CHAPITRE 3

COMPLÉTÉ PROJECTIF D'UN ESPACE AFFINE, ESPACES PROJECTIFS

Dans tout ce chapitre, k désigne un corps.

13. Plongement vectoriel d'un espace affine

Il est utile de connaître le résultat suivant :

Lemme 13.1. — *Soient X un ensemble non vide et E un k-ev.*

(i) *L'ensemble $\mathscr{A}(X,E)$ de toutes les applications $f : X \to E$ est muni d'une structure de k-espace vectoriel, définie comme suit : pour $f,g \in \mathscr{A}(X,E)$ et $\lambda \in k$, l'application $(\lambda f + g) : X \to E$ envoie tout $x \in X$ sur $\lambda f(x) + g(x)$.*

(ii) *E s'identifie au sev formé des applications* constantes *de X dans E, i.e. on identifie un élément $u \in E$ avec la fonction constante $f_u : X \to E$ de valeur u.*

Démonstration. — (i) Il faut vérifier des égalités de fonctions : $1\cdot f = f$, $\lambda\cdot(\mu\cdot f) = (\lambda\mu)\cdot f$, $(\lambda+\mu)\cdot f = \lambda\cdot f + \mu\cdot f$, etc. Elles découlent de ce que, pour tout $x \in X$, on a les égalités correspondantes dans E :

$$1\cdot f(x) = f(x), \quad \lambda\cdot(\mu\cdot f(x)) = (\lambda\mu)\cdot f(x), \quad (\lambda+\mu)\cdot f(x) = \lambda\cdot f(x) + \mu\cdot f(x),$$

etc., qui découlent de la structure de k-ev de E.

(ii) L'application qui à $u \in E$ associe f_u est linéaire et injective, donc c'est un isomorphisme de E sur le sev des applications constantes. $\square$

***Théorème 13.2* (Plongement vectoriel)**. — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine. Il existe un espace vectoriel $\widehat{\mathscr{E}}$ et une forme linéaire ϕ sur $\widehat{\mathscr{E}}$, définis de façon canonique, tels que $\mathscr{E}$ s'identifie à l'hyperplan affine $\{x \in \widehat{\mathscr{E}} \mid \phi(x) = 1\}$ et E à l'hyperplan vectoriel* $\operatorname{Ker}(\phi)$. (*En particulier, si E est de dimension finie n, alors* $\dim(\widehat{\mathscr{E}}) = n+1$.)

1ère démonstration. — Pour tout $A \in \mathscr{E}$ notons f_A l'application $\mathscr{E} \to E$, $M \mapsto \overrightarrow{MA}$. Soit $\widehat{\mathscr{E}}$ le sev de $\mathscr{A}(\mathscr{E}, E)$ engendré par ces applications et les applications constantes.

Remarquons d'abord que, pour tout $A, B \in \mathscr{E}$ on a :

$$(\dagger) \qquad f_B - f_A = \overrightarrow{AB}.$$

En effet, pour tout $M \in \mathscr{E}$ on a : $f_B(M) - f_A(M) = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$.

Montrons que E est un *hyperplan* de $\widehat{\mathscr{E}}$, i.e. admet un supplémentaire de dimension 1. Quelques soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{E}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$, on a :

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{A_i} - (\sum_{i=1}^n \lambda_i) f_{A_0} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_{A_i} - f_{A_0}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} \in E.$$

donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{A_i}$ appartient à $kf_{A_0} + E$, d'où $\widehat{\mathscr{E}} = kf_{A_0} + E$. De plus, cette somme est directe, car $f_{A_0} \notin E$ puisque l'application $f_{A_0} : M \mapsto \overrightarrow{MA_0}$ n'est pas constante, d'où :

$$(**) \qquad \widehat{\mathscr{E}} = E \oplus kA_0.$$

On peut alors définir une forme linéaire ϕ sur $\widehat{\mathscr{E}}$, de noyau E, en posant $\phi(x) = 0$ si $x \in E$ et $\phi(f_{A_0}) = 1$. Comme pour tout $A \in \mathscr{E}$ on a $f_A = f_{A_0} + \overrightarrow{A_0A}$, on voit que ϕ ne dépend pas du choix de A_0 et que l'ensemble $\{f_A \mid A \in \mathscr{E}\}$ est l'hyperplan affine

$$\mathscr{H} = \{w \in \widehat{\mathscr{E}} \mid \phi(w) = 1\},$$

de direction E. De plus, il résulte de $(*)$ que $\phi(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{A_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

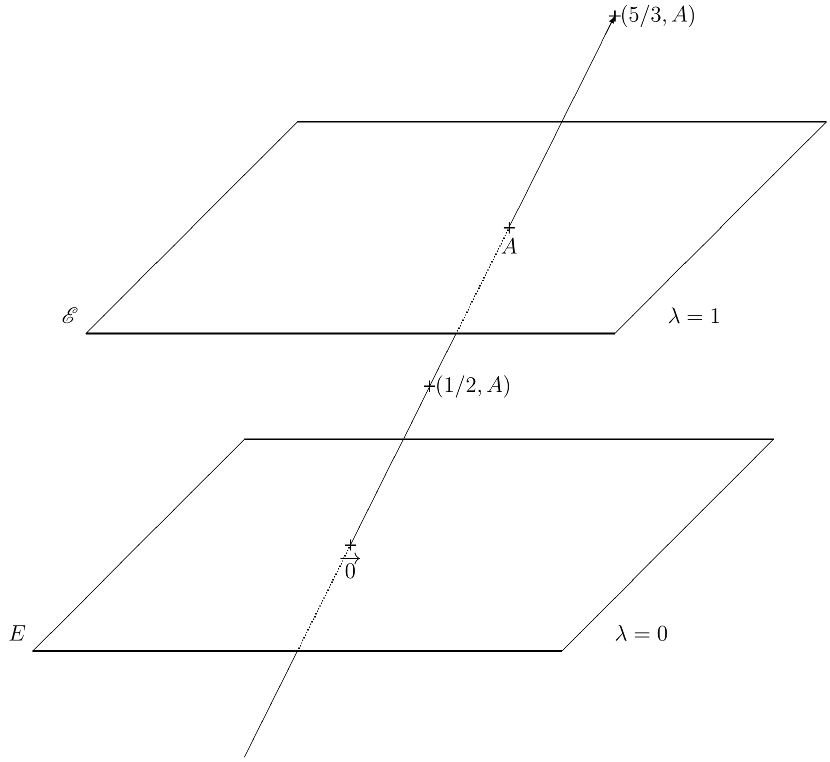
Enfin l'application $\mathscr{E} \to \mathscr{H}$, $A \mapsto f_A$ est une bijection *affine*, de partie linéaire id_E, car d'après (†) pour tout $A, B \in \mathscr{E}$ on a :

$$(\ddagger) \qquad \overrightarrow{f_A f_B} = f_B - f_A = \overrightarrow{AB}.$$

Via cette bijection affine, on peut donc identifier $\mathscr{E}$ à l'hyperplan $\mathscr{H}$ de $\widehat{\mathscr{E}}$. Ceci prouve le théorème.[(1)] □

Faisons enfin la remarque générale suivante. Si E est un hyperplan d'un espace vectoriel W, défini par une forme linéaire ϕ (i.e. $E = \mathrm{Ker}(\phi)$), alors W est la réunion disjointe de E et de son complémentaire $W_\phi = \{w \in W \mid \phi(w) \neq 0\}$, et tout $w \in W_\phi$ s'écrit *de façon unique* $w = \lambda x$, avec $\phi(x) = 1$ et $\lambda \in k$. En effet, ces conditions entraînent que $\phi(w) = \lambda$ et donc $x = \phi(w)^{-1}w$. Ceci montre que si l'on pose $\mathscr{H} = \{x \in W \mid \phi(x) = 1\}$ alors, en tant qu'ensemble, W est la réunion de E et de l'ensemble des couples (λ, x), où $\lambda \in k^*$ et $x \in \mathscr{H}$.

Ceci permet de voir « géométriquement » $\widehat{\mathscr{E}}$ comme la réunion de E et des droites épointées $k^\times f_A = \{\lambda f_A \mid \lambda \in k^\times\} = \{(\lambda, A) \mid \lambda \in k^\times\}$ pour A parcourant $\mathscr{E}$:



[(1)] Par ailleurs, on peut montrer (exercice !) qu'en tant que sev de $\mathscr{A}(\mathscr{E}, E)$, $\widehat{\mathscr{E}}$ est formé des applications affines $f : \mathscr{E} \to E$ dont la partie linéaire est un multiple de id_E ; de plus on a $\overrightarrow{f} = \phi(f)\,\mathrm{id}_E$.

2ème démonstration. — On peut définir $\widehat{\mathscr{E}}$, en tant qu'ensemble, comme la réunion de E et des couples (λ, A), pour $\lambda \in k^{\times}$ et $A \in \mathscr{E}$, et l'on identifie un point $A \in \mathscr{E}$ avec le couple $(1, A)$. La multiplication par un scalaire $\mu \neq 0$ est définie de façon évidente : $\mu \cdot (\lambda, A) = (\mu\lambda, A)$ et si $u \in E$ alors $\mu \cdot u$ est l'élément μu de E. De même, si $u, v \in E$ leur somme est l'élément $u + v$ de E. On pose $(\lambda, A) + u = (\lambda, A + \lambda^{-1}u)$ et :

$$(\lambda, A) + (\mu, B) = \begin{cases} \left(\lambda + \mu, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} A + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} B\right) & \text{si } \lambda + \mu \neq 0, \\ \mu \overrightarrow{AB} & \text{si } \lambda = -\mu. \end{cases}$$

On peut alors vérifier directement que les axiomes d'espace vectoriel sont vérifiés, puis que l'application ϕ définie par $\phi(u) = 0$ et $\phi\big((\lambda, A)\big) = \lambda$ est une forme linéaire de noyau E ; alors $\mathscr{E}$ s'identifie à l'hyperplan affine formé des $x \in \widehat{\mathscr{E}}$ tels que $\phi(x) = 1$. Les détails de la vérification sont laissés en exercice. ☐

Notation 13.3. — Tout point de $\mathscr{E}$ peut être considéré comme un « vecteur » de $\widehat{\mathscr{E}}$. Pour distinguer les deux notions, il est utile d'introduire la notation suivante. En tant qu'espace vectoriel, $\widehat{\mathscr{E}}$ est de façon naturelle un espace affine (avec $\overrightarrow{xy} = y - x$) ; notons O le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ de $\widehat{\mathscr{E}}$ et pour tout « point » $M \in \widehat{\mathscr{E}}$, notons $\overrightarrow{OM}$ le vecteur correspondant.

