_F , d'où $q = q_F$.

(2) Si q est intérieur à une arête A , alors $g(A) = A$ (car $q = g(q)$ est intérieur à l'arête $g(A)$), donc on est dans le cas (iii) et donc $q = q_A$.

(3) Enfin, dans le cas restant, q est un sommet p et l'on est dans le cas (ii).

En faisant la somme du nombre de cas considérés dans (i), (ii), (iii), on obtient donc tous les éléments de $G - \{\text{id}\}$, chaque tel élément étant compté deux fois puisque son axe rencontre la frontière de C en deux points distincts. Notant $n = |G|$ on obtient donc l'égalité :

$$(\dagger) \quad f \cdot (m - 1) + s \cdot (k - 1) + a \cdot 1 = 2(n - 1) = 2n - 2.$$

En tenant compte des égalités $n = mf = ks = 2a$, l'égalité (\dagger) se réécrit de plusieurs façons. D'une part, en divisant par n , on obtient

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{m} - \frac{1}{k} = -\frac{2}{n} < 0$$

ce qui entraîne que m, k ne peuvent être tous deux ≥ 4 (car sinon le terme de gauche serait ≥ 0). Comme m, k sont ≥ 3 , le plus petit d'entre eux doit être égal à 3 et, désignant par β le second, on a

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{\beta} = -\frac{2}{n} < 0$$

et donc β ne peut prendre que les valeurs 3, 4, 5, auxquels cas on a, respectivement,

$$-\frac{2}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{6} & \text{d'où } n = 12, \\ -\frac{1}{12} & \text{d'où } n = 24, \\ -\frac{1}{30} & \text{d'où } n = 60. \end{cases}$$

On obtient ainsi les trois premières colonnes du tableau, et compte tenu des égalités $n = mf = ks = 2a$ les trois autres s'en déduisent. Ceci prouve (iv). \square

Remarque 11.7. — En tenant compte des égalités $n = mf = ks = 2a$, l'égalité (\dagger) se réécrit $-f - s + a = -2$, i.e. :

$$(\star) \quad \boxed{f - a + s = 2}$$

ce qui est la célèbre *formule d'Euler*, valable en fait pour tout polytope, pas nécessairement régulier ; voir par exemple [Be, §12.7] ou [Go, Th. 5.4].

Avant de montrer l'*existence* d'un polytope régulier correspondant à chaque ligne du tableau, montrons d'abord qu'un tel polytope (s'il existe) est unique à une similitude directe près.

Définition 11.8. — Le groupe des *similitudes* (directes) de l'espace affine euclidien (\mathcal{E}, E) est le sous-groupe de $\text{GA}(\mathcal{E})$ engendré par les homothéties de rapport $\lambda > 0$ et les isométries (directes).

Soient C un polytope régulier de centre O . Conservons les notations (m, k) précédentes et notons ℓ la longueur d'une arête. Introduisons de plus les longueurs suivantes : soient (p, A, F) un drapeau de C et Γ le k -gone régulier formé par les sommets s_1, \dots, s_k voisins de p ; alors on note :

- r_C le rayon de C , i.e. la distance Op .
- r_F le rayon de F , i.e. la distance $q_F p$.
- r_Γ le rayon de Γ , i.e. la distance $q_\Gamma s_i$, où q_Γ désigne le centre de Γ .
- L la longueur d'une arête de Γ (i.e. $s_k s_1$).
- φ l'angle au centre entre deux sommets voisins, i.e. l'angle en O du triangle $pO s_1$.

Proposition 11.9. — On a les relations suivantes :

$$(*) \quad Oq_F^2 + r_F^2 = r_C^2 = Oq_\Gamma^2 + r_\Gamma^2$$

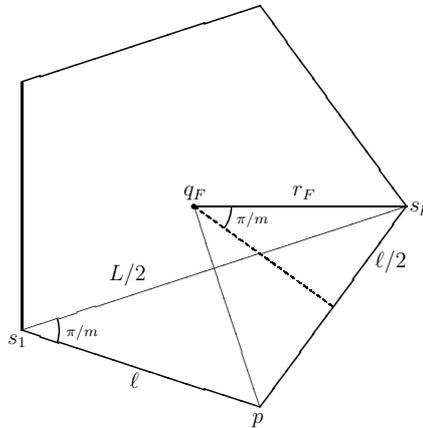
$$(1) \quad \frac{\ell}{2} = r_F \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \quad (2) \quad \frac{L}{2} = \ell \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \quad (3) \quad \frac{L}{2} = r_\Gamma \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$(4) \quad r_\Gamma = \ell \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (5) \quad \frac{\ell}{2} = r_C \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

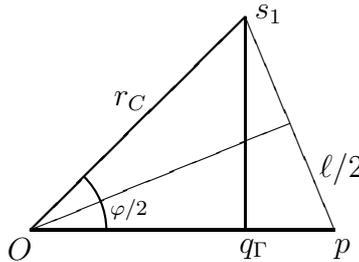
Par conséquent, $r_F, L, r_\Gamma, \varphi, r_C, Oq_F$ et Oq_Γ sont déterminés par ℓ .

Démonstration. — Comme O et q_F appartiennent à l'hyperplan médiateur de chaque arête de F , alors $\overrightarrow{Oq_F}$ est orthogonal au plan engendré par F , d'où $Oq_F^2 + r_F^2 = r_C^2$. De même, $\overrightarrow{Oq_\Gamma}$ est orthogonal au plan engendré par Γ , d'où $r_C^2 = Oq_\Gamma^2 + r_\Gamma^2$. Ceci prouve (*).

Les deux sommets de F voisins de p sont s_1 et s_k . Comme F est un m -gone régulier, on a la figure ci-dessous :



On en déduit les égalités : (1) $\ell/2 = r_F \sin(\pi/m)$ et (2) $L/2 = \ell \cos(\pi/m)$. De même, dans le k -gone convexe régulier Γ , on a l'égalité : (3) $L/2 = r_\Gamma \sin(\pi/k)$. D'autre part, dans le plan engendré par O, p et s_1 , on a la figure ci-dessous :



de laquelle on déduit : (5) $\ell/2 = r_C \sin(\varphi/2)$ et $r_\Gamma = r_C \sin(\varphi) = 2r_C \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2)$, d'où : (4) $r_\Gamma = \ell \cos(\varphi/2)$. (Ceci s'obtient aussi en disant que l'angle $\widehat{q_\Gamma s_1 p}$ vaut $\varphi/2$.)

On voit donc que, ℓ étant fixé, les formules (1-4) déterminent successivement $r_F, L, r_\Gamma, \frac{\varphi}{2}$ (et donc φ) ; plus précisément on déduit de (4), (3) et (2) que :

$$(\star) \quad \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{r_\Gamma}{\ell} = \frac{\cos(\pi/m)}{\sin(\pi/k)}.$$

Puis (5) détermine r_C et alors (*) détermine Oq_F et Oq_Γ . \square

Proposition 11.10. — *S'il existe un polytope régulier C correspondant à une ligne du tableau 11.6 (iv), il est unique à une similitude directe près.*

Démonstration. — Soient C et C' deux polytopes réguliers correspondant à une même valeur du couple (k, m) . Notons O, O' leurs centres et ℓ, ℓ' la longueur de leurs arêtes. En appliquant à C' la translation de vecteur $\overrightarrow{O'O}$ puis l'homothétie de centre O et de rapport ℓ/ℓ' , on se ramène au cas où $O' = O$ et $\ell' = \ell$. On peut poursuivre de deux façons :

Variante 1. Fixons un sommet p (resp. p') de C (resp. C') ; d'après la proposition précédente on a $Op = Op'$ donc en appliquant à C' une rotation de centre O on peut supposer que $p' = p$. Alors, d'après la proposition précédente, les étoiles de p dans C et C' sont des k -gones réguliers (s_1, \dots, s_k) et (s'_1, \dots, s'_k) de même rayon situés dans le même plan orthogonal à \overrightarrow{Op} . Donc en appliquant à C' une rotation d'axe (Op) on peut faire coïncider s_1 et s'_1 et alors on a $s'_i = s_i$ pour tout i .

D'après la proposition 10.15, on peut prolonger la suite $p_1, p_2 = s_1, \dots, p_{k+1} = s_k$ en une suite (p_i) de sommets de C telle que tout sommet de C y figure au moins une fois et que deux sommets consécutifs soient voisins. Procédant par récurrence, on peut supposer que r est un entier $\geq k + 1$ tel que p_i est un sommet de C' pour tout $i \leq r$. Remarquons que l'étoile de p_r dans C (resp. dans C') est l'unique k -gone convexe régulier d'axe (Op_r) passant par p_{r-1} , donc ces deux étoiles coïncident, donc p_{r+1} est aussi un sommet de C' . Il en résulte que tout sommet de C est un sommet de C' , et réciproquement (en échangeant les rôles de C et C'), d'où $C' = C$.

