Université Pierre et Marie Curie
Master de Sciences et Technologies
Mention Mathématiques, M1
Année 2014–2015

4M001
ALGÈBRE GÉOMÉTRIQUE
Partie I : semaines 1 à 6

Patrick Polo

Patrick Polo
Université P. & M. Curie
Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR 7586 du CNRS)
URL : http://webusers.imj-prg.fr/~patrick.polo
E-mél : patrick.polo@upmc.fr

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

SEMAINE 1 : ESPACES AFFINES

Références pour ce chapitre :

[Du] Antoine Ducros, Géométrie affine et euclidienne, Cours de L3 à l'UPMC 2009-2012 (sections 1 et 2), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~antoine.ducros

[It] Ilia Itenberg, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2013-2014 (chap. 1), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~ilia.itenberg

[Po] Patrick Polo, Algèbre et géométrie, Cours de L2 à l'UPMC 2009-2013 (chap. 7), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/L2

En complément du polycopié 2013-2014 d'Ilia Itenberg, on pourra aussi consulter les polycopiés faits par les enseignants précédents :

[Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013, disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand

[Ne] Jan Nekovar, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2005-2009, disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~jan.nekovar

---

Par ailleurs, pour la définition axiomatique des « plans affines arguésiens », on signale les ouvrages ci-dessous. Mais attention, ceci n'est pas facile et n'entre pas dans le cadre du cours, donc ces références sont réservées aux étudiants qui seraient vraiment intéressés par cette axiomatique.

[Ar] Emil Artin, Algèbre géométrique (Gauthier-Villars, 1978), Chap. II, §§1-7.

[LF] Jaqueline Lelong-Ferrand, Les fondements de la géométrie (P.U.F., 1985), Chap. V, §§2-8.

[Sa] Pierre Samuel, Géométrie projective (P.U.F., 1986), Chap. I, §D.

1. Définition algébrique et exemples

Définition 1.1. — Soient k un corps et E un k-espace vectoriel. Un *espace affine de direction* E est un ensemble non vide $\mathscr{E}$ muni d'une application $\phi : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E$, $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$(1) \qquad \boxed{\text{Relation de Chasles :} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}} \qquad \forall A, B, C \in \mathscr{E}.$$

(2) Pour tout $A \in \mathscr{E}$, l'application $\phi_A : \mathscr{E} \to E$, $B \mapsto \overrightarrow{AB}$ est **bijective**.

On notera $\overrightarrow{u} \mapsto A + \overrightarrow{u}$ la **bijection inverse**, c.-à-d., pour tout $A \in \mathscr{E}$ et $\overrightarrow{u} \in E$, $A + \overrightarrow{u}$ désigne l'unique $B \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

Vocabulaire : les éléments de $\mathscr{E}$ sont appelés « points », ceux de E sont appelés « vecteurs ». Si E est de dimension finie n, ce que nous supposerons par la suite, on pose $\dim \mathscr{E} = \dim E$. Si $\dim \mathscr{E} = 1$, resp. 2, on dira que $\mathscr{E}$ est une droite affine, resp. un plan affine.

Notation : pour abréger, on dira : « $(\mathscr{E}, E)$ est un espace affine ».

Remarque 1.2. — Appliquant la relation de Chasles d'abord à $A = B = C$, on obtient $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA}$ d'où $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ pour tout A ; en l'appliquant ensuite à A, B arbitraires et $C = A$, on obtient $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Remarque 1.3. — Si l'on sait que la relation de Chasles est vérifiée alors, pour montrer (2), il suffit de montrer qu'il existe $A_0 \in \mathscr{E}$ tel que ϕ_{A_0} est bijective. En effet, supposons que ce soit le cas et soit A un autre point, arbitraire mais fixé. Alors, pour B variant dans $\mathscr{E}$, on a $\phi_A(B) = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_0B} - \overrightarrow{A_0A} = \phi_{A_0}(B) - u_0$, où l'on a noté u_0 le vecteur $\overrightarrow{A_0A}$. Ceci montre que $\phi_A : \mathscr{E} \to E$ est la composée de ϕ_{A_0} et de l'application $E \to E$, $u \mapsto u - u_0$. Or cette dernière est bijective, car elle admet comme réciproque l'application $E \to E$, $v \mapsto v + u_0$. Comme on a supposé ϕ_{A_0} bijective, il en résulte que ϕ_A l'est aussi.

Exemples 1.4. — Soit E un k-espace vectoriel.

(a) D'abord, E lui-même est un espace affine $\mathscr{E}$ de direction E : on définit $\phi = \phi^{\mathscr{E}} : E \times E \to E$ par $(x, y) \mapsto y - x$. Alors (1) est vérifiée car $\phi(x, z) = z - x = (z - y) + (y - x) = \phi(x, y) + \phi(y, z)$ et (2) est vérifiée car pour tout x fixé dans E, l'application $y \mapsto y - x$ est une bijection de E sur lui-même dont la réciproque est l'application $u \mapsto u + x$.