Proposition 13.4. — *Soient $A_0, A_1, \ldots, A_p$ des points de $\mathscr{E}$. On a l'égalité :*

$$(\star) \qquad \dim \operatorname{Vect}(\overrightarrow{OA_0}, \ldots, \overrightarrow{OA_p}) = 1 + \dim \operatorname{Aff}\langle A_0, \ldots, A_p \rangle.$$

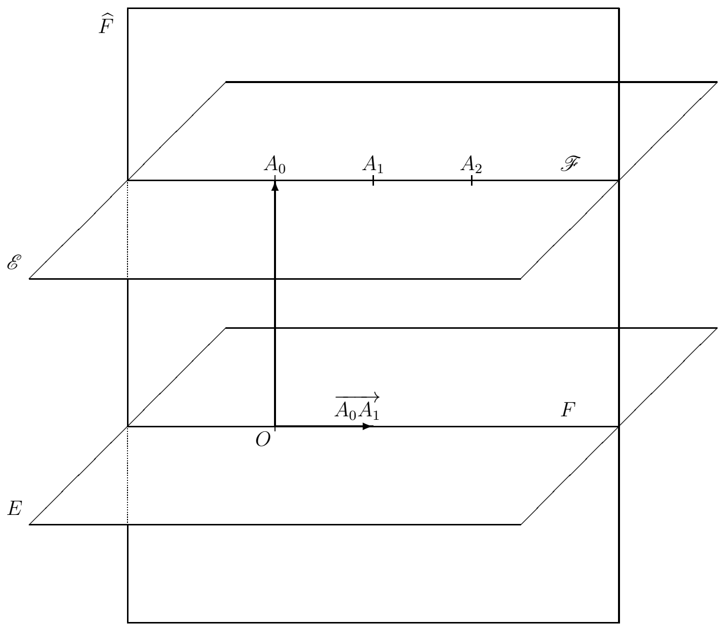
Démonstration. — Posons $\mathscr{F} = \operatorname{Aff}\langle A_0, \ldots, A_p \rangle$. Sa direction est le sous-espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p})$ de E et l'on a $\dim(\mathscr{F}) = \dim(F)$. (Ceci est $\leq p$ avec égalité ssi $A_0, \ldots, A_p$ sont affinement indépendants.)

Posons $\widehat{F} = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{OA_0}, \ldots, \overrightarrow{OA_p})$. Comme $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_0A_i}$ pour tout $i \geq 1$, on a

$$\widehat{F} = k\overrightarrow{OA_0} + F$$

et comme $F \subset E$ et $\overrightarrow{OA_0} \notin E$ (car $\phi(\overrightarrow{OA_0}) = 1$), on a $\overrightarrow{OA_0} \notin F$, donc la somme ci-dessus est directe. On a donc $\dim(\widehat{F}) = 1 + \dim(F)$. ☐

Exemple 13.5. — Illustrons ceci lorsque $(\mathscr{E}, E)$ est un plan affine sur $\mathbb{R}$ et que les points A_0, A_1, A_2 sont distincts et alignés. Alors F est la droite vectorielle $\mathbb{R}\overrightarrow{A_0A_1} \subset E$ et, dans le dessin ci-dessous, $\widehat{F}$ est le plan « vertical » engendré par $\overrightarrow{A_0A_1}$ et $\overrightarrow{OA_0}$:



14. Coordonnées barycentriques, théorèmes de Ménélaüs et de Ceva

De l'avis de l'auteur de ces lignes, l'intérêt principal du prolongement vectoriel est la construction du complété projectif de $\mathscr{E}$ (voir la section suivante). Toutefois, on l'utilise dans cette section pour démontrer les théorèmes de Ménélaüs et de Ceva.

Définition 14.1. — Soient $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension n et $\mathscr{R} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$ (cf. 3.7). Pour tout $M \in \mathscr{E}$ il existe un *unique* $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in k^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ et $M = \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$. On dit que $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ sont les **coordonnées barycentriques** de M dans le repère $\mathscr{R}$.

Démonstration. — *L'existence* résulte de la Prop. 8.16 : comme $\mathrm{Aff}\langle A_0, \dots, A_n\rangle = \mathscr{E}$, tout point M de $\mathscr{E}$ s'écrit comme barycentre des A_i. Prouvons *l'unicité* : si $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ et $M = \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$, on a $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$ donc, comme $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de E, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont uniquement déterminés. Alors λ_0 l'est aussi puisque $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$. $\square$

Proposition 14.2. — *Supposons* $\dim(\mathscr{E}) = n$ *et soit* $\mathscr{R} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ *un repère affine de* $\mathscr{E}$. *Alors :*

a) *Les vecteurs* $\overrightarrow{OA_0}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$ *forment une* **base** $\widehat{\mathscr{R}}$ *de* $\widehat{\mathscr{E}}$. *Notons* $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ *les coordonnées dans cette base.*

b) *Un « point » M de $\widehat{\mathscr{E}}$ appartient à $\mathscr{E}$ ssi les coordonnées $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ de $\overrightarrow{OM}$ vérifient* $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$.

c) *De plus, les coordonnées barycentriques d'un point $M \in \mathscr{E}$ dans le repère $\mathscr{R}$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\widehat{\mathscr{R}}$. On peut donc dire que :* les coordonnées barycentriques dans $\mathscr{E}$ se prolongent en des coordonnées « vectorielles » dans $\widehat{\mathscr{E}}$.

Démonstration. — Le point (a) découle de la Prop. 13.4. D'autre part, si M est un élément de $\widehat{\mathscr{E}}$, l'écriture $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ signifie, avec les notations du théorème 13.2, que $M = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_{A_i}$; comme ϕ est linéaire et vaut 1 sur chaque f_{A_i}, on a donc $\phi(M) = \sum_{i=0}^n \lambda_i$. Le point (b) en découle.

Prouvons (c). Soit $M \in \mathscr{E}$ et soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ ses coordonnées barycentriques dans $\mathscr{R}$. Alors pour tout $P \in \mathscr{E}$, on a $\overrightarrow{PM} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{PA_i}$ et, comme $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, on a donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \Big(\sum_{i=0}^n \lambda_i\Big)\overrightarrow{OP} + \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{PA_i} = \sum_{i=0}^n \lambda_i (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA_i}) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

$\square$

Théorème 14.3. — *Soient $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension n et $\mathscr{R} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ un repère de $\mathscr{E}$. Donnons-nous $n+1$ points $B_0, \dots, B_n$ de $\mathscr{E}$ et pour $j = 0, \dots, n$ notons $(\lambda_{0j}, \dots, \lambda_{nj})$ les coordonnées barycentriques de B_j dans le repère $\mathscr{R}$. Alors les points $B_0, \dots, B_n$ sont affinement liés ssi le déterminant de la matrice $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j=0,\dots,n}$ est nul.*

Démonstration. — Plaçons-nous dans le plongement vectoriel $V = \widehat{\mathscr{E}}$ de $\mathscr{E}$ et notons $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{B_0B_1}, \dots, \overrightarrow{B_0B_n})$ et $\widehat{F} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{OB_0}, \dots, \overrightarrow{OB_n})$. On a les équivalences :

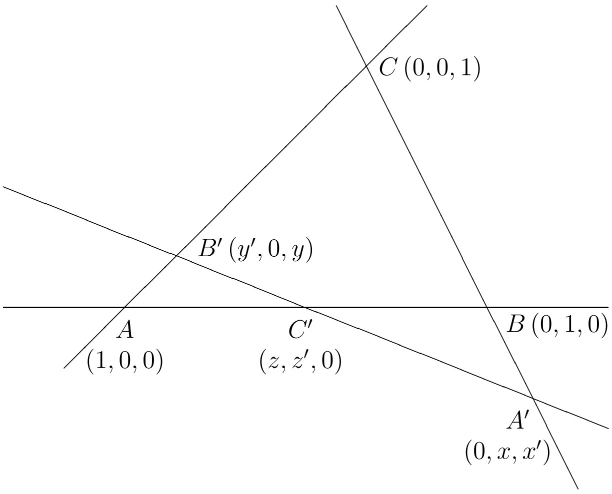
$$\text{les } B_i \text{ sont liés} \iff \dim(F) < n \iff \dim(\widehat{F}) < n+1 \iff \mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OB_0}, \dots, \overrightarrow{OB_n}) = 0,$$

où $\mathscr{B}$ désigne la base $\widehat{\mathscr{R}}$ de V. Or la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OB_0}, \dots, \overrightarrow{OB_n})$ (qui exprime les $\overrightarrow{OB_j}$ dans la base $\mathscr{B}$) n'est autre que Λ, d'où le résultat. [(2)] $\square$

Dans la suite de cette section, on se place dans un *plan affine* $(\mathscr{P}, P)$.

[(2)] Pour une autre démonstration, n'utilisant pas le plongement vectoriel, voir [Be, Prop. I.2.3].

***Théorème 14.4* (de Ménélaüs).** — [3] *Dans le plan $\mathscr{P}$, soient A, B, C trois points non alignés, qui forment donc un repère, d'où des coordonnées barycentriques. Soit A' un point de la droite (BC), ses coordonnées barycentriques sont donc de la forme $(0, x, x')$. De même, soient $B' \in (CA)$, de coordonnées $(y', 0, y)$* [4] *et $C' \in (AB)$ de coordonnées $(z, z', 0)$. Alors les points A', B' et C' sont alignés ssi $xyz + x'y'z' = 0$.*



Démonstration. — D'après le théorème 14.3, A', B' et C' sont alignés ssi le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & y' & z \\ x & 0 & z' \\ x' & y & 0 \end{vmatrix}$ est nul. Or on voit facilement que ce déterminant vaut $xyz + x'y'z'$. □

***Théorème 14.5* (de Céva).** — [5] *Mêmes hypothèses et notations que dans le théorème de Ménélaüs. Alors les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles ssi $xyz = x'y'z'$.*

Démonstration. — On note $\mathscr{R}$ le repère (A, B, C) et l'on se place dans l'espace vectoriel $V = \widehat{\mathscr{P}}$, muni des coordonnées (λ, μ, ν) dans la base $\widehat{\mathscr{R}}$. La démonstration se fait en quatre étapes. Notons P la direction de $\mathscr{P}$.