Variante 2. Fixons une face F (resp. F') de C (resp. C') ; d'après la proposition précédente leurs centres $q_{F'}$ et q_F sont à la même distance de O donc en appliquant à C' une rotation de centre O on peut supposer que $q_{F'} = q_F$. Alors F et F' sont deux m -gones réguliers contenus dans le plan $q_F + (\mathbb{R}\overrightarrow{Oq_F})^\perp$, centrés en q_F et de même rayon $r_F = \ell/2 \sin(\pi/m)$. En appliquant alors à C' une rotation d'axe (Oq_F) , on peut faire coïncider un sommet p' de F' avec un sommet p de F , et alors $F' = F$ (car tous les sommets se déduisent de p par des rotations d'angle $2r\pi/m$).

D'autre part, on a vu dans la démonstration de la proposition 11.6 que si F_1 est une face de C (resp. C') alors toutes les faces de C (resp. C') ayant un sommet p_1 commun avec F_1 se déduisent de F_1 par des rotations d'axe (Op_1) et d'angle $2r\pi/k$. Il en résulte que si F_1 est une face commune à C et C' , alors chaque face de C adjacente à F_1 est aussi une face de C' , et réciproquement. Comme, d'après la proposition 10.15, F est joignable à toute face de C par un chemin de faces adjacentes, on en déduit que toute face de C est une face de C' et réciproquement, d'où $C' = C$.

Dans chacune des variantes, on a fait coïncider C' et C en appliquant à C' une translation, une homothétie de rapport ℓ/ℓ' et des rotations, ce qui montre que C est unique à similitude directe près. \square

Pour construire les cinq polytopes réguliers, on aura besoin du :

Lemme 11.11. — *Soient (p_0, p_1, p_2, p_3) et (p'_0, p'_1, p'_2, p'_3) deux repères affines de \mathcal{E} et soit f l'unique élément de $\text{GA}(\mathcal{E})$ envoyant p_i sur p'_i pour $i = 0, \dots, 3$. Si $p'_i p'_j = p_i p_j$ pour tout i, j , alors f est une isométrie.*

Démonstration. — Notons g la partie linéaire de f et introduisons les vecteurs $u_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$ et $u'_i = \overrightarrow{p'_0 p'_i} = g(u_i)$. Pour $i, j = 1, 2, 3$, on a

$$(u'_i | u'_i) = (p'_0 p'_i)^2 = (p_0 p_i)^2 = (u_i | u_i)$$

et l'égalité de $(p'_i p'_j)^2 = (u'_j - u'_i | u'_j - u'_i) = (u'_j | u'_j) + (u'_i | u'_i) - 2(u'_i | u'_j)$ avec $(p_i p_j)^2$ entraîne alors que $(u'_i | u'_j) = (u_i | u_j)$ pour tout $i, j = 1, 2, 3$.

Pour des vecteurs $x = \sum_{i=1}^3 x_i u_i$ et $y = \sum_{j=1}^3 y_j u_j$ arbitraires, on a donc :

$$(g(x) | g(y)) = \left(\sum_{i=1}^3 x_i u'_i \mid \sum_{j=1}^3 y_j u'_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j (u'_i | u'_j) = \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j (u_i | u_j) = (x | y).$$

Ceci montre que g préserve le produit scalaire donc est une isométrie vectorielle de E . Par conséquent f est une isométrie de \mathcal{E} . \square

Le tétraèdre régulier 11.12. — Partons du triangle équilatéral donné, dans le plan horizontal $z = 0$ identifié à \mathbb{C} , par les racines cubiques de l'unité, et considérons donc dans \mathbb{R}^3 les trois points :

$$p_1 = (1, 0, 0), \quad p_2 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \quad p_3 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0 \right).$$

On a $(p_1 p_2)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$, donc les distances $p_i p_j$ sont toutes égales à $\sqrt{3}$. Posons $p_4 = (0, 0, \sqrt{2})$, alors pour $i = 1, 2, 3$ on a $(p_4 p_i)^2 = 3$.

Notons alors T le tétraèdre de sommets p_1, \dots, p_4 (i.e. l'enveloppe convexe de ces points). Toutes ses arêtes sont de longueur $\sqrt{3}$. Remarquons que le centre de gravité de p_1, p_2, p_3 est $(0, 0, 0)$ et donc le centre de gravité de T est le point $(0, 0, \sqrt{2}/4)$, que l'on notera O .

Pour tout élément σ du groupe symétrique S_4 , notons f_σ l'élément de $\text{GA}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f_\sigma(p_i) = p_{\sigma(i)}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Ceci définit un morphisme de groupes $S_4 \rightarrow \text{GA}(\mathcal{E})$.

D'après le lemme précédent, f_σ est une isométrie de \mathbb{R}^3 , et c'est donc un élément de $\text{Is}(T)$. Comme S_4 agit transitivement sur les triplets (i, j, k) , alors $\text{Is}(T)$ agit transitivement sur les drapeaux de T , donc T est bien un polytope régulier au sens de la définition 11.4. Enfin, tout élément de $\text{Is}(T)$ permute nécessairement les sommets de T , donc est l'un des éléments f_σ définis plus haut. Il en résulte que l'application $\sigma \mapsto f_\sigma$ est un *isomorphisme* de groupes de S_4 sur $\text{Is}(T)$. Décrivons explicitement l'isométrie associée à chaque permutation.

Rappelons que, pour tout $n \geq 2$, les éléments de S_n de signature 1 forment un sous-groupe de S_n de cardinal $n!/2$, appelé le *groupe alterné* et noté A_n . Alors, les 11 éléments de $A_4 - \{\text{id}\}$ se répartissent comme suit :

(1) Pour chaque i , il y a deux 3-cycles qui fixent i : ils correspondent aux deux rotations d'axe (Op_i) et d'angle $\pm 2\pi/3$. On obtient ainsi les 8 rotations qui fixent un sommet et laissent stable la face opposée.

(2) L'élément (12)(34) échange 1 et 2 d'une part, et 3 et 4 d'autre part : il correspond au demi-tour d'axe la droite joignant le milieu de $[p_1, p_2]$ au milieu de $[p_3, p_4]$. De même pour les deux éléments (13)(24) et (14)(23).

Et les 12 éléments de $S_4 - A_4$ se répartissent comme suit :

(3) Chaque transposition (ij) correspond à la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur de $[p_i, p_j]$, qui est le plan passant par O et les deux autres sommets p_k et p_ℓ . Elle laisse stable les deux faces $p_i p_j p_k$ et $p_i p_j p_\ell$ et échange les deux autres $p_k p_\ell p_i$ et $p_k p_\ell p_j$. On obtient ainsi 6 symétries orthogonales, dont chacune fixe deux sommets.

(4) Les 6 éléments restants de S_4 sont les 4-cycles. Notons q_{ij} le milieu de l'arête $[p_i, p_j]$ et considérons, par exemple, le 4-cycle $c : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, qu'on note (1234). Il échange q_{13} et q_{24} et permute les autres milieux comme suit :

$$q_{12} \rightarrow q_{23} \rightarrow q_{34} \rightarrow q_{41} \rightarrow q_{12}.$$

Son inverse c^{-1} est le 4-cycle (4321) = (1432), il échange aussi q_{13} et q_{24} et permute les autres milieux comme suit :

$$q_{41} \rightarrow q_{34} \rightarrow q_{23} \rightarrow q_{12} \rightarrow q_{41}.$$

On en déduit que c et c^{-1} correspondent aux rotations gauches d'axe $(q_{12}q_{34})$ et d'angles $\pm\pi/4$. De même, (1243) et son inverse (1342) (resp. (1324) et son inverse (1423)) correspondent aux rotations gauches d'angles $\pm\pi/4$ et d'axe $(q_{14}q_{23})$ (resp. $(q_{12}q_{34})$).

Le cube 11.13. — Soit C le cube dont les huit sommets sont les points $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. D'une part, soit $\tau_x : (x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$ la symétrie orthogonale par rapport au plan Oyz et définissons de même τ_y et τ_z . On voit aussitôt que τ_x , τ_y et τ_z commutent entre elles et engendrent un sous-groupe V de $\text{Is}(\mathbb{R}^3)$ de cardinal 8, isomorphe à $\{\pm 1\}^3$. Dans la suite, on identifie le groupe « abstrait » $\{\pm 1\}^3$ à V .