(b) Fixons $x_0 \in E$ et un sous-espace vectoriel F de E. Alors l'ensemble

$$\mathscr{F} = x_0 + F = \{x_0 + u \mid u \in F\}$$

est un espace affine, de direction F. En effet, $\mathscr{F}$ est non vide car il contient x_0. Notons $\psi = \phi^{\mathscr{F}}$ la restriction à $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ de l'application $\phi^{\mathscr{E}}$ précédente, i.e. $\psi : \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to E$, $(x, y) \mapsto y - x$. Alors, ψ vérifie (1). De plus, elle est à valeurs dans F, car si $x, y \in \mathscr{F}$ et si l'on écrit $x = x_0 + u$ et $y = x_0 + v$ avec $u, v \in F$, alors $y - x = v - u$ appartient à F. Enfin, l'application $F \to \mathscr{F}$, $u \mapsto x_0 + u$ est bien définie et c'est l'application réciproque de l'application $\psi_{x_0} : \mathscr{F} \to F$, $x \mapsto x - x_0$: celle-ci est donc bijective. Compte tenu de la remarque 1.3, ceci prouve (2).

Afin de donner plus d'exemples, et afin de répondre à une question naturelle posée en cours : « Pour vérifier qu'un $\mathscr{E}$ donné est un espace affine, comment trouver l'application ϕ ? Nous sera-t-elle donnée ? », donnons une autre définition, équivalente, de la notion d'espace affine. Commençons par la définition suivante :

Définition 1.5 **(Action d'un groupe abélien sur un ensemble)**
Soit E un groupe abélien (i.e. commutatif).

(1) On dit que E *agit* à droite sur un ensemble X si l'on s'est donné une application $X \times E \to X$, $(x, u) \mapsto x + u$, vérifiant les deux propriétés suivantes : (a) $x + 0 = x$, (b) $(x + u) + v = x + (u + v)$, pour tout $x \in X$, $u, v \in E$.

(2) On dit que l'action est *transitive* s'il existe $x_0 \in X$ tel que $x_0 + E = \{x_0 + v \mid v \in E\}$ soit égal à E tout entier. C'est alors le cas pour n'importe quel x fixé : en effet, on a $x = x_0 + u$ pour un certain u, donc $x + E$ contient $x_0 = x - u$ donc aussi $x_0 + E$, d'où $x + E = X$.

(3) On dit que l'action est *simplement transitive* s'il existe $x_0 \in X$ tel que l'application $\theta_{x_0} : E \to X$, $v \mapsto x_0 + v$ soit bijective. C'est alors le cas pour n'importe quel x fixé : en effet, il existe $u \in E$ (unique) tel que $x = x_0 + u$, d'où $\theta_x(v) = (x_0 + u) + v = x_0 + (u + v) = \theta_{x_0}(u + v)$ pour tout $v \in E$. Donc θ_x est la composée de l'application $E \to E$, $v \mapsto u + v$ et de θ_{x_0}. La première application est bijective (sa réciproque étant $w \mapsto w - u$) et par hypothèse θ_{x_0} est bijective, donc θ_x l'est aussi.

Remarque 1.6. — Soit E un groupe abélien agissant à droite sur un ensemble X et soit F un sous-groupe de E. Alors on peut « restreindre » l'action à F, i.e. considérer l'application $X \times F \to X$, $(x, u) \mapsto x + u$: elle vérifie évidemment les propriétés voulues. De plus, si l'action de E est simplement transitive, alors pour tout $x \in X$ l'application $\theta_x^F : F \to X$, $u \mapsto x + u$ est *injective*.

Proposition 1.7. — *Soient E un k-espace vectoriel et $\mathscr{E}$ un ensemble non vide. Alors $\mathscr{E}$ est un espace affine de direction E si et seulement si $\mathscr{E}$ est muni d'une action simplement transitive de E (ce dernier étant considéré juste comme groupe abélien).*

Démonstration. — Supposons que $(\mathscr{E}, E)$ soit un espace affine au sens de la définition 1.1. Alors, pour tout $A \in \mathscr{E}$ et $u, v \in E$, $A + u$ désigne l'unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = u$ (en particulier $A + 0 = A$), et $B + v$ désigne l'unique point C tel que $\overrightarrow{BC} = v$. D'autre part, on a $C = A + \overrightarrow{AC}$ et d'après la relation de Chasles on a $\overrightarrow{AC} = u + v$. On a donc $(A + u) + v = B + v = C = A + (u + v)$ et ceci, joint à l'égalité $A + 0 = A$, montre que l'application $\mathscr{E} \times E \to \mathscr{E}$, $(A, u) \mapsto A + u$, définit une action à droite de E sur $\mathscr{E}$ et d'après l'axiome (2) de 1.1, cette action est simplement transitive.

Réciproquement, supposons donnée une telle action $(A, u) \mapsto A + u$. Alors l'axiome (2) de 1.1 est vérifié et il ne reste qu'à vérifier la relation de Chasles. Soit $A, B, C \in \mathscr{E}$ et soient u, v les éléments de E (uniques) tels que $B = A + u$ et $C = B + v$. Alors $C = (A + u) + v = A + (u + v)$ et donc $\overrightarrow{AC} = u + v = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. □

Définition 1.8. — Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E. Soit $A_0 \in \mathscr{E}$ et soit F un sous-espace vectoriel (en abrégé, sev) de E. On pose

$$\mathscr{F} = A_0 + F = \{A_0 + u \mid u \in F\}.$$

Alors $\mathscr{F}$ est un espace affine de direction F. On dira que c'est un *sous-espace affine* (en abrégé, sea) de $\mathscr{E}$. (Ceci généralise l'exemple 1.4 (b).)