(i) Remarquons d'abord que toute droite affine $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$ est l'intersection du plan vectoriel Π qu'elle engendre dans V, et de $\mathscr{P}$. Or Π est défini dans V par l'annulation d'une forme linéaire $f(\lambda, \mu, \nu) = a\lambda + b\mu + c\nu$, laquelle est unique à multiplication par un scalaire non nul près. Donc $\mathscr{D}$ est définie dans $\mathscr{P}$ par « l'équation en les coordonnées barycentriques » $a\lambda + b\mu + c\nu = 0$. De plus, $\Pi \cap P$ est la droite vectorielle D qui est la direction de $\mathscr{D}$ (voir la figure dans l'exemple 13.5).

(ii) Soient maintenant dans $\mathscr{P}$ trois droites affines distinctes $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$, soient Π_1, Π_2, Π_3 les plans vectoriels associés, et soient $f_i(\lambda, \mu, \nu) = a_i\lambda + b_i\mu + c_i\nu$ une forme linéaire définissant Π_i. Comme $\mathscr{D}_1 \neq \mathscr{D}_2$ alors $\Pi_1 \neq \Pi_2$ donc $\Pi_1 \cap \Pi_2$ est une droite vectorielle Δ, et donc le sous-espace $W = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ est égal soit à Δ (si $\Delta \subset \Pi_3$), soit à $\{0\}$ (si $\Delta \not\subset \Pi_3$). De plus, comme $\Pi_i = \mathrm{Ker}(f_i)$ est l'orthogonal dans V de la droite $kf_i \subset V^*$, alors W est l'orthogonal dans V du sous-espace $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ de V^* et donc on a :

$$(*) \qquad \boxed{W = \Delta \iff W \neq \{0\} \iff f_1, f_2, f_3 \text{ sont liées.}}$$

[3] Mathématicien grec qui vécut autour de l'an 100.

[4] Pour que le résultat final soit « joli », i.e. $xyz + x'y'z' = 0$, on utilise l'ordre « cyclique » $ABCA$.

[5] Giovanni Ceva, mathématicien italien (1647-734). Son nom est souvent francisé en : « Jean (de) Céva », probablement pour le distinguer de son frère Tommaso (jésuite et mathématicien, qui eut pour élève le géomètre (et jésuite aussi) Giovanni Saccheri). Source : www-history.mcs.st-and.ac.uk

(iii) $W = \Delta$ équivaut à ce que les droites $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$ soient concourantes ou parallèles. Plus précisément :

– Si Δ n'est pas contenue dans P elle coupe $\mathscr{P}$ en un point I qui appartient à $\mathscr{P} \cap \Pi_1 \cap \Pi_2$ donc I est le point de concours de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Dans ce cas, on voit que $W = \Delta$ ssi $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$ sont concourantes en I.

– Si $\Delta \subset P$ alors Δ est contenue dans $P \cap \Pi_i$ pour $i = 1, 2$, donc $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles, de direction D. Dans ce cas, on voit que $W = \Delta$ ssi $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$ sont parallèles.

On a ainsi démontré, au passage, la proposition suivante :

Proposition 14.6. — *Soient dans $\mathscr{P}$ trois droites affines distinctes $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$, définies respectivement par les équations en les coordonnées barycentriques : $a_i\lambda + b_i\mu + c_i\nu = 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Alors $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$ sont concourantes ou parallèles ssi* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

En effet, la nullité de ce déterminant équivaut au fait que les formes linéaires $f_i(\lambda, \mu, \nu) = a_i\lambda + b_i\mu + c_i\nu$ soient liées.

(iv) Achevons maintenant la démonstration du théorème de Ceva. Comme la droite $\mathscr{D}_1 = (AA')$ passe par les points de coordonnées $(1, 0, 0)$ et $(0, x, x')$, on voit que l'équation f_1 du plan Π_1 est $x'\mu - x\nu = 0$. De même, comme la droite $\mathscr{D}_2 = (BB')$ passe par les points de coordonnées $(0, 1, 0)$ et $(y', 0, y)$, on voit que l'équation f_2 de Π_2 est $-y\lambda + y'\nu = 0$. Et comme $\mathscr{D}_3 = (CC')$ passe par les points de coordonnées $(0, 0, 1)$ et $(z, z', 0)$, on voit que l'équation f_3 de Π_3 est $z'\lambda - z\mu = 0$. On obtient donc que $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles ssi le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & -y & z' \\ x' & 0 & -z \\ -x & y' & 0 \end{vmatrix}$ est nul. Or on voit facilement qu'il vaut $x'y'z' - xyz$. □

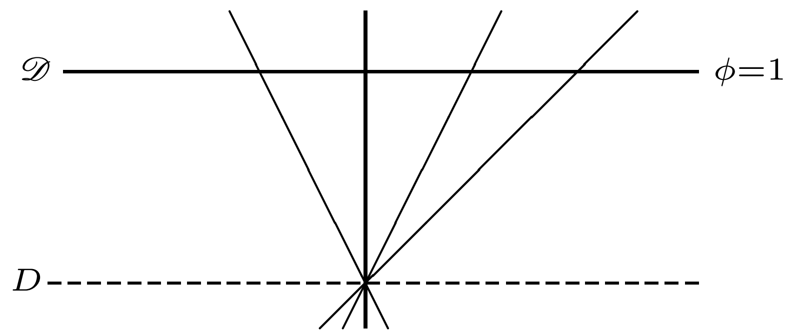
Exercice 14.7. — Soients A, B, C trois points non alignés d'un plan affine réel, $s, t \in]0, 1[$, $C' = A + s\overrightarrow{AB}$ et $A' = B + t\overrightarrow{BC}$. Soit I le point de concours de (AA') et (CC') et B' le point de concours de (BI) et (CA).

(i) Quelle est la condition sur s, t pour que B' soit le milieu de $[C, A]$?
(ii) On suppose $s = 1/3$ et $t = 1/4$. Déterminer le réel λ tel que $B' = (1 - \lambda)C + \lambda A$.
(iii) Même question lorsque $s = 1/3$ et $t = 3/4$.

15. Complété projectif d'une droite ou d'un plan affine

15.1. Complété projectif d'une droite affine. — Soit $\mathscr{D}$ une droite affine, de direction D. Alors $V = \widehat{\mathscr{D}}$ est un k-espace vectoriel de dimension 2 qui contient comme hyperplan affine $\mathscr{D} = \{v \in V \mid \phi(v) = 1\}$. Notons $\mathbb{P}(V) = \widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ l'ensemble des droites vectorielles de V. On peut le voir de plusieurs façons.

(a) Sur le dessin ci-dessous, on voit que, à l'exception de D, toute droite vectorielle de V coupe $\mathscr{D}$ en un unique point. On peut donc identifier $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ à l'ensemble des points de $\mathscr{D}$, auxquels on rajoute un point, noté ∞, qui correspond à la droite D et qu'on appelle le « point à l'infini ». Donc, comme ensemble, $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathscr{D} \cup \{\infty\}$.

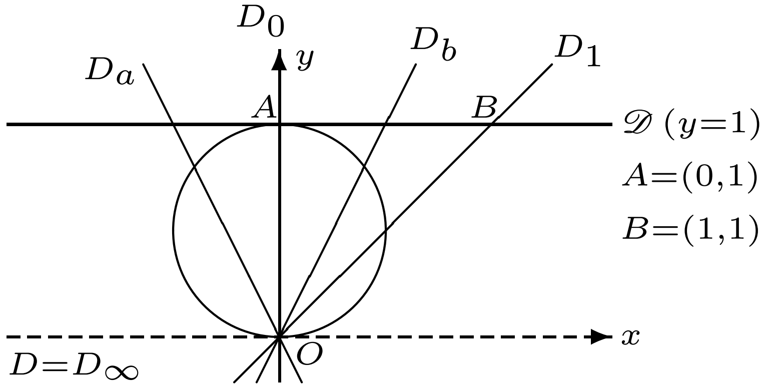


(b) Choisissons des coordonnées (x, y) sur V telles que $\mathscr{D}$ (resp. D) soit donnée par l'équation $y = 1$ (resp. $y = 0$).[6] Alors les droites vectorielles de V sont :

(i) Pour $\lambda \in k$, la droite D_λ d'équation $x = \lambda y$ (engendrée par $e_2 + \lambda e_1$), qui coupe $\mathscr{D}$ en le point $(\lambda, 1)$.

(ii) La droite $D = ke_1$, d'équation $y = 0$.

Dans la figure suivante, pour $k = \mathbb{R}$ on a représenté les droites D_0 et D_1, ainsi que D_a et D_b, où $a = -1/2 = -b$. De plus, lorsque $k = \mathbb{R}$, on voit que lorsque λ tend vers $\pm\infty$, la droite D_λ « tend » vers la droite $D_\infty = D$. Bien qu'on n'ait pas encore défini de topologie sur $\mathbb{P}(V)$, on peut comprendre l'assertion précédente en remarquant que chaque droite D_λ recoupe le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[OA]$ en un unique point $P_\lambda \neq O$, tandis que $D = D_\infty$ est tangente à $\mathscr{C}$ en O, et que, pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$, le point P_λ tend vers O quand λ tend vers $\pm\infty$. Donc, on peut identifier $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ au cercle $\mathscr{C}$ (on reviendra sur ceci plus tard).



Revenant à un corps quelconque k, soit V un k-espace vectoriel de dimension 2.

Définition 15.1. — (a) On note $\mathbb{P}(V)$ l'ensemble des droites vectorielles de V, et l'on dit que $\mathbb{P}(V)$ est une *droite projective.*

(b) Lorsque $V = \widehat{\mathscr{D}}$ pour une droite affine $\mathscr{D}$, on note $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathbb{P}(\widehat{\mathscr{D}})$ et l'on dit que c'est le **complété** (ou plongement) **projectif** de $\mathscr{D}$.