D'autre part, S_3 agit de façon isométrique sur \mathbb{R}^3 par permutation des coordonnées, i.e. pour tout $\sigma \in S_3$ on pose

$$f_\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}).$$

De façon plus concrète, S_3 est engendré par les transpositions et (12) (resp. (23), resp. (13)) correspond à la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x_1 = x_2$ (resp. $x_2 = x_3$, resp. $x_1 = x_3$). Alors le 3-cycle $c = (123)$, égal au produit (12)(23), correspond à la composée :

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3, x_2) \mapsto (x_3, x_1, x_2)$$

qui est la rotation R d'axe orienté par le vecteur \overrightarrow{Op} , où $p = (1, 1, 1)$, et d'angle $2\pi/3$. Enfin, c^{-1} correspond à la rotation inverse $R^{-1} = R^2$. On obtient ainsi un sous-groupe Σ_3 de $\text{Is}(\mathbb{R}^3)$, isomorphe à S_3 . On note A_3 le sous-groupe $\{\text{id}_\mathcal{E}, R, R^{-1}\}$ (on l'utilisera pour construire le dodécaèdre régulier).

Remarquons que S_3 agit aussi sur $V = \{\pm 1\}^3$ par permutation des facteurs, et que cette action respecte la structure de groupe de V , i.e. pour tout $\sigma \in S_3$ et $x, y \in V$, on a $\sigma(x)\sigma(y) = \sigma(xy)$.

Notons alors W le sous-groupe de $\text{Is}(\mathbb{R}^3)$ engendré par V et Σ_3 . Pour tout $v = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in V$ et $\sigma \in S_3$, on a pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} (f_\sigma \circ v)(x) &= f_\sigma(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \varepsilon_3 x_3) \\ &= (\varepsilon_{\sigma^{-1}(1)} x_{\sigma^{-1}(1)}, \varepsilon_{\sigma^{-1}(2)} x_{\sigma^{-1}(2)}, \varepsilon_{\sigma^{-1}(3)} x_{\sigma^{-1}(3)}) \\ &= (\varepsilon_{\sigma^{-1}(1)}, \varepsilon_{\sigma^{-1}(2)}, \varepsilon_{\sigma^{-1}(3)}) (f_\sigma(x)) = (\sigma(v) \circ f_\sigma)(x) \end{aligned}$$

d'où $\boxed{f_\sigma \circ v = \sigma(v) \circ f_\sigma \quad (\star)}$ et donc $f_\sigma \circ v \circ f_\sigma^{-1} = \sigma(v)$.

Il en résulte que V est un sous-groupe distingué de W et que l'application $\Sigma_3 \times V \rightarrow W$, $(f_\sigma, v) \mapsto f_\sigma \circ v$ est *surjective*, car on déduit de (\star) par récurrence sur N que tout produit $g_1 \cdots g_N$ avec chaque g_i dans V ou dans Σ_3 s'écrit sous la forme $f_\sigma \circ v$. De plus, on voit facilement que $V \cap \Sigma_3 = \{\text{id}\}$ et il en résulte que l'application précédente est *injective*. C'est donc une bijection, et donc W est le produit semi-direct de V par Σ_3 . (Il est de plus isomorphe au groupe « abstrait » $\{\pm 1\}^3 \rtimes S_3$.) Il est de cardinal 48.

Montrons que l'action de W sur les drapeaux est transitive. Comme il y a 6 faces et que chacune a 4 arêtes, le nombre de drapeaux est $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48 = |W|$, donc pour montrer que l'action est transitive il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit alors $g = f_\sigma \circ v$ un élément de W fixant le drapeau (p, A, F) , où F est la face donnée par $z = 1$, A l'arête donnée par $z = 1 = y$ et p le sommet $(1, 1, 1)$. Comme $g(p) = p$ on a nécessairement $v = (1, 1, 1)$ d'où $g = f_\sigma$ pour un certain $\sigma \in S_3$, et comme $f_\sigma(F) = F$ alors σ ne peut être que l'identité ou la transposition (12) , et comme le second sommet $(0, 1, 1)$ de A est laissé fixe, alors $\sigma = \text{id}$. Ceci prouve que l'action de W sur les drapeaux de C est libre et donc transitive. Donc C est bien un polytope régulier au sens de la définition 11.4.

De plus, d'après le lemme 11.5 et la proposition 11.6, on sait que $\text{Is}(C)$ est de cardinal $2 \cdot 24 = 48$, et comme il contient W on en déduit que $\text{Is}(C) = W$. On laisse au lecteur le soin de décrire explicitement l'isométrie correspondant à chaque élément de W .

L'octaèdre régulier 11.14. — Notons \mathcal{O} l'octaèdre dont les 6 sommets q_1, \dots, q_6 sont les centres des six faces du cube C , i.e. ce sont les points $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ et $(0, 0, \pm 1)$. Alors $q_i q_j$ est une arête ssi les faces correspondantes F_i et F_j du cube sont voisines ; on dira alors que l'arête $q_i q_j$ de \mathcal{O} est « duale » de l'arête commune aux faces F_i et F_j de C . Par exemple, si $q_1 = (0, 0, 1)$ est le centre de la face supérieure du cube, les quatre sommets voisins sont les centres des faces latérales du cube : $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$ et $(0, -1, 0)$.

Les 8 faces de \mathcal{O} sont des triangles ; plus précisément trois sommets q_i, q_j, q_k de \mathcal{O} forment une face \mathcal{F} ssi les faces correspondantes F_i, F_j, F_k ont en commun un sommet p ; on dira alors que la face \mathcal{F} de \mathcal{O} est « duale » du sommet p de C .

On voit alors que $\text{Is}(C) = W$ agit transitivement sur les drapeaux de \mathcal{O} (car chaque drapeau de \mathcal{O} est « dual » d'un unique drapeau de C), et donc \mathcal{O} est bien un polytope régulier au sens de la définition 11.4. De plus, d'après le lemme 11.5 et la proposition 11.6, on sait que $\text{Is}(\mathcal{O})$ est de cardinal $2 \cdot 24 = 48$, et comme il contient W on en déduit que $\text{Is}(\mathcal{O}) = W$. On laisse au lecteur le soin de décrire explicitement l'isométrie correspondant à chaque élément de W .

Pour finir, signalons que le cube est également le « dual » de l'octaèdre, i.e. étant donné un octaèdre régulier, les centres de ses huit faces forment les sommets d'un cube.

Avant de décrire le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers, commençons par le :

Lemme 11.15. — On a : $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos(\pi/5) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Démonstration. — Posons $\xi = \exp(2i\pi/5)$ et $z = 2 \cos(2\pi/5) = \xi + \bar{\xi} = \xi + \xi^4$. Alors

$$z^2 = \xi^2 + \xi^8 + 2 = \xi^2 + \xi^3 + 2.$$

Or ξ est racine du polynôme $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, puisque $X^5 - 1 = (X - 1)P$. Par conséquent,

$$z^2 = 1 - \xi - \xi^2 = 1 - z$$

donc z est racine du polynôme $X^2 + X - 1$, dont les racines sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Comme

$\cos(2\pi/5)$ est > 0 , on en déduit que $z = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, d'où $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Et comme

$\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$, on obtient que $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+3}{8}$. Or

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}(6+2\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}+3}{8}$$

et comme $\cos(\pi/5)$ est > 0 on en déduit qu'il vaut $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. □

Le dodécaèdre régulier 11.16. — Posons $\xi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. On a $\xi^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \xi + 1$ et $\xi^{-1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \xi - 1$.

On peut construire le dodécaèdre à partir du cube C en ajoutant à chaque face un « toit », de la façon suivante. Soit $A_3 = \{\text{id}_{\mathcal{E}}, R, R^{-1}\}$ le sous-groupe cyclique de Σ_3 formé des rotations et soit H le sous-groupe $V \rtimes A_3$ de $\text{Is}(C) = V \rtimes \Sigma_3$. Alors H est de cardinal 24 et ses éléments se répartissent comme suit. Les 12 éléments de $H^+ = H \cap \text{Is}^+(C)$ sont :

- (1) $\text{id}_{\mathcal{E}}$
- (2) Les 8 rotations dont l'axe passe par une paire de sommets opposés de C et d'angle $\pm 2\pi/3$.
- (3) Les 3 demi-tours dont l'axe passe par le centre de deux faces opposés, i.e. les demi-tours qui changent (x, y, z) en $(-x, -y, z)$, resp. $(x, -y, -z)$, resp. $(-x, y, -z)$.