Démonstration. — [1] Par hypothèse, $\mathscr{E}$ est muni d'une action à droite de E, donc a fortiori de F, d'après la remarque 1.6. Cette action laisse stable $\mathscr{F}$, donc induit une action de F sur $\mathscr{F}$, donnée par $(A, u) \mapsto A + u$. Comme l'application $\theta_{A_0} : E \to \mathscr{E}$, $v \mapsto A_0 + v$ est bijective, alors l'application $\theta^F_{A_0} : F \to \mathscr{F}$, $u \mapsto A_0 + u$ est injective, et elle est surjective d'après la définition de $\mathscr{F} = A_0 + F$. Donc $\theta^F_{A_0}$ est bijective. Ceci prouve que $\mathscr{F}$ est un espace affine de direction F. □

***Exemples 1.9* (suite).** — (c) Considérons une matrice $A \in M_{p,n}(k)$, un vecteur fixé $Y \in k^p$ et le système linéaire d'inconnue $X \in k^n$ donné par $AX = Y$ (c'est un système linéaire de p équations à n inconnues, avec second membre Y). Si l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de ce système est *non vide*, alors $\mathscr{S}$ est un espace affine de direction le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(A)$ de k^n (= l'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$). En effet, si X_0 est une solution arbitraire, on sait que $\mathscr{S} = X_0 + \mathrm{Ker}(A)$.

(d) Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $t \mapsto Y(t)$ une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞. Considérons l'équation différentielle linéaire : $(*)$ $X'(t) - AX(t) = Y(t)$ et l'équation homogène associée $U'(t) - AU(t) = 0$. D'après la théorie des équations différentielles linéaires, l'ensemble F des solutions de l'équation homogène est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension n) de l'espace vectoriel E des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞, et l'ensemble $\mathscr{F}$ des solutions de $(*)$ est non vide et si l'on fixe (arbitrairement) un élément $X_0 \in \mathscr{F}$ alors l'application $\mathscr{F} = X_0 + F$. Donc $\mathscr{F}$ est un espace affine de direction F.

(e) Plus généralement, soient E, V des k-espaces vectoriels, $f : E \to V$ une application linéaire et v un élément de V appartenant à $\mathrm{Im}(f)$. Alors

$$\mathscr{F} = f^{-1}(v) = \{x \in E \mid f(x) = v\}$$

est un espace affine de direction $F = \mathrm{Ker}(f)$. En effet, $\mathscr{F}$ est non vide par hypothèse, puisque $v \in \mathrm{Im}(f)$. Si $x, y \in \mathscr{F}$, alors $f(x) = v = f(y)$ donc $f(y - x) = 0$ i.e. $y - x \in \mathrm{Ker}(f) = F$. Donc l'application $\phi : \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to F$, $(x, y) \mapsto y - x$ est bien définie et vérifie la relation de Chasles (c'est clair !). De plus, pour $x \in \mathscr{F}$ fixé, l'application $\phi_x : \mathscr{F} \to F$, $y \mapsto y - x$ est une bijection dont la bijection réciproque est

[1] On pourrait reprendre, en la généralisant, la démonstration de 1.4 (b), mais il est plus intéressant d'utiliser la nouvelle définition en termes d'actions.

l'application $F \to \mathscr{F}$, $u \mapsto u + x$. Noter que les exemples (c) et (d) sont des *cas particuliers* de ceci : dans (c), on prend pour f l'application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ définie par $X \mapsto AX$, et l'hypothèse que le système a des solutions équivaut à dire que $Y \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(A)$. Dans (d), on prend $E = V =$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ et f l'endomorphisme de E défini par $f(X) = X' - AX$. D'après la théorie des équations différentielles, pour tout $Y \in E$ l'ensemble des X tels que $f(X) = Y$ est non vide ; c'est donc un espace affine de direction $\mathrm{Ker}(f) =$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

(f) Autre formulation de (c), où l'on voit (enfin !) apparaître la géométrie : soient $f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur k^n et $c_1, \dots, c_p \in k$. On suppose que le sous-ensemble

$$\mathscr{F} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n \mid f_1(x) = c_1, \dots, f_p(x) = c_p\}$$

est *non vide*. Alors c'est un espace affine de direction le sous-espace vectoriel de k^n suivant :

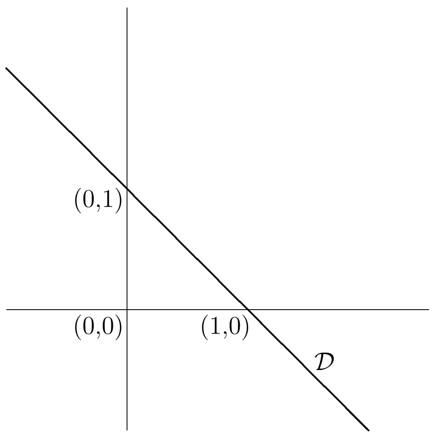
$$F = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n \mid f_1(x) = 0, \dots, f_p(x) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(f_i).$$

En effet, si pour $i = 1, \dots, p$ on écrit $f_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$ et qu'on forme la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}}$ alors $\mathscr{F}$ n'est autre que l'ensemble des solutions $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ du système $AX = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$.