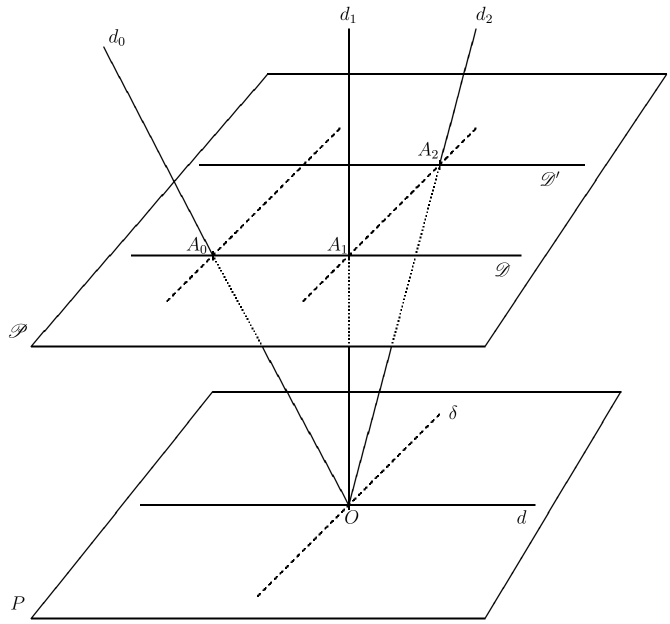
L'intérêt de cette notion de « droite projective » va apparaître dans le paragraphe suivant.

15.2. Complété projectif d'un plan affine. — Soit $\mathscr{P}$ un plan affine, de direction P. Alors $V = \widehat{\mathscr{P}}$ est un k-espace vectoriel de dimension 3 qui contient comme hyperplan affine $\mathscr{P} = \{v \in V \mid \phi(v) = 1\}$. Notons $\mathbb{P}(V) = \widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ l'ensemble des droites vectorielles de

[6] Pour cela, on choisit une forme linéaire ψ non colinéaire à notre ϕ, alors (ψ, ϕ) est une base de V^*, duale d'une unique base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de V et donc les formes linéaires « coordonnées dans cette base » sont (ψ, ϕ).

V. On dit que c'est un *plan projectif*, et que c'est le **complété** (ou plongement) **projectif** de $\mathscr{P}$.

Comme ensemble, $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ est la réunion des points de $\mathscr{P}$, qui correspondent aux droites vectorielles de $\widehat{\mathscr{P}}$ non contenues dans P, et des points de $\mathbb{P}(P)$, qui correspondent aux droites vectorielles de P.[7]



Les points de $\mathbb{P}(P)$ forment ce qu'on appelle la « droite (projective) à l'infini », qu'on notera $\mathscr{D}_\infty$. Dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$, chaque droite affine $\mathscr{D}$ est « complétée » en lui adjoignant son « point à l'infini », qui est le point de $\mathbb{P}(P)$ correspondant à la direction de $\mathscr{D}$; on obtient ainsi la droite projective $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$.[8] De plus, deux droites parallèles ont le même point à l'infini : par exemple, dans la figure, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont d pour point à l'infini, tandis que la droite (A_1A_2) et sa parallèle passant par A_0 ont toutes deux δ comme point à l'infini. On voit ainsi que :

(i) Dans $\mathscr{P}$, soient $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ deux droites affines distinctes, alors dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ les droites projectives $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}_1)$ et $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}_2)$ se coupent en un unique point x, et x appartient à $\mathscr{P}$ (resp. à la droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$) si et seulement si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont concourantes (resp. parallèles). (Ceci suffit déjà à justifier l'étude des espaces projectifs et de la « géométrie projective ».)

(ii) De plus, pour toute droite affine $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$, la droite projective $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ coupe $\mathscr{D}_\infty$ en un unique point, qui est le point à l'infini de $\mathscr{D}$. Donc, en appelant « **droites** » de $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ les droites $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ ainsi que la droite $\mathscr{D}_\infty$, on obtient que :

« dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ deux droites distinctes se coupent en un unique point »,

ce qui est une situation « plus agréable » que dans le plan affine. De plus, on verra plus bas que, en fait, $\mathscr{D}_\infty$ ne joue pas un rôle particulier et peut être remplacée par n'importe quelle droite de $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$.

Remarque 15.2. — Lorsque $k = \mathbb{R}$ le plan projectif réel $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ est muni d'une structure de variété C^∞ compacte mais attention, il ne s'identifie *pas* à la sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

(7) C'est pour cette raison que, dans la figure suivante, on a noté par des lettres minuscules les droites vectorielles d_0, d_1, d_2, d, δ : elles correspondent à des « points » de $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$.

(8) En effet, le sev de $\widehat{\mathscr{P}}$ engendré par $\mathscr{D}$ s'identifie à $\widehat{\mathscr{D}}$ et l'on retrouve la construction du §1.

On peut essayer de se le représenter comme la demi-sphère supérieure : $S^2_+ = \{(x,y,z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$ en identifiant deux à deux les points diamétralement opposés $(x,y,0)$ et $(-x,-y,0)$. En effet, chaque droite vectorielle non contenue dans le plan horizontal $z=0$ coupe la demi-sphère en un unique point, pour lequel $z>0$. D'autre part, chaque droite vectorielle horizontale coupe le cercle horizontal $S^1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$ en deux points diamétralement opposés, qu'il faut donc identifier. On peut montrer que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est une surface compacte *non orientable* (i.e. elle a une seule face au lieu de deux, comme un ruban de Möbius) et donc n'est pas homéomorphe à une surface contenue dans $\mathbb{R}^3$. Mais ceci n'empêche pas de faire de la géométrie projective !

16. Espaces projectifs, coordonnées homogènes, ouverts affines

16.1. Espaces projectifs et coordonnées homogènes. — On fixe un k-espace vectoriel V de dimension $n+1$.

Définition 16.1. — L'espace projectif de V, noté $\mathbb{P}(V)$, est l'ensemble des droites vectorielles de V. On dit que c'est un espace projectif *de dimension* $n = \dim(V) - 1$. [9] Si $V = k^{n+1}$, on le note aussi $\mathbb{P}^n(k)$.

En particulier, si $\dim(V) = 1$ alors $\mathbb{P}(V)$ est un point. Si $\dim(V) = 2$ (resp. 3), on dit que $\mathbb{P}(V)$ est une droite projective (resp. un plan projectif).

Terminologie. Si V est le plongement vectoriel $\widehat{\mathscr{E}}$ d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension n, alors $\mathbb{P}(\widehat{\mathscr{E}})$ est noté $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{E})$ et appelé le **complété** (ou plongement) **projectif** de $\mathscr{E}$.

Notation 16.2. — Considérons sur $V - \{0\}$ la relation d'équivalence définie par $v \sim v'$ ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $v' = \lambda v$. Comme toute droite D est définie par un vecteur non nul v et que deux vecteurs non nuls v, v' définissent la même droite ssi $v \sim v'$, on voit que $\mathbb{P}(V)$ s'identifie à *l'ensemble quotient* $(V - \{0\})/\sim$, qu'on note $(V - \{0\})/k^\times$.

Pour tout $v \in V - \{0\}$, on notera $[v]$ son image dans $\mathbb{P}(V)$, i.e. le point de $\mathbb{P}(V)$ défini par la droite kv.

Définition 16.3 **(Sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$).** — Soit W un sev non nul de V. Alors $\mathbb{P}(W)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{P}(V)$ (en effet, les droites vectorielles de V contenues dans W sont exactement les droites vectorielles de W). On dira que c'est un *sous-espace projectif* de $\mathbb{P}(V)$, *de dimension* $\dim(W) - 1$. [10] En particulier, si $\dim(W) = 2$ on dit que $\mathbb{P}(W)$ est une *droite* (projective) de $\mathbb{P}(V)$, et si $\dim(W) = \dim(V) - 1$ on dit que $\mathbb{P}(W)$ est un *hyperplan* (projectif) de $\mathbb{P}(V)$.

Terminologie. Si V est le plongement vectoriel $\widehat{\mathscr{E}}$ d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension n, alors E est un hyperplan de $\widehat{\mathscr{E}}$ donc $\mathbb{P}(E)$ est un hyperplan de $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{E}) = \mathbb{P}(\widehat{\mathscr{E}})$. On dit que c'est l'hyperplan **à l'infini** car $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{E})$ s'identifie à la réunion disjointe de $\mathscr{E}$ et de $\mathbb{P}(E)$.

Rappelons le lemme suivant, dont on se servira de façon répétée.

Lemme 16.4. — *Soient H un hyperplan de V et W un sev de V non contenu dans H. Alors on a* $\dim(W \cap H) = \dim(W) - 1$.

Démonstration. — En effet, rappelons la formule :

$$(\dagger) \qquad \dim(W \cap H) = \dim(W) + \dim(H) - \dim(W + H).$$

Comme $\dim(H) = \dim(V) - 1$ et comme l'inclusion $H \subset H + W$ est *stricte* (car $W \not\subset H$), on a $\dim(W + H) \geq \dim(V)$ et donc $W + H = V$. Reportant ceci dans (†), on obtient $\dim(W \cap H) = \dim(W) - 1$. □

[9] Par convention, $\mathbb{P}(\{0\}) = \varnothing$.

[10] Si $W = \{0\}$, alors $\mathbb{P}(W)$ est l'ensemble vide $\varnothing$, auquel on peut attribuer la dimension -1.

On a vu au §15.2 que, si $\mathscr{P}$ est un plan affine, alors le plan projectif $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P}) = \mathbb{P}(\widehat{\mathscr{P}})$ a la propriété suivante : deux droites projectives distinctes se coupent en un unique point. On va voir que ceci est vrai dans tout plan projectif. Plus généralement, on a la :

Proposition 16.5. — *Soient E, F deux sev non nuls de V. Posons $p = \dim \mathbb{P}(E)$ et $q = \dim \mathbb{P}(F)$.*

(i) *On a $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E \cap F)$; ceci est non vide ssi $E \cap F \neq \{0\}$.*

(ii) *Si $p + q \geq n = \dim \mathbb{P}(V)$ alors $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F)$ est non vide et est de dimension $\geq p + q - n$.*

(iii) *Par ailleurs, on a : $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F) \Leftrightarrow E \subset F$ et donc : $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F) \Leftrightarrow E = F$.*

(iv) *Si H est un hyperplan de V et si $\mathbf{D}$ est une droite projective non contenue dans $\mathbb{P}(H)$, alors $\mathbf{D} \cap \mathbb{P}(H)$ est formé d'un seul point.*

Démonstration. — $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F)$ est formé des droites vectorielles de V contenues dans E et dans F, i.e. contenues dans $E \cap F$. La 1ère assertion de (i) en découle, et la 2ème est claire.