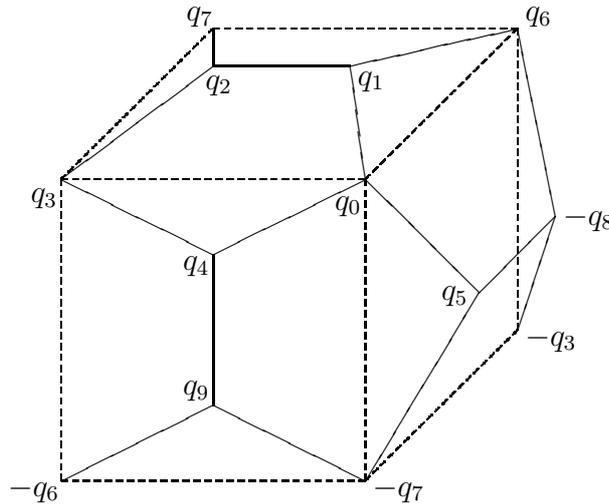
Et les 12 éléments de $H^- = H \cap \text{Is}^-(C)$ sont :

- (4) $-\text{id}_{\mathcal{E}}$
- (5) Les 8 rotations gauches dont l'axe passe par une paire de sommets opposés de C et d'angle $\pm 2\pi/3$.
- (6) Les 3 symétries orthogonales τ_x, τ_y, τ_z qui changent de signe une coordonnée, i.e. qui envoient (x, y, z) sur $(-x, y, z)$, resp. $(x, -y, z)$, resp. $(x, y, -z)$.

Au-dessus de la face supérieure ($z = 1$) du cube, plaçons le point $q_1 = (0, \xi^{-1}, \xi)$ et son image $q_2 = (0, -\xi^{-1}, \xi)$ par τ_y . Leurs images par la rotation R (resp. R^{-1}) sont les points suivants, qui sont « devant » la face $x = 1$ (resp. « à droite » de la face $y = 1$) :

$$\begin{aligned} q_4 = R(q_1) &= (\xi, 0, \xi^{-1}), & q_9 = R(q_2) &= (\xi, 0, -\xi^{-1}), \\ q_5 = R^{-1}(q_1) &= (\xi^{-1}, \xi, 0), & -q_8 = R^{-1}(q_2) &= (-\xi^{-1}, \xi, 0). \end{aligned}$$

Cette numérotation est expliquée, en posant $q_0 = (1, 1, 1)$, $q_3 = (1, -1, 1)$, $q_6 = (-1, 1, 1)$ et $q_7 = (-1, -1, 1)$, par la figure ci-dessous :



Notons \mathcal{D} l'enveloppe convexe des 20 points $\pm q_i$, pour $i = 0, \dots, 9$. Par construction, ces 20 points forment deux orbites sous l'action de H : les 8 sommets du cube et les 12 nouveaux points, donc $H \subset \text{Is}(\mathcal{D})$.

Le centre de gravité des points q_0, \dots, q_4 est

$$\frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{5} + 5}{2}, 0, \frac{3\sqrt{5} + 5}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\xi, 0, \xi^2).$$

Notons u le vecteur $(\xi, 0, \xi^2)$. On vérifie que les produits scalaires $\overrightarrow{Oq_i} \cdot u$ valent tous $\xi^2 + \xi = 2 + \sqrt{5}$ pour $i = 0, \dots, 4$, et tous 1 pour $i = 5, \dots, 9$. On a donc aussi $-\overrightarrow{Oq_i} \cdot u = -1$ pour $i = 5, \dots, 9$ et $-\overrightarrow{Oq_i} \cdot u = -2 - \sqrt{5}$ pour $i = 0, \dots, 4$.

Posant $H = (\mathbb{R}u)^\perp$, ceci montre que \mathcal{D} est contenu dans l'un des demi-espaces fermés définis par le plan $\mathcal{H}_{\xi+\xi^2} = q_0 + H$, et que $\mathcal{H}_{\xi+\xi^2} \cap \mathcal{D}$ est le pentagone Γ formé par les points q_0, \dots, q_4 . Montrons que ce pentagone est régulier, de même que le pentagone Γ' formé par les points q_5, \dots, q_9 dans le plan $\mathcal{H}_1 = q_5 + H$. Remarquons que ces deux pentagones sont invariants par la symétrie τ_y .

La longueur q_2q_1 vaut $2\xi^{-1} = \sqrt{5} - 1$, son carré est $6 - 2\sqrt{5}$. On vérifie que c'est aussi le carré des longueurs $q_1q_0 = q_2q_3$ et $q_0q_4 = q_3q_4$ (les égalités se déduisant par la symétrie τ_y). Donc toutes les arêtes de Γ sont de longueur $2\xi^{-1}$.

Tenant compte de la symétrie τ_y , il suffit de vérifier que les angles de Γ en q_1, q_0 et q_4 sont les mêmes (et donc égaux à $3\pi/5$). Or on vérifie que les produits scalaires

$$\overrightarrow{q_2q_1} \cdot \overrightarrow{q_1q_0}, \quad \overrightarrow{q_1q_0} \cdot \overrightarrow{q_0q_4} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{q_0q_4} \cdot \overrightarrow{q_4q_3}$$

valent tous les trois $2\xi^{-1}(1 - \xi^{-1})$. Comme ceci est égal à $(2\xi^{-1})^2 \cos(\theta)$, où θ désigne l'angle « extérieur » en chacun de ces sommets, on en déduit que

$$\cos(\theta) = \frac{\xi}{2}(1 - \xi^{-1}) = \frac{\xi - 1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

d'où $\theta = 2\pi/5$ et donc chaque angle intérieur est bien $3\pi/5$, comme il se doit. Ceci montre que Γ est un pentagone régulier.

On voit aussi que la longueur p_7p_6 vaut 2, et l'on vérifie qu'il en est de même pour p_6p_5 et p_5p_9 . Tenant compte de la symétrie τ_y , on a ainsi obtenu que toutes les arêtes de Γ' sont de longueur 2, et il reste à vérifier que les angles de Γ' en q_6, q_5 et q_9 sont tous égaux à $3\pi/5$. Or on vérifie que les produits scalaires

$$\overrightarrow{q_7q_6} \cdot \overrightarrow{q_6q_5}, \quad \overrightarrow{q_6q_5} \cdot \overrightarrow{q_5q_9} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{q_5q_9} \cdot \overrightarrow{q_9q_8}$$

valent tous les trois $2\xi^{-1}$. Comme ceci est égal à $4 \cos(\theta)$, où θ désigne l'angle « extérieur » en chacun de ces sommets, on en déduit que $\cos(\theta) = \xi^{-1}/2 = (\sqrt{5} - 1)/4$, d'où $\theta = 2\pi/5$ et donc chaque angle intérieur vaut bien $3\pi/5$. Ceci montre que Γ' est un pentagone régulier.

De plus, le centre de gravité de Γ' est :

$$\frac{1}{5} \left(\frac{3\sqrt{5} - 5}{2}, 0, \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{5}} (3 - \sqrt{5}, 0, \sqrt{5} - 1)$$

et l'on voit que les vecteurs u et $(3 - \sqrt{5}, 0, \sqrt{5} - 1)$ sont liés, car le déterminant ci-dessous est nul :

$$\begin{vmatrix} 1 + \sqrt{5} & 3 - \sqrt{5} \\ 3 + \sqrt{5} & \sqrt{5} - 1 \end{vmatrix} = (5 - 1) - (9 - 5) = 0.$$

On obtient ainsi que Γ et Γ' sont deux pentagones réguliers contenus respectivement dans les plans $\mathcal{H}_{\xi+\xi^2}$ et \mathcal{H}_1 orthogonaux à la droite $\mathbb{R}u$, et dont les centres sont situés sur cette droite. Il en résulte que la rotation \mathbf{R} d'axe orienté par u et d'angle $2\pi/5$ permute cycliquement les points p_0, \dots, p_4 d'une part, et p_5, \dots, p_9 d'autre part, ainsi bien entendu que leurs opposés. Donc \mathbf{R} appartient à $\text{Is}(\mathcal{D})$.

Montrons alors que $\text{Is}(\mathcal{D})$ agit transitivement sur les drapeaux de \mathcal{D} . Considérons le drapeau (q_0, q_0q_1, Γ) de \mathcal{D} et un drapeau arbitraire (p, A, F') . Par construction, le groupe H agit transitivement sur les faces de \mathcal{D} , donc en appliquant à F' un élément de H on se ramène au cas où $F' = F$. Orientons les arêtes de Γ dans le sens $q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_2$ etc. Alors, quitte à appliquer la symétrie orthogonale τ_y (qui préserve Γ mais renverse l'orientation de ses arêtes), on peut supposer que p est l'origine de l'arête orientée A . Alors, la rotation \mathbf{R}^k

qui applique p sur q_0 applique A sur q_0q_1 . Ceci prouve que \mathcal{D} est un polytope régulier au sens de la définition 11.4.

Alors, d'après la proposition 11.6, $\text{Is}^+(\mathcal{D})$ est de cardinal 60. De plus, comme $-\text{id}_{\mathcal{E}}$ appartient à $\text{Is}^-(\mathcal{D})$ et que l'application $g \mapsto -\text{id}_{\mathcal{E}} \circ g$ est une bijection de $\text{Is}^+(\mathcal{D})$ sur $\text{Is}^-(\mathcal{D})$, on en déduit que $\text{Is}(\mathcal{D})$ est le produit direct de $\text{Is}^+(\mathcal{D})$ et du groupe à deux éléments $\{\pm \text{id}_{\mathcal{E}}\}$.