(g) En particulier, prenons $k = \mathbb{R}$ et f la forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Alors

$$\mathscr{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1\}$$

est une droite affine de direction la droite vectorielle D d'équation $x_1 + x_2 = 0$; celle-ci est engendrée, par exemple, par le vecteur $u = (1, -1)$ et l'on a $\mathscr{D} = (0, 1) + \mathbb{R}u = (0, 1) + \mathbb{R}u$:



2. Approche « historique » de la droite et du plan affines réels

Dans toute cette section, le corps de base est le corps $\mathbb{R}$ des réels. Historiquement, les notions de droite affine, de plan affine et d'espace affine ont été introduites dans l'Antiquité grecque, sur des bases axiomatiques suggérées par l'observation physique du monde dans lequel nous vivons. On peut donc dire que la notion d'espace affine réel (de dimension 2 ou 3) est l'objet premier de la géométrie, à partir duquel a été distillée (après l'introduction des coordonnées par Descartes en 1637) la notion d'espace vectoriel.

Celle-ci, plus maniable, est maintenant prise comme point de départ de sorte qu'on définit maintenant un espace affine $\mathscr{E}$ comme un « espace principal homogène » sous l'action d'un espace vectoriel E (ce sont les définitions équivalentes 1.1 et 1.7). Au prime abord, cette définition peut sembler rébarbative, donc il peut-être utile de reprendre le processus qui conduit de la notion intuitive de droite ou de plan affine sur $\mathbb{R}$ à celle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1 ou 2. La présentation « intuitive » donnée en cours le 9/9/2014 n'ayant pas été tout-à-fait satisfaisante, on complétera cette section dans le futur...

3. Applications affines

Définition 3.1. — Soient $(\mathscr{E}, E)$ et $(\mathscr{E}', E')$ deux espaces affines. Une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est *affine* s'il existe une application linéaire $\phi : E \to E'$ telle que, pour tout $A, B \in \mathscr{E}$ on ait :

$$(*) \qquad \boxed{\overrightarrow{f(A)f(B)} = \phi(\overrightarrow{AB})} \quad \text{ce qui s'écrit aussi :} \ \boxed{f(B) = f(A) + \phi(\overrightarrow{AB}).}$$

Dans ce cas, ϕ est *unique* car si on fixe $A_0 \in \mathscr{E}$ alors pour tout $u \in E$, posant $A_u = A_0 + u$, on doit avoir $\phi(u) = \overrightarrow{f(A_0)f(A_u)}$. On dit alors que ϕ est la **partie linéaire** de f et on la note $\overrightarrow{f}$. La condition $(*)$ se récrit alors :

$$(**) \qquad \boxed{\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})} \quad \text{et} \quad \boxed{f(B) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}).}$$

Remarque 3.2. — Pour montrer qu'une application f est affine, il suffit de vérifier la condition $(*)$ pour un A_0 fixé (et B arbitraire). En effet, supposons que pour un certain A_0 fixé, l'application $\phi : E \to E'$ définie par $\phi(\overrightarrow{A_0B}) = \overrightarrow{f(A_0)f(B)}$ soit linéaire. Alors, pour tout A, B on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f(A)f(B)} &= \overrightarrow{f(A_0)f(B)} - \overrightarrow{f(A_0)f(A)} \quad \text{(d'après la relation de Chasles dans } \mathscr{E}'\text{)} \\
&= \phi(\overrightarrow{A_0B}) - \phi(\overrightarrow{AB}) \qquad \text{(par définition de } \phi\text{)} \\
&= \phi(\overrightarrow{A_0B} - \overrightarrow{AB}) \quad \text{(d'après l'hypothèse que } \phi \text{ est linéaire)} \\
&= \phi(\overrightarrow{AB}) \qquad \text{(d'après la relation de Chasles dans } \mathscr{E}\text{)}.
\end{aligned}$$

Proposition 3.3. — *Soient $(\mathscr{E}, E)$, $(\mathscr{E}', E')$, $(\mathscr{E}'', E'')$ trois espaces affines, $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ et $g : \mathscr{E}' \to \mathscr{E}''$ des applications affines. Alors l'application $g \circ f$ est affine, de partie linéaire $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.*

Démonstration. — Soient $A, B \in \mathscr{E}$, posons $A' = f(A)$ et $A'' = g(A') = (g \circ f)(A)$ et définissons de même B' et B''. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A''B''} &= \overrightarrow{g}(\overrightarrow{A'B'}) \qquad \text{(car } g \text{ est affine)} \\
&= \overrightarrow{g}\big(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})\big) \quad \text{(car } f \text{ est affine)} \\
&= (\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f})(\overrightarrow{AB}).
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $g \circ f$ est affine, de partie linéaire égale à $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$. □

Notation. — D'après la proposition précédente, les applications affines bijectives de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ forment un groupe, appelé *groupe affine* de $\mathscr{E}$ et noté $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$. La proposition précédente entraîne de plus le :

Corollaire 3.3 bis. — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine. L'application $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) \to \mathrm{GL}(E)$, $f \mapsto \overrightarrow{f}$ est un morphisme de groupes.*

Donnons ci-dessous des exemples d'applications affines $\mathscr{E} \to \mathscr{E}$.