(ii) On sait que $\dim(E \cap F) + \dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) = p + 1 + q + 1 = p + q + 2$, et comme $\dim(E + F) \leq \dim(V) = n + 1$ on a donc :

$$\dim(E \cap F) \geq p + q + 2 - (n + 1) = p + q + 1 - n.$$

Sous l'hypothèse $p + q \geq n$, ceci est ≥ 1, donc $E \cap F$ est non nul, de dimension $\geq p + q - n + 1$, donc $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F)$ est de dimension $\geq p + q - n$.

(iii) Il est clair que si $E \subset F$ alors $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F)$. Réciproquement, si $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F)$, alors pour tout v non nul dans E, la droite kv est contenue dans F, d'où $v \in F$ et donc $E \subset F$. Ceci prouve la 1ère assertion de (iii), et la 2ème en découle.

(iv) On a $\mathbf{D} = \mathbb{P}(W)$ pour un certain plan vectoriel W de V (uniquement déterminé, d'après (iii)), non contenu dans H. Alors $\Delta = W \cap H$ est une droite vectorielle de H et donc $\mathbf{D} \cap \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(\Delta)$ est le point δ de $\mathbb{P}(H)$ correspondant à Δ. $\square$

Corollaire 16.6. — (i) *Dans un plan projectif, deux droites projectives distinctes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ se coupent en un unique point.*

(ii) *Dans un espace projectif* $\mathbb{P}(V)$ de dimension 3 (*i.e.* $\dim(V) = 4$), *soient $\mathbf{P}$ un plan projectif et $\mathbf{D}$ une droite projective non contenue dans $\mathbf{P}$. Alors $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$ se coupent en un unique point.*

Pour faire de la géométrie dans le plan projectif (cf. la section 17 sur les théorèmes de Pappus et de Desargues), on aura besoin de la notion de « *droite projective engendrée par deux points distincts* » et de celle de « *points alignés* » dans $\mathbb{P}(V)$. Pour cela, on a besoin de la :

***Définition 16.7* (Sous-espace projectif engendré, points alignés)**

Soit X un sous-ensemble non vide de $\mathbb{P}(V)$. Notons δ_x la droite vectorielle de V correspondant à un élément x de X, et soit E le sev de V engendré par les δ_x. En d'autres termes, si $X = \{p_1, \ldots, p_N\}$ et si $p_i = [v_i]$, alors $E = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_N)$. Alors :

(i) $\mathbb{P}(E)$ est le *plus petit* sous-espace projectif de V contenant X. On dit que c'est le sous-espace projectif *engendré* par X.

(ii) Si X est formé de deux points distincts p_1, p_2, alors $\dim(E) = 2$ et l'on dit que $\mathbb{P}(E)$ est la *droite projective engendrée* par p_1 et p_2. On la note $(p_1 p_2)$.

(iii) Soient $N \geq 2$ et $p_1, \ldots, p_N$ des points de $\mathbb{P}(V)$, pas tous égaux. On dit qu'ils sont *alignés* si le sous-espace projectif qu'ils engendrent est une droite projective.

Démonstration. — Il n'y a que la première phrase de (i) à démontrer. Mais c'est clair, car si X est contenu dans un sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ alors W contient les δ_x donc contient E, d'où $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(W)$. □

***Définition 16.8* (Coordonnées homogènes).** — Munissons V d'une base $(e_0, \ldots, e_n)$, notée $\mathscr{B}$. Alors chaque point de $\mathbb{P}(V)$, correspondant à une droite vectorielle D, peut être paramétré par ses « *coordonnées homogènes* » $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$: ce sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ d'un élément non nul v de D. Noter que comme $v \neq 0$, les x_i ne sont pas tous nuls. Bien sûr, pour tout $\lambda \in k^\times$, v et λv engendrent la même droite, donc les coordonnées homogènes ne sont définies qu'à la multiplication près par un scalaire non nul, i.e. $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ et $[\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n]$ représentent le même point.

On va voir que malgré cette « non unicité » (qui au prime abord peut sembler gênante), les coordonnées homogènes sont un outil très utile.

En particulier, si $V = k^{n+1}$, les coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{P}(k^{n+1})$ ne sont autres que les classes d'équivalence de $(n+1)$-uplets $(x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} - \{(0, \ldots, 0)\}$, où $(x_0, \ldots, x_n) \sim (x'_0, \ldots, x'_n)$ ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $x'_i = \lambda x_i$ pour tout i, et la classe d'équivalence de $(x_0, \ldots, x_n)$ est notée $[x_0, \ldots, x_n]$.

16.2. Ouverts affines. — On appellera plus bas « ouverts affines » de $\mathbb{P}(V)$ certains espaces affines, analogues de l'espace affine $\mathscr{E}$ plongé dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{E})$. Pour justifier la terminologie « ouverts », commençons par la définition suivante.

Remarque 16.9. — Pour tout polynôme **homogène** $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$, disons de degré d, on peut définir son « lieu des zéros » dans $\mathbb{P}^n(k)$ par :

$$\mathscr{V}(F) = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \mid F(x_0, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Ceci est bien défini, car puisque F est homogène de degré d, on a $F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \ldots, x_n)$ pour tout $\lambda \in k^\times$, donc si F s'annule sur *un* représentant $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[x_0, \ldots, x_n]$ il s'annule sur *tout* représentant.

Plus généralement, pour tout ensemble $\{F_1, \ldots, F_N\}$ de polynômes homogènes (où F_i est, disons, de degré d_i), on pose :

$$\mathscr{V}(F_1, \ldots, F_N) = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \mid \forall i = 1, \ldots, N, \quad F_i(x_0, \ldots, x_n) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{N} \mathscr{V}(F_i).$$

On appellera ces sous-ensembles des *fermés algébriques* de $\mathbb{P}^n(k)$. [11]

La remarque précédente est valable, indépendamment d'un choix de coordonnées, pour toute *forme linéaire* f sur V. Plus précisément :

***Définition 16.10* (Hyperplans de $\mathbb{P}(V)$).** — (i) Pour toute $f \in V^*$ non nulle, son lieu des zéros $\mathscr{V}(f) = \{[v] \in \mathbb{P}(V) \mid f(v) = 0\}$ est appelé un **hyperplan** de $\mathbb{P}(V)$. Notant H l'hyperplan $\mathrm{Ker}(f) \subset V$, on voit que $\mathscr{V}(f)$ n'est autre que l'ensemble des droites vectorielles contenues dans H, c.-à-d. le sous-espace projectif $\mathbb{P}(H) \subset \mathbb{P}(V)$.

(ii) Plus généralement, pour $f_1, \ldots, f_r \in V^*$, le lieu des zéros $\mathscr{V}(f_1, \ldots, f_r)$ est bien défini et s'identifie au sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$, où $W = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(f_i)$. [12]

[11] On peut vérifier (nous n'en aurons pas besoin) que les $\mathscr{V}(F)$ forment les fermés d'une certaine topologie sur $\mathbb{P}^n(k)$, appelée la topologie de Zariski. De plus, si k est le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors $\mathbb{K}^{n+1}$ est muni d'une topologie canonique, ainsi que le quotient $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{K}^\times$, et comme les fonctions polynomiales (homogènes) $F = \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ sont *continues*, on obtient que les $\mathscr{V}(F_1, \ldots, F_N)$ sont aussi des fermés pour cette topologie.

[12] On rappelle que si $W = \{0\}$ alors $\mathbb{P}(W) = \varnothing$.

Rappel 16.11. — Si F est un sev de V, son orthogonal dans V^* est :

$$F^0 = \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ pour tout } f \in F\}.$$

On a $\dim(F^0) = \dim(V) - \dim(F)$. En particulier, si $F = H$ est un hyperplan de V alors H^0 est une droite vectorielle de V^*.

Explications 16.12. — Afin « d'expliquer » les propositions 16.13 et 16.15 qui vont suivre, résumons ici le but poursuivi dans la suite de cette section. On a vu au §15.2 que le complété projectif $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ d'un plan affine $(\mathscr{P}, P)$, obtenu en ajoutant à $\mathscr{P}$ la droite projective $\mathbb{P}(P)$, a de meilleures propriétés d'incidence que $\mathscr{P}$ (i.e. deux droites distinctes se coupent en un unique point). On verra plus loin que pour certains énoncés de géométrie affine dans $\mathscr{P}$, il est avantageux de démontrer d'abord un énoncé analogue dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$, puis d'en déduire le résultat « en revenant » dans $\mathscr{P}$.

Ceci se généralise en dimension quelconque : si $V = \widehat{\mathscr{E}}$ est le plongement vectoriel d'un espace affine $(\mathscr{E}, E)$, alors $\mathscr{E}$ est le complémentaire dans $\mathbb{P}(V)$ de « l'hyperplan à l'infini » $\mathbb{P}(E)$. Mais il y a bien plus que cela : on va voir que pour **tout** hyperplan projectif $\mathbb{P}(H)$ de $\mathbb{P}(V)$, l'ouvert complémentaire $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ est muni d'une structure naturelle d'espace affine de dimension n, et si l'on part d'un énoncé affine dans $\mathscr{E}$ que l'on transforme en énoncé projectif dans $\mathbb{P}(V)$, alors en se plaçant dans l'espace affine U, on peut obtenir de nouveaux théorèmes affines (voir les théorèmes de Pappus et de Desargues dans la section suivante).