Reste à déterminer la structure de $\text{Is}^+(\mathcal{D})$. Remarquons que \mathcal{D} contient cinq cubes, qui sont les transformés du cube initial C par $\text{Is}(\mathcal{D})$: pour chacun de ces cubes, les 12 arêtes joignent dans chaque face de \mathcal{D} deux sommets non adjacents et, réciproquement, chaque telle « arête » est contenue dans un unique cube. Par exemple, revenant à la figure précédente, « l'arête » q_0q_{-8} appartient au cube C' de sommets $\pm q_0, \pm q_8, \pm q_9, \pm q_2$.

L'action de $\text{Is}(\mathcal{D})$ sur ces cinq cubes définit un morphisme de groupes $\phi : \text{Is}(\mathcal{D}) \rightarrow S_5$, dont le noyau contient $-\text{id}_{\mathcal{E}}$ (qui préserve chaque cube). Réciproquement, si h appartient à $\text{Ker}(\phi)$ alors il préserve les deux cubes C et C' , dont les seuls sommets communs sont $\pm q_0$, donc h laisse stable la paire de sommets opposés $(q_0, -q_0)$, et il en est de même pour toute autre paire de sommets opposés. Quitte à composer h avec $-\text{id}_{\mathcal{E}}$, on peut supposer que $h(q_0) = q_0$ et alors ses trois voisins doivent rester voisins de q_0 , donc sont tous les trois fixés par h , qui fixe donc un repère affine de \mathcal{E} , d'où $h = \text{id}_{\mathcal{E}}$. Ceci montre que $\text{Ker}(\phi) = \{\pm \text{id}_{\mathcal{E}}\}$ et donc ϕ induit un *isomorphisme* de $\text{Is}^+(\mathcal{E})$ sur un sous-groupe K de S_5 , de cardinal 60. D'après le lemme ci-dessous, K est un sous-groupe *distingué* de S_5 .

Lemme 11.17. — Soient G un groupe fini et K un sous-groupe de G d'indice 2, i.e. tel que $|G| = 2|K|$. Alors :

- (i) K est un sous-groupe distingué.
- (ii) Le groupe quotient G/K est de cardinal 2 et donc pour tout $hh' \in G - K$ le produit hh' est dans K .

Démonstration. — Fixons un élément g de $G - K$. Alors G est la réunion disjointe de K et gK d'une part, et de K et Kg d'autre part. Comme $gK \cap K = \emptyset$, on a nécessairement $gK \subset Kg$, d'où l'égalité puisque ces deux ensembles ont même cardinal $|K|$. Il en résulte que $gK = Kg$, d'où $gKg^{-1} = K$. De plus, tout élément h de $G - K$ est de la forme gk avec $k \in K$ et comme $kKk^{-1} = K$ pour tout $k \in K$, on a donc

$$hKh^{-1} = g(kKk^{-1})g^{-1} = gKg^{-1} = K.$$

Ceci prouve que K est distingué dans G . On peut donc former le groupe quotient G/K , et il a deux éléments : la classe \bar{e} de l'élément neutre e et celle \bar{g} de g . On a alors $\bar{g}^2 = \bar{e}$ et donc si h, h' appartiennent à $G - K$, ils ont tous deux pour image \bar{g} et donc leur produit hh' a pour image \bar{e} , i.e. hh' est dans K . \square

Comme S_5 est engendré par les transpositions (ij) et que celles-ci sont toutes conjuguées, aucune n'est contenue dans le sous-groupe distingué K . Donc, d'après le lemme précédent, K contient tous les produits de deux transpositions. Or ces produits engendrent le groupe alterné A_5 . (Pour tout $n \geq 3$, A_n est le sous-groupe de S_n formé de tous les produits d'un nombre *pair* de transpositions.) Ceci prouve que $K = A_5$. En conclusion, on a obtenu que :

$$\boxed{\text{Is}(\mathcal{D}) \simeq A_5 \times \{\pm 1\}.}$$

Noter que $\text{Is}(\mathcal{D})$ n'est **pas** isomorphe à S_5 car $-\text{id}_{\mathcal{E}}$ est un élément *central* (i.e. qui commute à tous les autres) de $\text{Is}(\mathcal{D})$, tandis que le centre de S_5 est réduit à l'élément neutre.

L'icosaèdre régulier 11.18. — L'icosaèdre est « dual » du dodécaèdre, i.e. on peut le définir comme l'enveloppe convexe \mathcal{I} des 12 points p_1, \dots, p_{12} qui sont les centres des faces du dodécaèdre \mathcal{D} . Alors $p_i p_j$ est une arête de \mathcal{I} ssi les faces F_i et F_j de \mathcal{D} ont en commun une arête A ; on dira alors que l'arête $p_i p_j$ de \mathcal{I} est « duale » de l'arête A de \mathcal{D} . Les 20 faces de \mathcal{I} sont des triangles; plus précisément trois sommets p_i, p_j, p_k de \mathcal{I} en forment une face

\mathcal{F} ssi les faces correspondantes F_i, F_j, F_k de \mathcal{D} ont en commun un sommet q ; on dira alors que la face \mathcal{F} de \mathcal{I} est « duale » du sommet q de \mathcal{D} .

On voit alors que $\text{Is}(\mathcal{D})$ agit transitivement sur les drapeaux de \mathcal{I} (car chaque drapeau de \mathcal{I} est « dual » d'un unique drapeau de \mathcal{D}), et donc \mathcal{I} est bien un polytope régulier au sens de la définition 11.4. De plus, d'après le lemme 11.5 et la proposition 11.6, on sait que $\text{Is}(\mathcal{I})$ est de cardinal $2 \cdot 60 = 120$, et comme il contient $\text{Is}(\mathcal{D})$ on en déduit que $\text{Is}(\mathcal{O}) = \text{Is}(\mathcal{D})$. On laisse au lecteur le soin de décrire explicitement l'isométrie correspondant à chaque élément de $\text{Is}(\mathcal{D})$.

Réciproquement, le dodécaèdre est aussi le « dual » de l'icosaèdre, i.e. étant donné un icosaèdre régulier, les centres de ses 20 faces forment les sommets d'un dodécaèdre régulier.

Enfin, partant d'un cube C , nous avons construit un dodécaèdre \mathcal{D} contenant C et dont les faces « correspondent » aux arêtes de C . De façon duale, partant d'un octaèdre régulier \mathcal{O} (le dual du cube), on peut y inscrire un icosaèdre régulier \mathcal{I} en plaçant de façon appropriée les 12 sommets de \mathcal{I} sur les arêtes de \mathcal{O} , cf. [Be, 12.5.5.3].

11.3. Une autre approche. — Indiquons dans ce paragraphe une autre approche des polytopes réguliers, tirée de [Go, §6.6], qui est plus géométrique et plus économique pour la construction des deux cas difficiles, l'icosaèdre et le dodécaèdre. Commençons par une remarque en dimension 2 :

Remarque 11.19. — Dans un plan euclidien, soient \mathcal{C} un cercle de centre O et de rayon $r > 0$ et p_1, \dots, p_n des points de \mathcal{C} placés de façon cyclique, i.e. les deux voisins de p_i sont p_{i-1} et p_{i+1} (en posant $p_0 = p_n$ et $p_{n+1} = p_1$). Si toutes les arêtes $p_i p_{i+1}$ sont de même longueur, alors le n -gone convexe Π formé par les p_i est régulier.

En effet, les triangles isocèles $(Op_i p_{i+1})$ sont tous semblables et l'on en déduit que les angles $\widehat{p_{i-1} p_i p_{i+1}}$ de Π sont tous égaux.

Dans la suite, (\mathcal{E}, E) désigne un espace affine euclidien de dimension 3.

Lemme 11.20. — Soit $\Sigma = \{p_1, \dots, p_\ell\}$ un ensemble fini de points d'une sphère S de rayon > 0 et soit P son enveloppe convexe.

- (i) Σ est l'ensemble des sommets de P et les points de $S - \Sigma$ sont extérieurs à P .
- (ii) Soient $p, q \in \Sigma$ réalisant le minimum de la distance entre deux points distincts de Σ . Alors $[p, q]$ est une arête de P .

Démonstration. — Prenons comme origine de \mathcal{E} le centre O de S et identifions \mathcal{E} à E . Notons B (resp. \overline{B}) la boule ouverte (resp. fermée) de centre O et rayon r .