***Définition 3.4* (Translations).** — Pour tout $u \in E$, on note t_u la « translation de vecteur u », définie par $t_u(A) = A + u$ pour tout $A \in \mathscr{E}$. Posant $A' = t_u(A)$ et $B' = t_u(B)$, on a $\overrightarrow{AA'} = u = \overrightarrow{BB'}$ et donc :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = -u + \overrightarrow{AB} + u = \overrightarrow{AB}.$$

Ceci prouve que t_u est affine, de partie vectorielle id_E, l'application identique de E. Par ailleurs, on notera que la translation de vecteur nul t_0 est $\mathrm{id}_{\mathscr{E}}$, l'application identique de $\mathscr{E}$.

Exercice 3.5. — Réciproquement, montrer que si $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est affine et vérifie $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$ alors $f = t_u$ pour un certain $u \in E$.

Proposition 3.6. — *Pour tout $u, v \in \mathscr{E}$, on a $\boxed{t_v \circ t_u = t_{u+v} = t_u \circ t_v}$. Par conséquent, l'ensemble T des translations forme un groupe commutatif (isomorphe à E) : l'élément neutre est $t_0 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ et l'inverse de t_u est t_{-u}.*

Démonstration. — Soit $A \in \mathscr{E}$, posons $B = t_u(A)$ et $C = t_v(B) = (t_v \circ t_u)(A)$. Alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = u + v$ d'où l'égalité $t_{u+v}(A) = C = (t_v \circ t_u)(A)$. Ceci prouve que $t_v \circ t_u = t_{u+v}$, et comme $u + v = v + u$, ceci égale aussi $t_u \circ t_v$. Il est clair que $t_0 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ est élément neutre, et l'égalité $t_u \circ t_{-u} = t_0$ montre que t_{-u} est l'inverse de t_u (ce qui est aussi évident géométriquement).

L'application $E \to T$, $u \mapsto t_u$ est donc un morphisme de groupes, surjectif par définition. Il est injectif car si $t_u = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ alors $u = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. Donc c'est un isomorphisme de E, considéré comme groupe abélien, sur le groupe des translations. □

***Définition 3.7* (Homothéties).** — Soit $\lambda \in k^\times = k - \{0\}$. Pour A fixé dans $\mathscr{E}$, on note $h = h(A, \lambda)$ l'application qui à tout M de $\mathscr{E}$ associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$. Remarquons que :

a) Pour $M = A$, on a $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{0}$ d'où $h(A) = A$, donc A est un *point fixe* de h.

b) Pour tout M, on a donc : $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$. Ceci montre que h est affine, de partie linéaire l'homothétie vectorielle $h_\lambda = \lambda\,\mathrm{id}_E$ (définie par $h_\lambda(u) = \lambda u$ pour tout $u \in E$).

c) Si $\lambda = 1$ alors h est l'application identique $\mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ de $\mathscr{E}$.

d) Si $\lambda \neq 1$ alors A est l'unique point fixe de h. En effet si $M = h(M)$ alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{Ah(M)} = \lambda\overrightarrow{AM}$ d'où $(1 - \lambda)\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$ et si $\lambda \neq 1$ ceci entraîne $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$ d'où $M = A$. Donc, si $\lambda \neq 1$, on dira que $h(A, \lambda)$ est « *l'homothétie de rapport λ et de centre A* ».

e) On voit facilement que $h(A, \lambda) \circ h(A, \mu) = h(A, \lambda\mu)$ donc les homothéties de centre A forment un groupe isomorphe au groupe multiplicatif $k^\times$.

Proposition 3.8. — *Soit $h : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine telle que $\overrightarrow{h} = \lambda\,\mathrm{id}_E$ avec $\lambda \neq 1$. Alors h possède un unique point fixe A, et si $\lambda \neq 0$ alors $h = h(A, \lambda)$.*

Démonstration. — Fixons un point $O \in \mathscr{E}$. Alors, un point $A \in \mathscr{E}$ arbitraire vérifie $h(A) = A$ si et seulement si l'on a $\overrightarrow{Oh(A)} = \overrightarrow{OA}$. Or on a

$$\overrightarrow{Oh(A)} = \overrightarrow{Oh(O)} + \overrightarrow{h(O)h(A)} = \overrightarrow{Oh(O)} + \overrightarrow{h}(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{Oh(O)} + \lambda\overrightarrow{OA}$$

donc on voit que $h(A) = A$ équivaut à $(1-\lambda)\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{Oh(O)}$ et comme $\lambda \neq 1$ ceci détermine A de façon unique, i.e. on a $\overrightarrow{OA} = (1 - \lambda)^{-1}\,\overrightarrow{Oh(O)}$.

Alors, pour tout $M \in \mathscr{E}$, on a $\overrightarrow{Ah(M)} = \overrightarrow{h(A)h(M)} = \lambda\overrightarrow{AM}$ donc, si $\lambda \neq 0$ alors h est bien l'homothétie $h(A, \lambda)$ de centre A et de rapport λ. (Si $\lambda = 0$ alors $\overrightarrow{Ah(M)} = \overrightarrow{0}$ donc $h(M) = A$ pour tout M i.e. h est l'application « constante » qui envoie tout M sur A). □

Exercice 3.9. — Soient $A, B \in \mathscr{E}$ et $\lambda, \mu \in k^\times$. Montrer que :

$$h(A,\lambda)\circ h(B,\mu) = \begin{cases} \text{une translation (à déterminer), si } \lambda\mu = 1, \\ h(C,\lambda\mu) \text{pour un point } C \text{ à déterminer, si } \lambda\mu \neq 1. \end{cases}$$

En utilisant le résultat de l'exercice précédent, on peut démontrer le

Théorème 3.10. — (a) *L'ensemble G des translations et des homothéties forme un groupe (non commutatif), appelé le groupes des homothéties et translations.*

(b) *Pour tout $A \in \mathscr{E}$, $\lambda \in k^\times$ et $u \in E$ on a :* $\boxed{h(A,\lambda)\circ t_u \circ h(A,\lambda)^{-1} = t_{\lambda u}.}$ *Par conséquent, le groupe T des translations est un sous-groupe* distingué *de G.*[(2)]

Avant d'introduire les projections et symétries, démontrons la proposition suivante.