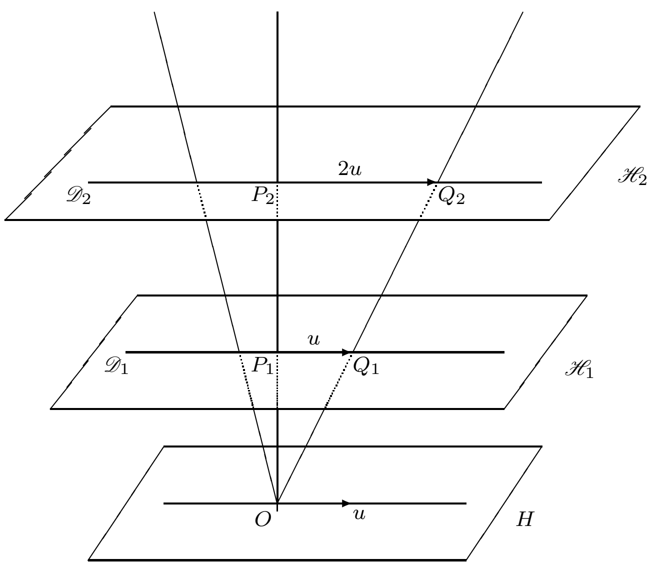
Le but de ce qui suit est donc de définir sur $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ une structure d'espace affine qui ne dépende que de H (et pas d'un choix additionnel, tel que le choix d'un générateur f de la droite vectorielle $H^0 \subset V^*$).

Définition et proposition 16.13 **(Les « ouverts » affines $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$)**

Soient H un hyperplan de V et $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Fixons un générateur f de H^0, i.e. une forme linéaire f telle que $\mathrm{Ker}(f) = H$ *et, pour tout $\lambda \in k^\times$ considérons l'hyperplan affine $\mathscr{H}_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda\}$.*

(i) *L'application $\mathscr{H}_\lambda \to U$, $x \mapsto [x]$ est une bijection. Via cette bijection U est muni d'une structure d'espace affine de direction H, définie par $[x] +_\lambda u = [x + \lambda u]$.*

(ii) *Toutes ces structures d'espace affine sont isomorphes : plus précisément, l'homothétie $v \mapsto \lambda v$ dans V induit une bijection de $\mathscr{H}_1$ sur $\mathscr{H}_\lambda$ et un isomorphisme entre les espaces affines $(\mathscr{H}_1, H, +_1)$ et $(\mathscr{H}_\lambda, H, +_\lambda)$ (cf. la figure ci-dessous).*



Démonstration. — (i) Tout $[v] \in U$ admet un *unique* représentant v tel que $f(v) = \lambda$. En effet, si w est un représentant quelconque, alors $v = \lambda f(w)^{-1} w$ vérifie $f(v) = \lambda$, et pour tout représentant $v' = \mu v$ on a $f(v') = \mu\lambda$, donc $f(v') = \lambda \Leftrightarrow \mu = 1$. On a donc une bijection $x \mapsto [x]$ de $\mathscr{H}_\lambda$ sur U. De plus, l'action de H sur $\mathscr{H}_\lambda$ définie par

$$\mathscr{H}_\lambda \times H \to \mathscr{H}_\lambda, \quad (x, u) \mapsto x +_\lambda u = x + \lambda u,$$

fait de $\mathscr{H}_\lambda$ un espace affine de direction H, que l'on désignera par $(\mathscr{H}_\lambda, H, +_\lambda)$. Via la bijection précédente, ceci munit U d'une structure d'espace affine de direction H.

(ii) L'homothétie de V de rapport λ est bijective. Elle induit une bijection h de $\mathscr{H}_1$ sur $\mathscr{H}_\lambda$. De plus, pour tout $x \in \mathscr{H}_1$ et $u \in H$, on a :

$$h(x +_1 u) = h(x + u) = \lambda(x + u) = \lambda x + \lambda u = h(x) +_\lambda u.$$

Ceci montre que, considérée comme application de $(\mathscr{H}_1, H, +_1)$ dans $(\mathscr{H}_\lambda, H, +_\lambda)$, h est une application *affine*, de partie linéaire l'homothétie vectorielle $h_\lambda : H \to H$. Comme h est bijective, c'est donc un isomorphisme entre ces deux espaces affines. □

Remarque 16.14. — Ce qui précède devient très simple si on l'écrit en coordonnées homogènes. Soit H un hyperplan de V. On peut trouver des coordonnées homogènes $[x_0, \dots, x_n]$ telles que H soit donné par l'annulation d'une des coordonnées, disons par l'équation $x_0 = 0$. En effet, soit f_0 une forme linéaire telle que $\mathrm{Ker}(f_0) = H$; complétons-la en une base $(f_0, \dots, f_n)$ de V^*. C'est la base duale d'une unique base $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ de V et, notant $(x_0, \dots, x_n)$ les coordonnées dans cette base et $[x_0, \dots, x_n]$ les coordonnées homogènes correspondantes sur $\mathbb{P}(V)$, chaque forme linéaire coordonnée $e_i^* = x_i$ n'est autre que f_i et donc H est bien donné par l'équation $x_0 = 0$. Alors l'ouvert $U_0 = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ s'identifie à l'hyperplan affine

$$\mathscr{H} = \{[1, x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{P}(V)\} = e_0 + H.$$

Soit H un hyperplan de V. Il résulte de ce qui précède que $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ est muni d'une structure affine ; en particulier, on peut parler de ses sous-espaces affines. Ils sont décrits explicitement par la proposition suivante.

***Proposition 16.15* (Sous-espaces affines de $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$)**

Soient H un hyperplan de V et $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Fixons un générateur f de H^0 et identifions U à l'hyperplan affine $\mathscr{H} = \{v \in V \mid f(v) = 1\}$. Alors on a ce qui suit :

(i) *Pour tout sev W de V non contenu dans H, de dimension $d + 1$, $\mathbb{P}(W) \cap U$ est un sous-espace affine $\mathscr{W}$ de U de dimension d et de direction $W \cap H$, et l'on a $W = \mathrm{Vect}(\mathscr{W})$.*

(ii) *Soit $\mathscr{W}$ un sous-espace affine de U, de dimension d, et soit W le sev de V engendré par les droites kv, pour tout $[v] \in \mathscr{W}$. Alors W est de dimension $d + 1$, n'est pas contenu dans H et $W \cap H$ est la direction de $\mathscr{W}$. Le sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ de $\mathbb{P}(V)$ est de dimension d et l'on a $\mathbb{P}(W) \cap U = \mathscr{W}$.*

(iii) *Donc les applications $\mathscr{W} \mapsto \mathbb{P}(\mathrm{Vect}(\mathscr{W}))$ et $\mathbb{P}(W) \mapsto \mathbb{P}(W) \cap U$ sont des* bijections réciproques *entre l'ensemble des sous-espaces affines de U et celui des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ non contenus dans $\mathbb{P}(H)$. Ces bijections préservent la dimension.*

Démonstration. — Pour la démonstration, identifions $\mathscr{H}$ à U, via la bijection $x \mapsto [x]$.

(i) Soit W un sev de V non contenu dans H. Alors f induit, par restriction, une forme linéaire sur W, non nulle (car $W \not\subset \mathrm{Ker}(f)$) qu'on notera f_W. Alors on a les identifications suivantes :

$$\mathscr{H} \cap \mathbb{P}(W) = \{v \in V \mid f(v) = 1 \text{ et } v \in W\} = \{v \in W \mid f_W(v) = 1\}$$

qui montrent que $\mathscr{W} = \mathscr{H} \cap \mathbb{P}(W)$ est un espace affine de direction $\mathrm{Ker}(f_W) = W \cap H$, donc de dimension $\dim(W) - 1$.

De plus, montrons que le sev $W' = \mathrm{Vect}(\mathscr{W})$ de W égale W. Fixons $v_0 \in \mathscr{W}$. Alors pour tout $w \in W \cap H$ le point $v_0 + w$ appartient à $\mathscr{W}$, donc $w \in W'$. Ceci montre que W' contient l'hyperplan vectoriel $\mathrm{Ker}(f_W)$ de W ; comme il contient de plus v_0 qui n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(f_W)$ (puisque $f_W(v_0) = 1$), on a donc $W' = W$. Ceci prouve (i).

(ii) Soient $\mathscr{W}$ un sous-espace affine de dimension d de $\mathscr{H}$, on peut l'écrire $v_0 + F$ où F est un sev de dimension d de H. Posant $W = \mathrm{Vect}(\mathscr{W})$, on a donc $W = kv_0 + F$ et, comme $v_0 \notin H$ (puisque $f(v_0) = 1$), cette somme est directe : $W = kv_0 \oplus F$ et l'on a $W \cap H = F$.

Il reste à montrer que $\mathbb{P}(W) \cap \mathscr{H} = \mathscr{W}$. Comme plus haut, on a les identifications

$$\mathscr{H} \cap \mathbb{P}(W) = \{v \in V \mid f(v) = 1 \text{ et } v \in W\} = \{w \in W \mid f(w) = 1\}.$$

Or, écrivant $w = \lambda v_0 + u$, avec $u \in F = W \cap H$, on a $f(w) = \lambda$ donc $f(w) = 1 \Leftrightarrow w \in v_0 + F$. Ceci montre que $\mathscr{H} \cap \mathbb{P}(W) = v_0 + F = \mathscr{W}$, ce qui achève la démonstration de (ii).

Enfin, (iii) découle aussitôt de (i) et (ii) car pour tout $\mathscr{W}$ on a $\mathscr{W} = U \cap \mathbb{P}(\mathrm{Vect}(\mathscr{W}))$ et pour tout W on a $W = \mathrm{Vect}(\mathbb{P}(W) \cap U)$. ☐

Pour les lecteurs intéressés, ajoutons le **complément** suivant. On peut récrire la proposition 16.13 de façon plus « canonique » (i.e. sans choisir un générateur f de H^0). D'abord, on a le lemme suivant.

Lemme 16.16. — *Soit H un hyperplan de V et soit $E = \mathrm{Hom}(V/H, H)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de V/H dans H. Alors :*

(i) *Le choix d'un générateur f de $H^0 = (V/H)^*$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels $\phi_f : H \xrightarrow{\sim} E$.*

(ii) *Plus précisément, pour tout $u \in H$ et $v \in V$, on a :* $\boxed{\phi_f(u)(\overline{v}) = f(v)u}$ *(où $\overline{v}$ désigne l'image de v dans V/H).*

Démonstration. — (i) En effet, V/H étant de dimension 1, si l'on en fixe un générateur e alors $E = \mathrm{Hom}(ke, H)$ s'identifie à H via l'isomorphisme $\theta \mapsto \theta(e)$. Or, le choix d'un générateur f de $H^0 = (V/H)^*$ définit un générateur e de V/H, à savoir l'unique élément e tel que $f(e) = 1$.