(i) Il est clair que $\text{Extr}(P) \subset \Sigma$. Réciproquement, soient $p, q \in \overline{B}$ et $t \in]0, 1[$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

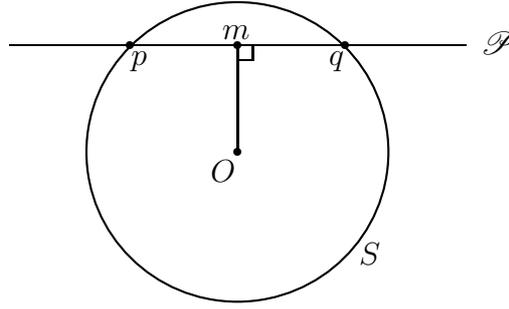
$$\begin{aligned} \|t\overrightarrow{Op} + (1-t)\overrightarrow{Oq}\|^2 &= t^2 Op^2 + (1-t)^2 Oq^2 + 2t(1-t)\overrightarrow{Op} \cdot \overrightarrow{Oq} \\ &\leq r^2 \left(t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) \right) = r^2 \end{aligned}$$

avec égalité ssi $Op = r = Oq$ et $\overrightarrow{Oq} = \lambda \overrightarrow{Op}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, d'où $\lambda = 1$ et $q = p$. On en déduit que $\Sigma \subset \text{Extr}(P)$ et que tout point de P autre que les p_i appartient à B . Par conséquent, tout point de $S - \Sigma$ est extérieur à P .

(ii) Soient m le milieu de $[p, q]$ et \mathcal{P} le plan orthogonal à \overrightarrow{Om} passant par m . On va montrer que la calotte supérieure

$$\mathcal{C}^+ = \overline{B} \cap \overline{\mathcal{P}}^+ = \{x \in \overline{B} \mid \overrightarrow{Ox} \cdot \overrightarrow{Om} \geq Om^2\}$$

n'intersecte P que selon le segment $A = [p, q]$; ceci montrera que A est une arête de P (et que $P - A$ est contenu dans le demi-espace ouvert \mathcal{P}^-).



Montrons d'abord que $\overline{\mathcal{C}}^+$ est contenue dans la boule de centre m et rayon $Op = Oq$. Soient $y \in \overline{\mathcal{C}}^+ - \{m\}$ et x l'intersection de la demi-droite $[my)$ avec S ; on a $my \leq mx$ donc il suffit de montrer que $mx \leq mq$.

Comme $\overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mx}$ et $\overrightarrow{Ox} \cdot \overrightarrow{Om} \geq Om^2$, on a $\overrightarrow{Om} \cdot \overrightarrow{mx} \geq 0$, et comme

$$Om^2 + mq^2 = r^2 = Ox^2 = Om^2 + mx^2 + 2\overrightarrow{Om} \cdot \overrightarrow{mx}$$

on en déduit $mx \leq mq$, avec égalité ssi \overrightarrow{mx} est orthogonal à \overrightarrow{Om} , i.e. ssi x appartient au cercle C intersection de S avec \mathcal{P} .

Supposons maintenant que x soit un point de Σ appartenant à $\overline{\mathcal{C}}^+$. Alors on a

$$px \leq pm + mx \leq pm + mq = pq$$

et la minimalité de pq entraîne que les deux inégalités ci-dessus sont des égalités, d'où $x \in C$ et $m \in [p, x]$, et ceci entraîne que $x = q$. Il en résulte que $\mathcal{P} \cap \Sigma = \{p, q\}$ et que tous les autres points x de Σ vérifient $\overrightarrow{mx} \cdot \overrightarrow{Om} < Om^2$. D'après l'argument utilisé dans la preuve du lemme 10.7, on en déduit que $P \cap \mathcal{P} = [p, q]$. Ceci achève la preuve du lemme. \square

Terminologie. — Soit \mathcal{D} une droite de \mathcal{E} . Un polygone convexe régulier (resp. un cercle) **d'axe** \mathcal{D} est un polygone convexe régulier (resp. un cercle) centré en un point I de \mathcal{D} et contenu dans le plan orthogonal à \mathcal{D} passant par I .

Lemme 11.21. — Soient $S = S(O, r)$ et $\Sigma = S(p, d)$ deux sphères de \mathcal{E} , avec $O \neq p$. Si $S \cap \Sigma$ est non vide, c'est un cercle d'axe (Op) .

Démonstration. — Un point x de \mathcal{E} appartient à $S \cap \Sigma$ ssi il vérifie $Ox^2 = r^2$ et $px^2 = d^2$. Comme $\overrightarrow{px} = \overrightarrow{pO} + \overrightarrow{Ox}$, on a

$$px^2 = Op^2 + Ox^2 - 2\overrightarrow{Op} \cdot \overrightarrow{Ox}$$

et donc, par soustraction, les deux équations $Ox^2 = r^2$ et $px^2 = d^2$ équivalent aux équations : $Ox^2 = r^2$ et $\overrightarrow{Op} \cdot \overrightarrow{Ox} = (r^2 - d^2 + Op^2)/2$, la dernière étant celle d'un plan \mathcal{P} orthogonal à \overrightarrow{Op} . Donc on a $S \cap \Sigma = S \cap \mathcal{P}$.

De plus, notant I le point d'intersection de \mathcal{P} et de la droite (Op) , pour tout $x \in \mathcal{P}$ on a $\overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{Ix}$ avec $\overrightarrow{Ix} \cdot \overrightarrow{OI} = 0$, d'où $Ox^2 = OI^2 + Ix^2$.

Donc $S \cap \Sigma = S \cap \mathcal{P}$ est non vide ssi $OI \leq r$ et dans ce cas c'est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{r^2 - OI^2}$. \square

Définition 11.22. — Soit P un polytope épais de \mathcal{E} et Σ l'ensemble de ses sommets. Notons d le minimum de la distance entre deux sommets distincts. On dit que P est de type IER⁽²⁰⁾ s'il vérifie les conditions ci-dessous :

⁽²⁰⁾Pour « Inscriptible à Étoiles Régulières ».

(i) P est *inscriptible* dans une sphère, i.e. il existe un point $O \in \mathcal{E}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que les sommets de P appartiennent à la sphère S de centre O et rayon r .

(ii) Il existe un entier $k \geq 3$ tel que, pour tout $p \in \Sigma$, il y a exactement k sommets adjacents à p , tous à distance d de p . D'après le lemme précédent, ceci entraîne que ces k sommets sont situés sur un cercle \mathcal{C}_p d'axe (Op) .

(iii) De plus, ces k sommets forment un k -gone convexe régulier d'axe (Op) , appelé **l'étoile** de P en p . (D'après la remarque 11.19, cette dernière condition est réalisée ssi, ces k sommets de \mathcal{C}_p étant numérotés de façon cyclique p_1, \dots, p_k , les arêtes $[p_i, p_{i+1}]$ sont toutes de même longueur.)

Proposition 11.23. — Soit P un polytope de type IER et soient $A = [p_1, p_2]$ une arête de P et f une isométrie de \mathcal{E} telle que $f(A)$ soit une arête de P . Alors $f \in \text{Is}(P)$.

Démonstration. — D'après la proposition 10.15, on peut prolonger la suite p_1, p_2 en une suite (p_i) de sommets telle que tout sommet y figure au moins une fois et que deux sommets consécutifs p_i et p_{i+1} soient *adjacents*.

Procédant par récurrence, on peut supposer que r est un entier ≥ 2 tel que pour tout $i \leq r$, $f([p_{i-1}, p_i])$ est une arête de P . Remarquons que l'étoile E_r de P en p_r est l'unique k -gone convexe régulier d'axe (Op_r) passant par p_{r-1} et posons $q = f(p_r)$.

Comme f est une isométrie, $f(E_r)$ est un k -gone convexe régulier d'axe (Oq) , passant par $q' = f(p_{r-1})$. Par hypothèse, $q'q$ est une arête, donc nécessairement $f(E_r)$ est l'étoile $E(q)$ de P en q . Comme p_{r+1} est un sommet de E_r , il en résulte que $f(p_{r+1})$ est un sommet de $f(E_r) = E(q)$, donc $[q, f(p_{r+1})]$ est une arête.

Comme tous les sommets apparaissent dans la suite, on en déduit que $f(\Sigma) \subset \Sigma$ et comme f est bijective il en résulte $f(\Sigma) = \Sigma$ et donc $f(P) = P$, d'où $f \in \text{Is}(P)$. \square

Corollaire 11.24. — Soient A une arête, Π_A le plan médiateur de A et \mathcal{P}_A le plan passant par O et A . Alors les symétries orthogonales f et g par rapport à ces plans appartiennent à $\text{Is}(P)$.

Démonstration. — En effet, $f(A) = A$ et $g(A) = A$. \square

En utilisant le corollaire précédent, on peut montrer (cf. [Go, Prop. 6.11]) que si P est un polytope de type IER alors $\text{Is}(P)$ agit transitivement sur les drapeaux de P , donc P est régulier. La réciproque étant claire (cf. 11.4.1) on obtient donc qu'un polytope est régulier ssi il est de type IER. Ceci va nous permettre de construire un icosaèdre régulier en limitant le nombre de vérifications à effectuer.