Proposition 3.11. — *Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, $P, Q \in \mathscr{E}$, F, G deux sev de E. On considère les deux sous-espaces affines $\mathscr{F} = P + F$ et $\mathscr{G} = Q + G$.*

a) *Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est non vide, c'est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.*
b) *Ceci est le cas ssi $\overrightarrow{PQ}$ appartient au sev $F + G$.*
c) *Par conséquent, si $F \oplus G = E$ alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un singleton $\{I\}$.*

Démonstration. — (a) Supposons que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ contienne un point R. Pour un point $M \in \mathscr{E}$ arbitraire, on a les équivalences : $M \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G} \Leftrightarrow (M \in \mathscr{F}$ et $M \in \mathscr{G}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{RM} \in F$ et $\overrightarrow{RM} \in G) \Leftrightarrow \overrightarrow{RM} \in F \cap G \Leftrightarrow M \in R + (F \cap G)$. Ceci montre que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = R + (F \cap G)$.

(b) $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est non vide ssi il existe $u \in F$ et $v \in G$ tels que $P + u = R = Q + v$, ce qui équivaut à $Q = P + u - v$ ou encore à $\overrightarrow{PQ} = u - v$. Ceci équivaut à dire que $\overrightarrow{PQ}$ appartient au sous-espace vectoriel $F + G = \{u + w \mid u \in F, w \in G\} = \{u - v \mid u \in F, v \in G\}$.

(c) Supposons que $F + G = E$. Alors $\overrightarrow{PQ}$ appartient à $F + G$ donc, d'après (b) et (a), $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un sous-espace affine $R + (F \cap G)$ de direction $(F \cap G)$. Si de plus F et G sont en somme directe, c.-à-d. si $F \cap G = \{0\}$ alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est le singleton $\{R\}$. (Noter ceci : pour tout point $I \in \mathscr{E}$, le sous-espace affine de direction $\{0\}$ passant par I est le singleton $\{I\}$.) $\square$

Définition et proposition 3.12 **(Projections et symétries)**

Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, F, G deux sev de E qui sont supplémentaires, et $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction F.

(i) *Pour tout $M \in \mathscr{E}$, il existe un unique point $p(M) \in \mathscr{F}$ tel que $\overrightarrow{Mp(M)} \in G$. L'application $p : M \mapsto p(M)$ est* affine, *de partie linéaire la projection π de E sur F de noyau G. On dit que p est la* projection de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{F}$ de direction G. [(3)]

(ii) *Supposons* $\operatorname{car}(k) \neq 2$. *Alors, pour tout $M \in \mathscr{E}$, on pose $s(M) = M + 2\overrightarrow{Mp(M)}$. L'application $s : M \mapsto s(M)$ est* affine, *de partie linéaire la symétrie par rapport à F de direction G. On dit que s est la* symétrie par rapport à $\mathscr{F}$ de direction G. [(3)]

Démonstration. — (i) Comme $F \oplus G = E$, les sous-espaces affines $\mathscr{F}$ et $M + G$ se coupent en un unique point, qu'on note $p(M)$. Pour tout point P, le vecteur $\overrightarrow{MP}$ s'écrit de façon unique $\overrightarrow{MP} = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$, et l'on a $u = \pi(\overrightarrow{MP})$. On a :

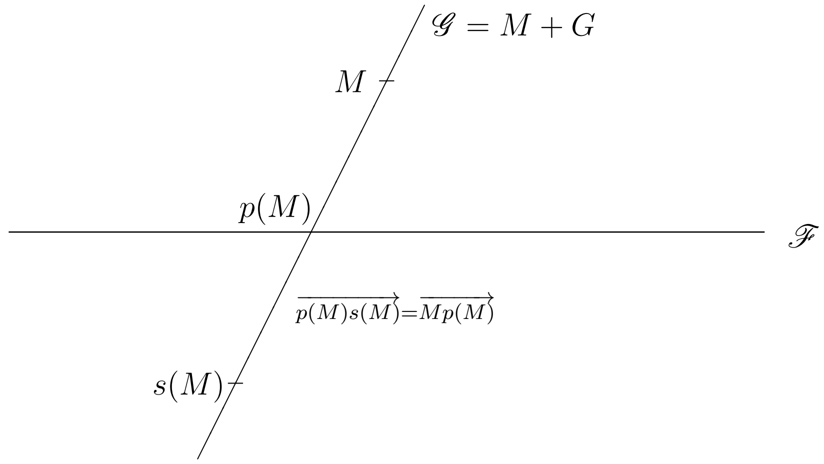
$$P = p(M) + \overrightarrow{p(M)M} + \overrightarrow{MP} = p(M) + \overrightarrow{p(M)M} + u + v$$

[(2)] Un sous-groupe H d'un groupe G est *distingué* si pour tout $h \in H$ et tout $g \in G$, on a $ghg^{-1} \in H$. Ceci s'écrit aussi : pour tout $g \in G$, on a $gHg^{-1} \subset H$. (Appliquant ceci à g^{-1} on a aussi $g^{-1}Hg \subset H$ d'où $H = g(g^{-1}Hg)g^{-1} \subset gHg^{-1}$, donc la condition s'écrit aussi : pour tout $g \in G$, on a $gHg^{-1} = H$.)