(ii) Fixons f et e comme ci-dessus. Pour tout $u \in H$ on a, par définition, $\phi_f(u)(\mu e) = \mu u$ pour tout $\mu \in k$. D'autre part, pour $v \in V$, posons $\overline{v} = \mu_v e$. Alors $\mu_v = f(\overline{v}) = f(v)$ et donc $\phi_f(u)(\overline{v}) = f(v)u$. (13) ☐

Proposition 16.17. — *Soient H un hyperplan de V et $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Soit $E = \mathrm{Hom}(V/H, H)$ et, pour tout $f \in H^0 - \{0\}$, soit $\mathscr{H}_f = \{x \in V \mid f(x) = 1\}$.*

(i) *U est un espace affine de direction E (et donc de dimension $n = \dim(V) - 1$).*

(ii) *Pour tout $f \in H^0 - \{0\}$ la bijection $\mathscr{H}_f \to U$, $x \mapsto [x]$ est une application* affine, *de partie linéaire l'isomorphisme $\phi_f : H \xrightarrow{\sim} E$ du lemme* 16.16. *C'est donc un* isomorphisme *entre les espaces affines $(\mathscr{H}_f, H)$ et (U, E).*

Démonstration. — (i) D'abord, pour tout $v \in V$, notons $\overline{v}$ son image dans V/H. On définit alors l'action de E sur U comme suit. Pour tout $\theta \in E$ et $[v] \in U$, on pose :

$$(*) \qquad [v] \boldsymbol{+} \theta = [\, v + \theta(\overline{v})\,].$$

Vérifions que ceci est bien défini. D'une part, comme $\theta(\overline{v}) \in H$, le vecteur $v + \theta(\overline{v})$ n'appartient pas à H, car sinon on aurait $v \in H$, contradiction. D'autre part, si $v' = \lambda v$ est un autre représentant de $[v]$, on a $\theta(\overline{v'}) = \theta(\lambda\overline{v}) = \lambda\theta(\overline{v})$ et donc $v' + \theta(\overline{v'}) = \lambda(v + \theta(\overline{v}))$. Ceci montre que $(*)$ définit bien une application $U \times E \to U$, $([v], \theta) \mapsto [v] \boldsymbol{+} \theta$.

(13) Tout ceci devient plus clair si l'on connaît les produits tensoriels (cf. le cours 4M002) : $\mathrm{Hom}(V/H, H)$ s'identifie au produit tensoriel $(V/H)^* \otimes H = H^0 \otimes H$, et comme $\dim(H^0) = 1$ tout élément est de la forme $f \otimes u$, avec $f \in H^0$ et $u \in H$. Pour tout $\lambda \in k^\times$, $\lambda f \otimes u = f \otimes \lambda u$ correspond à l'application $v \mapsto \lambda f(v)u$, qui est $\phi_{\lambda f}(u)$ aussi bien que $\phi_f(\lambda u)$. (Comparer avec 16.13 et la figure qui le suit.)

Si $\theta = 0$ (l'application nulle), on a bien $[v] + 0 = [v]$. Et pour tout $\theta, \theta' \in E$, $([v] + \theta) + \theta' = [v + \theta(\overline{v})] + \theta'$ désigne la droite engendrée par le vecteur

$$v + \theta(\overline{v}) + \theta'(v + \theta(\overline{v})) = v + \theta(\overline{v}) + \theta'(\overline{v}) = v + (\theta + \theta')(\overline{v}).$$

Ceci montre que $([v] + \theta) + \theta' = [v] + (\theta + \theta')$, donc $(*)$ définit bien une *action* de E sur U. Il reste à montrer que cette action est simplement transitive, et l'on va démontrer ceci en même temps que le point (ii).

(ii) Tout $[v] \in U$ admet un *unique* représentant v tel que $f(v) = 1$. En effet, si w est un représentant quelconque, alors $v = f(w)^{-1}w$ vérifie $f(v) = 1$, et pour tout représentant $v' = \mu v$ on a $f(v') = \mu$, donc $f(v') = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$. On a donc une bijection $p_f : x \mapsto [x]$ de $\mathscr{H}_f$ sur U.

Soient $x \in U$ et $u \in H$. D'après le lemme 16.16, on a $\phi_f(u)(x) = f(x)u = u$ et l'on a donc les égalités :

$$(**) \qquad p_f(x + u) = [x + u] = [\, x + \phi_f(u)(x)\,] = [x] + \phi_f(u) = p_f(x) + \phi_f(u).$$

Ceci montre que, via la bijection p_f, l'action $+$ de E sur U correspond à l'action naturelle de H sur $\mathscr{H}_f$. Comme celle-ci est simplement transitive, on en déduit qu'il en est de même de l'action $+$. Ceci achève de prouver que (U, E) est un espace affine. Mais alors, $(**)$ nous dit que la bijection $p : \mathscr{H}_f \to U$ est affine, de partie linéaire ϕ_f ; c'est donc un *isomorphisme* entre les espaces affines $(\mathscr{H}_f, H)$ et (U, E). ☐

16.3. Passage de l'affine au projectif, et inversement. — Comme expliqué en 16.12, on veut pouvoir passer d'un énoncé affine dans un espace affine $\mathscr{E}$ à un énonce projectif dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{E})$, puis revenir à un énoncé affine dans un ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Pour cela, on aura besoin de l'énoncé suivant, que l'on peut paraphraser en disant que les bijections de la Prop. 16.15 « *préservent l'alignement des points* » (en un sens rendu précis par la proposition ci-dessous).

Proposition 16.18. — *Soient $p_1, \dots, p_N$, avec $N \geq 3$, des points deux à deux distincts de $\mathbb{P}(V)$ (où $\dim(V) \geq 2$).*

(i) *On suppose que les p_i sont alignés au sens de la définition* 16.7, *i.e. que le sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ qu'ils engendrent soit une droite projective (i.e. $\dim(W) = 2$). Alors, pour* **tout** *hyperplan H de V tel que les p_i ne soient pas tous dans $\mathbb{P}(H)$ (i.e. tel $W \not\subset H$) on a ce qui suit : $W \cap H$ est une droite vectorielle D et, notant U l'ouvert affine $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$, on est dans l'une des deux situations suivantes :*

(a) *tous les p_i sont dans U et appartiennent à une droite affine $\mathscr{D}$.*

(b) *tous les p_i sauf un sont dans U et appartiennent à une droite affine $\mathscr{D}$, et le dernier, disons p_N, est dans « l'hyperplan à l'infini » $\mathbb{P}(H)$ et correspond à la droite vectorielle D qui est la direction de $\mathscr{D}$.*

(ii) *Réciproquement, s'il existe* **un** *hyperplan H de V tel qu'on soit dans la situation (a) ou (b) ci-dessus, alors le sev W de V engendré par $\mathscr{D}$ est de dimension 2 et les p_i appartiennent à la droite projective $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathbb{P}(W)$.*

Démonstration. — (i) Posant $p_i = [v_i]$, soit W le sev de V engendré par les droites kv_i. Supposons $\dim(W) = 2$. Soit H un hyperplan de V ne contenant pas H, alors $W \cap H$ est une droite vectorielle D. D'après la Prop. 16.15, $U \cap \mathbb{P}(W)$ est une droite affine $\mathscr{D}$ de direction D. De plus, $\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(W \cap H) = \mathbb{P}(D) = \{d\}$, où d est le point de $\mathbb{P}(H)$ qui correspond à la droite D. Comme les p_i sont deux à deux distincts, au plus l'un d'entre eux peut être égal à d, et l'on est donc dans l'une des situations (a) ou (b).

(ii) Réciproquement, soit H un hyperplan de V tel qu'on soit dans la situation (a) ou (b). D'après la Prop. 16.15, il existe un unique plan vectoriel W de V, non contenu dans H, tel que $\mathscr{D} = U \cap \mathbb{P}(W)$.[14]. De plus, la direction de $\mathscr{D}$ est la droite vectorielle $D = W \cap H$. On a donc $\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(W \cap H) = \{d\}$, où d est le point de $\mathbb{P}(H)$ qui correspond à D. Donc, dans chacun des cas (a) et (b), les p_i sont contenus dans la droite projective $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathbb{P}(W)$. □

Exercice 16.19. — Soient $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{P}(V)$. On suppose :

(i) $\dim(V) \geq 3$ et $N \geq 5$.

(ii) Les p_i sont *coplanaires*, i.e. le sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ qu'ils engendrent est un plan projectif,

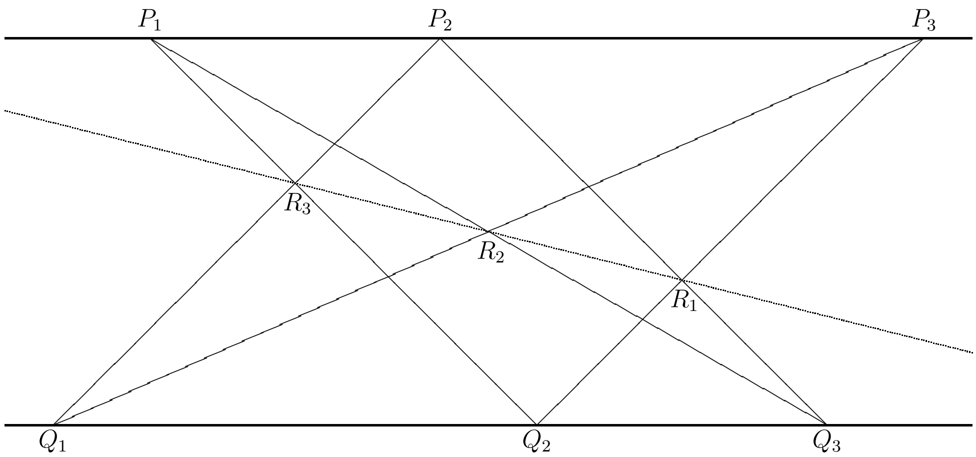
(iii) Trois quelconques des p_i ne sont jamais alignés (i.e. pour i, j, k deux à deux distincts, les points p_i, p_j, p_k ne sont pas alignés).