L'icosaèdre régulier 11.25. — Soit \mathcal{S} la sphère de \mathbb{R}^3 de centre $O = (0, 0, 0)$ et de rayon $R > 0$. Notons $N = (0, 0, R)$ et $S = (0, 0, -R)$ les pôles Nord et Sud. Pour un certain $h \in]0, R[$ qu'on va déterminer, l'intersection de \mathcal{S} avec le plan horizontal d'équation $z = h$ (resp. $z = -h$) est le cercle \mathcal{C} (resp. \mathcal{C}') de centre $\omega = (0, 0, h)$ (resp. $\omega' = (0, 0, -h)$) et de rayon $r > 0$, où $r^2 + h^2 = R^2$.

Inscrivons dans \mathcal{C} le pentagone régulier C , de sommets

$$p_k = (r \cos(2k\pi/5), r \sin(2k\pi/5), h) \quad \text{pour } k = 0, \dots, 4,$$

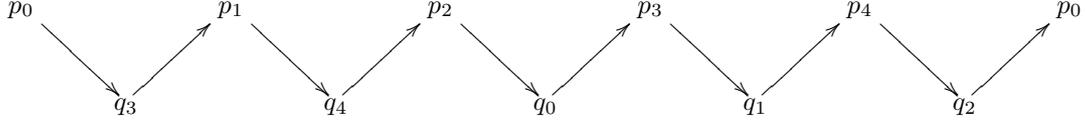
et posons $q_k = -p_k$. Alors q_0, \dots, q_4 forment un pentagone régulier C' inscrit dans le cercle \mathcal{C}' et dont les sommets sont décalés de $\pi/5$ par rapport à ceux de C . De plus, la longueur ℓ des arêtes de C et C' est donnée par $\ell = 2r \sin(\pi/5)$.

Le polytope \mathcal{I} à 12 sommets ainsi obtenu est invariant par les rotations d'axe orienté par \overrightarrow{ON} et d'angle $2k\pi/5$. On voit que ses arêtes sont :

- a) Les 10 segments $[N, p_k]$ et $[S, q_k]$ pour $k = 0, \dots, 4$, tous d'une même longueur d' .

b) Les 10 arêtes de C et de C' , toutes de longueur ℓ .

c) Les 10 segments joignant un p_i (resp. q_i) aux deux q_j (resp. p_j) les plus proches, i.e. les segments :



tous d'une même longueur d .

On va montrer que pour un choix approprié de h on a $d = \ell = d'$.

Posons $z = 2 \cos(2\pi/5)$; on a vu dans la preuve de 11.15 que z est la racine positive de l'équation $X^2 = 1 - X$, égale à $(\sqrt{5} - 1)/2$. On montre de même que la seconde racine est $u = 2 \cos(4\pi/5) = (-\sqrt{5} - 1)/2$. On a donc $z + u = -1$ et $z^2 + u^2 = 2 - (z + u) = 3$.

D'une part, comme $\sin^2(\pi/5) = 1 - \cos^2(\pi/5) = 1 - \cos^2(4\pi/5)$, on a

$$(1) \quad \ell^2 = 4r^2 \sin^2(\pi/5) = 4r^2 - r^2 u^2.$$

D'autre part, comme $\overrightarrow{q_2 O} = \overrightarrow{O p_2}$ on a

$$\overrightarrow{q_2 p_0} = \overrightarrow{q_2 O} + \overrightarrow{O p_0} = \overrightarrow{O p_2} + \overrightarrow{O p_0} = 2\overrightarrow{O \omega} + \overrightarrow{\omega p_0} + \overrightarrow{\omega p_2}$$

et comme $\overrightarrow{\omega p_0}, \overrightarrow{\omega p_2}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{O \omega}$ et $\widehat{p_0 \omega p_2} = 4\pi/5$, on a :

$$d^2 = (q_2 p_0)^2 = 4O\omega^2 + p_0\omega^2 + p_2\omega^2 + 2\overrightarrow{\omega p_0} \cdot \overrightarrow{\omega p_2} = 4h^2 + 2r^2 + 2r^2 \cos(4\pi/5).$$

Comme $h^2 = R^2 - r^2$ et $1 + 2 \cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta)$, on obtient donc :

$$(2) \quad d^2 = 4R^2 - 4r^2 + r^2 z^2.$$

Par conséquent, l'égalité $d^2 = \ell^2$ équivaut à

$$4R^2 = 8r^2 - r^2(z^2 + u^2) = r^2(8 - 3) = 5r^2$$

i.e. à $r = 2R/\sqrt{5}$ et donc $h = R/\sqrt{5}$. Dans ce cas, comme $u^2 = (6 + 2\sqrt{5})/4$, on a

$$\ell^2 = r^2(4 - u^2) = r^2 \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{R^2}{5}(10 - 2\sqrt{5}) = 2R^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

et comme $R - h = R(\sqrt{5} - 1)/\sqrt{5}$ et $(\sqrt{5} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{5}$, on a aussi

$$d^2 = p_0 N^2 = p_0 \omega^2 + \omega N^2 = r^2 + (R - h)^2 = \frac{4R^2}{5} + R^2 \frac{6 - 2\sqrt{5}}{5} = \ell^2.$$

Ceci prouve que pour $h = R/\sqrt{5}$, le polytope \mathcal{I} est inscrit dans la sphère \mathcal{S} et tout sommet p est adjacent à exactement 5 sommets, tous à la distance minimale d . Il reste à voir que ces 5 sommets forment un pentagone régulier d'axe (Op) . C'est clair si $p = N$ ou S donc il suffit de le montrer pour l'un des autres sommets. En utilisant les rotations d'axe (NS) et la symétrie centrale de centre O , il suffit de le montrer pour l'un des p_i ou q_i , disons p_0 . Dans ce cas, les 5 sommets adjacents sont N, p_1, q_3, q_2 et p_4 et comme

$$p_4 N = N p_1 = d' = d = p_1 q_3 = q_2 p_4 = \ell = q_3 q_2$$

ils forment un pentagone régulier (cf. 11.19). Ceci montre que \mathcal{I} est un polytope de type IER, donc régulier. Il a 12 sommets, donc c'est un icosaèdre régulier.

Ayant ainsi construit l'icosaèdre régulier, on peut obtenir « par dualité » le dodécaèdre régulier, cf. les paragraphes précédents pour le passage du cube à l'octaèdre ou du dodécaèdre à l'icosaèdre.

12. Supplément : polyèdres convexes compacts

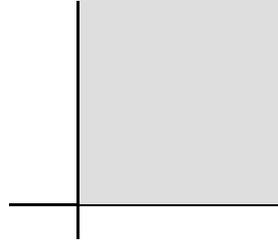
Définition 12.1. — Un polyèdre convexe C est une intersection *finie* de demi-espaces fermés.

Exemples 12.2. — Plaçons-nous dans un plan.

a) Un demi-espace fermé est un polyèdre convexe, ainsi que l'intersection de deux demi-espaces fermés :



$$C_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

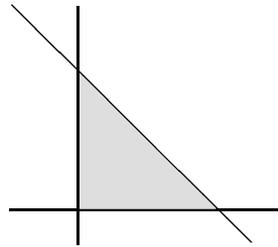


$$C_2 = \{(x, y) \mid x, y \geq 0\}$$

b) Et pour trois demi-espaces fermés, on peut obtenir :



$$C_3 = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 1, x \geq 0\}$$



$$C_4 = \{(x, y) \mid x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

Terminologie 12.3. — Soient $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_N$ des hyperplans. Une écriture $C = \bigcap_{i=1}^N \overline{\mathcal{H}_i}^+$ est dite *non redondante* si l'on ne peut pas supprimer l'un des \mathcal{H}_i sans augmenter strictement C (i.e. si pour tout sous-ensemble I strictement contenu dans $\{1, \dots, N\}$ on a $C \neq \bigcap_{i \in I} \overline{\mathcal{H}_i}^+$). Dans les exemples ci-dessus les écritures sont non redondantes. Par contre, on aurait pu définir C_4 comme l'intersection des cinq demi-espaces : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$, $x \leq 1$, $y \leq 1$, et dans ce cas les deux derniers s'avèrent être superflus, i.e. C_4 est l'intersection des trois premiers.

On peut montrer que tout polyèdre convexe possède une *unique* écriture $C = \bigcap_{i=1}^N \overline{\mathcal{H}_i}^+$ non redondante. (Voir [Be, 12.1.5], [Br, §8] ou [RWM, §II.5, Th. 82] ⁽²¹⁾.)