[(3)] On dit aussi : « *parallèlement à G* ».

et comme $\overrightarrow{p(M)M} \in G$ alors $v' = \overrightarrow{p(M)M} + v$ appartient à G. D'autre part, le point $P' = p(M) + u$ appartient à $\mathscr{F}$. Alors l'égalité $P = P' + v'$ entraîne que $P' = p(P)$, d'où $p(P) = p(M) + u = p(M) + \pi(\overrightarrow{MP})$. Ceci montre que p est affine, de partie linéaire π.

La démonstration de (ii) est laissée au lecteur. (On n'en a pas besoin pour le moment.) $\square$



Projection p sur $\mathscr{F}$ et symétrie s par rapport à $\mathscr{F}$, de direction G.

CHAPITRE 2

SEMAINE 2 : COORDONNÉES BARYCENTRIQUES, PLONGEMENT VECTORIEL CANONIQUE, THÉORÈMES DE MÉNÉLAÜS ET DE CÉVA

Références pour ce chapitre : (a) Pour les barycentres et coordonnées barycentriques :

[Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013 (§I.2), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand

[Du] Antoine Ducros, Géométrie affine et euclidienne, Cours de L3 à l'UPMC 2009-2012 (section 3), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~antoine.ducros

[It] Ilia Itenberg, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2013-2014 (§1.5), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~ilia.itenberg

[LF] Jaqueline Lelong-Ferrand, Les fondements de la géométrie (P.U.F., 1985), §III.4.

[Po] Patrick Polo, Algèbre et géométrie, Cours de L2 à l'UPMC 2009-2013 (chap. 7), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/L2

(b) Pour le plongement vectoriel canonique : [Be, p.9], [It, pp.21-22], [LF, §III.6]. Pour les théorèmes de Ménélaüs et Céva : [Be, §I.2.3] et [LF, §IV.9].

4. Barycentres et coordonnées barycentriques

On fixe un k-espace vectoriel E et un espace affine $\mathscr{E}$ de direction E.

Définition et proposition 4.1. — *Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$.*

(1) *On suppose $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Alors il existe un unique point $G \in \mathscr{E}$ tel que,* **pour tout** *$O \in \mathscr{E}$, on ait* $\boxed{\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.}$ [1] *Ce point G est appelé «* barycentre des points pondérés *(A_i, λ_i) » et on écrira : $G = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n$.*

(1′) *Plus généralement, si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$, il existe un unique point $G \in \mathscr{E}$ tel que,* **pour tout** *$O \in \mathscr{E}$, on ait $(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$.*

(2) *Au contraire, si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$ alors le vecteur $\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ est* **indépendant** *du choix de O. On pourra écrira que $\overrightarrow{u} = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n$.*

Démonstration. — (1) Fixons un point $O \in \mathscr{E}$ et définissons G par l'égalité $\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$. Alors, pour tout point O' on a, d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{O'A_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}) = (\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i}_{=1})\overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{O'G}.$$

(1) Plus précisément, la démonstration montre que si on fixe O arbitraire et qu'on *définit* G par l'égalité précédente, alors on a $\overrightarrow{O'G} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{O'A_i}$ pour tout point O'.

Ceci montre que $\overrightarrow{O'G} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{O'A_i}$ pour **tout** $O' \in \mathscr{E}$, et G est bien sûr unique, car cette égalité pour **un** O' fixé suffit à déterminer G. [(2)]

(1′) Posons $\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Alors on voit que (1′) se ramène au cas (1) en remplaçant chaque λ_i par $\lambda_i' = \lambda_i/\Sigma$, donc $G = \lambda_1' A_1 + \cdots + \lambda_n' A_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{\Sigma} A_i$ et l'on peut écrire, par abus de notation, que $G = \dfrac{1}{\Sigma}(\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n)$.

(2) Fixons un point $O \in \mathscr{E}$ et posons $\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$. Alors, pour tout point O' on a, d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{O'A_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}) = \underbrace{(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)}_{=0} \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{u}.$$

Ceci montre que $\overrightarrow{u}$ est indépendant du choix de O. □

Remarque 4.2. — Si k est un corps *de caractéristique nulle*, par exemple si $k = \mathbb{R}$, alors on peut prendre $\lambda_i = 1/n$ pour $i = 1, \dots, n$. Dans ce cas, G s'appelle *l'isobarycentre* ou *centre de gravité* des points $A_1, \dots, A_n$.