Montrer que pour tout hyperplan H ne contenant pas W, tous les p_i sauf au plus deux sont dans l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ et y engendrent un plan affine $\mathscr{P}$. Décrire les trois situations possibles selon le nombre de p_i contenus dans $\mathbb{P}(H)$.

17. Théorèmes de Pappus et de Desargues

Du théorème de Pappus affine 7.1 donné dans le chap. 1, on déduit le :

***Théorème 17.1* (de Pappus « projectif »)**. — *Dans un plan projectif $\mathbb{P}(V)$, soient $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ deux droites distinctes et P_1, P_2, P_3 (resp. Q_1, Q_2, Q_3) trois points distincts situés sur $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) et distincts du point de concours de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On note R_3 le point de concours des droites (P_1Q_2) et (P_2Q_1) et l'on définit de même R_2 et R_1, cf. la figure ci-dessous :*



Alors les points R_1, R_2, R_3 sont alignés.

Démonstration. — On a bien sûr envie de poser $\mathscr{D}_\infty = (R_1R_2)$ et d'appliquer la théorème 7.1 dans le plan affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$. Pour cela, il faut s'assurer que les points P_i et Q_j sont dans U, i.e. ne sont pas sur la droite (R_1R_2). Ceci « se voit » sur la figure ci-dessus, et on peut le démontrer comme suit :

(i) Les points R_i sont deux à deux distincts. En effet, si on avait par exemple $R_1 = R_2 = S$, les points $P_3SQ_1Q_2$ seraient alignés, d'où $P_3 \in \mathscr{D}'$, contradiction.

(ii) Aucun P_i ou Q_j n'appartient à la droite (R_1R_2). En effet, vis-à-vis de (R_1R_2), les points P_1, P_2, Q_1, Q_2 d'une part, et P_3, Q_3 d'autre part, jouent le même rôle, donc il suffit de le vérifier pour P_1 et P_3. Si on avait $P_1 \in (R_1R_2)$, les points $P_1R_1R_2Q_3P_2$ seraient alignés, d'où $Q_3 \in \mathscr{D}$, contradiction. Et si on avait $P_3 \in (R_1R_2)$, les points $P_3R_1R_2Q_1Q_2$ seraient alignés, d'où $P_3 \in \mathscr{D}'$, contradiction.

[14] Explicitement, comme $p_1 = [v_1]$ et $p_2 = [v_2]$ sont distincts et contenus dans $\mathscr{D}$, alors $W = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

Prenons alors la droite (R_1R_2) comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$. Alors dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$, les droites affines (P_3Q_2) et (P_2Q_3), d'une part, et (P_1Q_3) et (P_3Q_1) d'autre part, ne se coupent pas donc sont parallèles. D'après le théorème de Pappus affine, les droites affines (P_2Q_1) et (P_1Q_2) sont donc parallèles, donc dans $\mathbb{P}(V)$ leur point d'intersection R_3 appartient à la droite $\mathscr{D}_\infty = (R_1R_2)$. Ceci montre que R_1, R_2, R_3 sont alignés. □

Et de cette version projective, on déduit la variante affine suivante :

***Corollaire 17.2* (Version affine de Pappus projectif).** — *Dans un plan affine $\mathscr{P}$, soient $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites distinctes et P_1, P_2, P_3 (resp. Q_1, Q_2, Q_3) trois points distincts situés sur $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) et distincts de l'éventuel point de concours de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On suppose que les droites (P_2Q_3) et (P_3Q_2), resp. (P_1Q_3) et (P_3Q_1), se coupent en un point R_1, resp. R_2. Alors :*

a) *ou bien (P_1Q_2) et (P_2Q_1) se coupent en un point R_3 de la droite (R_1R_2),*

b) *ou bien (P_1Q_2) et (P_2Q_1) sont parallèles à la droite (R_1R_2).*

Démonstration. — Plaçons-nous dans le plongement vectoriel $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ de $\mathscr{P}$. Soit R_3 le point de concours des droites projectives (P_1Q_2) et (P_2Q_1). D'après le théorème précédent il appartient à la droite projective (R_1R_2), d'où (a) si $R_3 \in \mathscr{P}$. Au contraire, si $R_3 \in \mathscr{D}_\infty$ alors c'est le point à l'infini de chacune des droites affines (R_1R_2), (P_1Q_2) et (P_2Q_1), donc ces trois droites sont parallèles. □

De même, du théorème de Desargues affine 7.2 donné dans le chap. 1, on déduit le :

***Théorème 17.3* (de Desargues projectif).** — *Dans un plan projectif, considérons six points distincts A, B, C, A', B', C'. On suppose :*

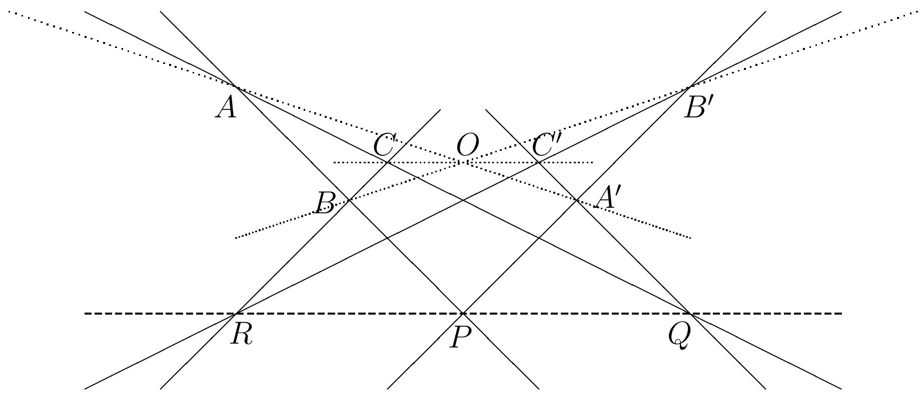
a) *A, B, C (resp. A', B', C') sont* non alignés.

b) *Les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont deux à deux* distinctes.

Notons P, resp. Q, resp. R, l'unique point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$, resp. (AC) et $(A'C')$, resp. (BC) et $(B'C')$ et faisons de plus l'hypothèse :

c) $\{P, Q, R\} \cap \{A, B, C, A', B', C'\} = \varnothing$. [15]

Alors P, Q, R sont alignés si et seulement si les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en un point O.



Démonstration. — (1) Remarquons d'abord que les points P, Q, R sont bien définis, car les droites (AB) et $(A'B')$ sont *distinctes*, ainsi que (AC) et $(A'C')$ d'une part, et (BC) et $(B'C')$ d'autre part. En effet, comme $(AA') \neq (BB')$, les points $ABA'B'$ ne sont pas alignés donc (AB) et $(A'B')$ se coupent en un unique point P, et de même pour Q et R.

[15] Cette hypothèse est généralement omise dans la littérature ; si elle n'est pas vérifiée le théorème reste vrai mais la figure obtenue est différente, voir [Po, Th.12.13].

(2) Remarquons de plus que P, Q, R sont deux à deux distincts. En effet, supposons par exemple que $P = R$ et notons provisoirement M ce point. Comme $B \neq B'$ alors M ne peut être simultanément égal à B et à B'. Supposons par exemple $M \neq B$. Alors la droite $(BM) = (BP) = (BR)$ contient A (car ABP sont alignés) et aussi C (car BCR sont alignés). Donc A, B, C sont alignés, contradiction. Ceci montre que P, Q, R sont bien deux à deux distincts.

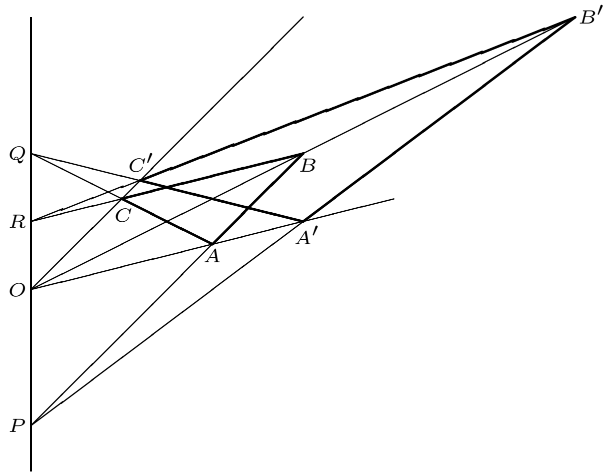
(3) Montrons que la droite (PQ) ne contient aucun des points A, B, C, A', B', C'. En effet, si $A \in (PQ)$ alors, comme par c) A est distinct de P, Q la droite $(AP) = (AQ)$ égale (AB) et (AC), donc A, B, C sont alignés, contradiction. Et si $B \in (PQ)$, alors $(PQ) = (BP)$ contient A, contradiction. De même, (PQ) ne peut contenir ni C, ni A', B', C'.

(4) Démontrons maintenant l'équivalence annoncée.

(i) Supposons P, Q, R alignés et prenons cette droite comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$. Alors dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$, les droites affines (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, de même que (AC) et $(A'C')$ d'une part, et (BC) et $(B'C')$ d'autre part. Donc, d'après le théorème de Desargues affine, les droites affines $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles, donc les droites projectives correspondantes sont concourantes.

(ii) Réciproquement, supposons les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') concourantes. Prenons la droite (PQ) comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$. Alors dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$, les droites affines (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, de même que (AC) et $(A'C')$, et les droites affines $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles. Donc, d'après le théorème de Desargues affine, les droites affines (BC) et $(B'C')$ sont parallèles, donc les droites projectives correspondantes se coupent sur la droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$, donc $R \in \mathscr{D}_\infty = (PQ)$ et donc P, Q, R sont alignés. $\square$

Remarque. — Dans la figure précédente, le point O n'appartient pas à la droite (PQR), mais il peut y appartenir :



Exercice 17.4. — Essayer de démontrer le corollaire 9.10 de [Po, Partie I] = Exercice 6.7.3.1 (page 64) de [Ti].

Références pour ce chapitre :

[Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013 (§I.3.3 et Chap. II), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand

[Po] Patrick Polo, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2014-2015 (II §12.3), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo

[Ti] Claude Tisseron, Géométries affine, projective et euclidienne, Hermann, 1988.

INDEX

TABLE DES MATIÈRES