Proposition 12.4. — *Tout polyèdre convexe compact C est un polytope.*

Esquisse de démonstration. — D'après le théorème de Minkowski 10.3, C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Or on peut montrer, par récurrence sur la dimension de \mathcal{E} , qu'un polyèdre convexe n'a qu'un nombre fini de points extrémaux. (Voir [Br, Cor. 8.7] ou [RWM, §II.5, Prop. 83] ⁽²¹⁾.) \square

Remarque 12.5. — Réciproquement, on peut montrer que tout polytope convexe est un polyèdre (convexe compact), i.e. est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés. Voir par exemple [Br, Th. 9.2] ou [RWM, §II.5, Th. 87] ⁽²¹⁾.

⁽²¹⁾En prenant garde que ces derniers auteurs appellent « \mathcal{V} -polytope » un polytope et « polytope » un polyèdre convexe compact.

Références pour ce chapitre :

Les résultats sur la topologie d'un \mathbb{R} -espace vectoriel (ou affine) de dimension finie sont standard et se trouvent dans nombre de livres ou photocopiés. Signalons par exemple :

[Che] Jean-Yves Chemin, Topologie et calcul différentiel, Cours de L3 à l'UPMC 2012-2013 (LM360), disponible sur le site de la Licence de Mathématiques : www.licence.math.upmc.fr/UE/LM360 et sur la page de l'auteur : www.ljll.math.upmc.fr/~chemin

[Di] Jacques Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

De même, la classification des isométries d'un espace vectoriel ou affine de dimension 3 est standard. Signalons par exemple :

[Co] François Cottet-Emard, Algèbre linéaire et bilinéaire, de boeck, 2005.

[Po] Patrick Polo, Algèbre et géométrie, Cours de L2 à l'UPMC 2009-2013 (chap. 7), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/L2

Pour la convexité, la preuve du th. de Hahn-Banach suit celle de [Br, Th. 4.3] ou [Be, 11.4.1]. Celle donnée dans la section 9 suit celle de [Go, §5.3]. Pour une démonstration valable en dimension infinie, voir par exemple [Sch, XIX.6.2].

Pour la « structure faciale » des polytopes, donnée ici en dimension 3, on pourra consulter [Br, 9.2] ou [RWM, II.5, Th. 82 & 87], qui démontrent aussi l'équivalence entre polytopes et polyèdres convexes compacts (section 12). ([Go, §5.6] propose une approche différente, mais certains passages semblent obscurs à l'auteur de ces lignes.)

La classification des polytopes réguliers de dimension 3 est faite dans de nombreux ouvrages (cf. [Au, Be, Go, RWM, Ta]), mais souvent en laissant les détails de certaines preuves au lecteur.

[Au] Michèle Audin, Géométrie, EDP Sciences, 2006.

[Be] Marcel Berger, Géométrie (tome 2), Nathan, 1990.

[Br] Arne Brøndsted, An introduction to convex polytopes, Springer-Verlag, 1983.

[Go] Rémi Goblot, Thèmes de géométrie, Masson, 1998.

[RWM] Jean-Pierre Ramis, André Warusfel, François Moulin, Cours de mathématiques pures et appliquées, Vol. 1 Algèbre et géométrie, De Boeck, 2010.

[Sch] Laurent Schwartz, Analyse : Topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermann, 1970.

[Ta] Patrice Tauvel, Géométrie, Dunod, 2005.

INDEX

- Action d'un groupe, 1, 3
 - à gauche ou à droite, 3
 - libre, 3, 10, 46, 47
 - transitive, 3, 10, 46, 47
- Action de S_n sur X^n , 2
- Adhérence, 29
- Aff(X), 35
- Affine
 - application, 15
 - espace, 10
 - groupe, 20
 - repère, 14
 - sous-espace, 8, 9, 13
- Affinement indépendants (points), 36
- Affinement liés (points), 36
- Appui (hyperplan), 30
- Banach (théorème de Hahn-), 34, 36
- Barycentre, 21
- Bornée (partie), 29
- Boule (ouverte ou fermée), 28
- Cauchy (théorème de), 5
- Centre
 - d'un groupe, 6
 - de gravité, 22
- Changement de repère
 - affine, 14
- Chasles (relation de), 10
- Classes
 - à droite, 4
 - à gauche, 4
 - doubles, 4
 - (formule des), 5
- Compact(e)
 - partie, 29
 - polyèdre convexe, 63
- Conjugués
 - sous-groupes, 3
- Continue (application), 29, 37
- Convexe, 27
 - enveloppe, 28
- Cube, 54
- Demi-espace (ouvert ou fermé), 30
- Desargues (théorème de), 25
- Dimension
 - d'un convexe, 36
- Direction (d'un espace affine), 10
- Distingué (sous-groupe), 1, 20
- Diédral (groupe), 34
- Drapeau, 44, 46
- Engendré
 - sous-espace affine, 35
- Enveloppe convexe, 28
- Épais (convexe), 36
- Espace
 - affine, 10
- Étoile d'un sommet, 48
- Euler (formule d'Euler)
 - $s - a + f = 2$, 50
- Extrémal (point), 40
- Extr(C), 40
- Face, 42
- Fermée
 - boule, 28
 - partie, 28
- Fixe (point), 17
- Frontière, 29
- GA(\mathcal{E}), 20
- Groupe, 1
 - affine GA(\mathcal{E}), 20
 - alterné A_n , 53, 58
 - des homothéties et translations, 21
 - diédral, 34
 - symétrique S_n , 1
- Homothéties, 17
- Hyperplan
 - d'appui, 30
 - médiateur, 46
- Intérieur, 29
 - relatif d'un convexe, 42
- Isobarycentre, 22
- Isométrie
 - affine, 33
 - de \mathbb{R}^3 , 46
 - vectorielle, 33

- Is(X), Is⁺(X), 33
- Lagrange (théorème de), 4
- Libre (action), 3, 10
- Lipschitzienne (application), 29, 37
- Médianes d'un triangle, 22
- Médiateur (plan ou hyperplan), 46
- n -gone convexe, 30
 - régulier, 32, 34, 46
- Orbite, 3
- Ouverte
 - boule, 28
 - partie, 28
- p -groupe, 6
- Pappus (théorème de), 24
- Partie linéaire d'une appl. affine, 15
- Polyèdre convexe, 63
- Polygone convexe, 30
- Polytope, 41
 - régulier, 47, 48, 51, 52
- Projection
 - sur \mathcal{F} de direction G , 18
 - sur un convexe fermé, 38
- Quotient
 - ensemble, 3
 - groupe, 4
- Régulier
 - dodécaèdre, 56
 - hexaèdre (cube), 54
 - icosaèdre, 58
 - octaèdre, 55
 - polygone, 32, 34, 46
 - polytope, 47, 48
 - tétraèdre, 53
- Représentations d'un groupe, 3
- Repère
 - affine, 14
- Restriction d'une action
 - à un sous-ensemble stable, 2
 - à un sous-groupe, 2
- Rotation, 46
 - gauche, 47
- Segment, 27
- Semi-direct (produit), 6, 20, 21
- Similitude (directe), 50, 52
- Simplexe, 36
- Sommet
 - d'un convexe, 40
- Sous-espace
 - affine, 13
 - affine engendré, 35
- Stabilisateur, 3, 48
- Stable
 - sous-ensemble, 2
- Symétrie
 - centrale, 47
 - orthogonale, 47
 - par rapport à \mathcal{F} de direction G , 18
- Symétrique (groupe), 1
- Thalès
 - (réciproque du théorème), 19
 - (théorème de), 19
- Théorème
 - de Cauchy, 5
 - de Desargues affine, 25
 - de Hahn-Banach, 34, 36
 - de Lagrange, 4
 - de Minkowski-Krein-Milman, 40
 - de Pappus, 24
 - de Thalès, 19
 - de Thalès (réciproque), 19
- Transitive (action), 3, 10
- Translations, 15

TABLE DES MATIÈRES

1. Actions de groupes, espaces et applications affines	1
1. Actions de groupes.....	1
2. Sous-espaces affines.....	7
3. Espaces affines et repères.....	10
4. Applications affines : définition, exemples, th. de Thalès.....	15
5. Groupe affine et produits semi-directs.....	20
6. Barycentres.....	21
7. Supplément : théorèmes de Pappus et de Desargues.....	24
2. Convexité en dimension finie. Polytopes réguliers de dimension 3	27
8. Convexes : définitions, polygones réguliers, théorème de Hahn-Banach.....	27
9. Projection sur un convexe fermé.....	37
10. Points extrémaux, structure faciale des polytopes de dimension 3.....	40
11. Polytopes réguliers de dimension 3.....	46
12. Supplément : polyèdres convexes compacts.....	63
3. Complété projectif d'un espace affine, espaces projectifs	65
13. Plongement vectoriel d'un espace affine.....	65
14. Coordonnées barycentriques, théorèmes de Ménelaüs et de Ceva.....	68
15. Complété projectif d'une droite ou d'un plan affine.....	70
16. Espaces projectifs, coordonnées homogènes, ouverts affines.....	73
17. Théorèmes de Pappus et de Desargues.....	80
Index	87