Par exemple, soient A, B, C trois points non alignés du plan affine **réel** et soit G leur isobarycentre, i.e. le centre de gravité du triangle ABC ; on a donc :

$$(*) \qquad 0 = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

D'autre part, notons A' le milieu du segment $[B, C]$ et définissons de même B' et C'. Alors A' est l'isobarycentre de B et C donc pour tout point P on a $2\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$. Appliquant ceci à $P = G$, on déduit de $(*)$ que :

$$-\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}.$$

Ceci montre que le point G appartient au segment $[AA']$ et que le vecteur $\overrightarrow{GA}$ est deux fois plus long (et de sens contraire) que le vecteur $\overrightarrow{GA'}$. On a le même résultat pour $[BB']$ et $[CC']$. Ceci montre que les médianes du triangle, i.e. les droites (AA'), (BB') et (CC'), sont concourantes et que G est situé sur chaque segment $[AA']$, etc. aux deux-tiers de la longueur, en partant du sommet.

Remarque 4.3. — Dans la remarque précédente, l'hypothèse que la caractéristique de k soit nulle (en tout cas, distincte de 2 et 3) est essentielle. En effet, si $\mathrm{car}(k) = 2$, le milieu d'un segment $[A, B]$ n'existe pas si $A \neq B$: il n'existe aucun point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$ car comme $1 + 1 = 0$, le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ est indépendant du point M et égal à $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$.

Si $\mathrm{car}(k) = 3$, les milieux A', B', C' existent, mais on peut montrer que les médianes (AA'), (BB') et (CC') ne sont pas concourantes ; en fait elles sont parallèles ! (cf. [Du, 3.8]). En effet, on peut prendre le point A comme origine et les vecteurs $e_1 = \overrightarrow{AB}$ et $e_2 = \overrightarrow{AC}$ comme base de E (supposé de dimension 2), de sorte que B et C ont pour coordonnées $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Alors C' a pour coordonnées $(1/2, 0)$ et ceci égale $(2, 0)$ puisque $2^2 \equiv 1$ mod. 3. De même, B' et A' ont pour coordonnées $(0, 2)$ et $(2, 2)$. Tenant compte de l'égalité $-1 \equiv 2$ mod. 3, on a donc :

$$\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Définition et proposition 4.4. — *Soient E un k-espace vectoriel, $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E, $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathscr{E}$. On note F le sev de E engendré par les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$.*

[(2)] Par exemple, on peut dire que G est l'unique point tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.

a) *L'ensemble* $\mathscr{F}$ *de tous les barycentres* $M = \lambda_0 A_0 + \cdots + \lambda_n A_n$, *où* $\lambda_i \in k$ *et* $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ *est le sous-espace affine* $A_0 + F$ *de* $\mathscr{E}$. *Il contient tous les* A_i *(donc* $\mathscr{F} = A_i + F$ *pour tout* i*).*

b) *C'est* le plus petit *sous-espace affine de* $\mathscr{E}$ *contenant les* A_i *; on dira que c'est le sous-espace affine* engendré *par les* A_i *et on le notera* $\mathrm{Aff}\langle A_0, \ldots, A_n\rangle$.

Démonstration. — (a) Si $M = \lambda_0 A_0 + \cdots + \lambda_n A_n$ et $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, alors $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_0A_i}$ appartient à F, donc $M \in A_0 + F$. Réciproquement, si $M \in A_0 + F$ alors $\overrightarrow{A_0M} \in F$ donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ tels que $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$ et, par définition du barycentre, ceci équivaut à l'égalité $M = \lambda_0 A_0 + \cdots + \lambda_n A_n$, où l'on a posé $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Ceci prouve que $\mathscr{F} = A_0 + F$. C'est donc un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, et il contient chaque A_i puisque $\overrightarrow{A_0A_i} \in F$.

(b) Soit $\mathscr{F}'$ un sea contenant tous les A_i, alors $\mathscr{F}' = A_0 + F'$ pour un certain sev F' de E. Comme $A_i \in \mathscr{F}'$ alors F' contient chaque $\overrightarrow{A_0A_i}$ donc contient F, et donc $\mathscr{F}'$ contient $\mathscr{F}$. Ceci montre que $\mathscr{F}$ est le plus petit sea contenant les A_i. □

Remarque 4.5. — Dans la proposition, on a fait jouer un rôle particulier à A_0 pour définir le sev $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_j} \mid j = 0, \ldots, n)$, mais si l'on fixe $i \neq 0$, on a $\overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{A_0A_j} - \overrightarrow{A_0A_i}$ pour tout j, donc $F_i = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_iA_j} \mid j = 0, \ldots, n)$ est contenu dans F et par symétrie on a aussi $F \subset F_i$, d'où $F_i = F$.

Rappel 4.6. — Si $(\mathscr{F}, F)$ est un espace affine et si F est de dimension finie d, on dit que $\mathscr{F}$ est de dimension d.

Définition 4.7 **(Points affinement indépendants ou liés)**

Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que $(p+1)$ points $A_0, \ldots, A_p \in \mathscr{E}$ sont **affinement indépendants** si $\mathrm{Aff}\langle A_0, \ldots, A_p\rangle$ est de dimension p, c.-à-d., si le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_j} \mid j = 1, \ldots, p)$ est de dimension p. Dans le cas contraire, on dit que $A_0, \ldots, A_p \in \mathscr{E}$ sont **affinement liés**.

Si $p = 2$, les trois points A_0, A_1, A_2 sont affinement liés $\Longleftrightarrow$ ils sont alignés. Donc A_0, A_1, A_2 sont affinement indépendants $\Longleftrightarrow$ ils sont **non alignés**.

On dit que des points $A_0, \ldots, A_p \in \mathscr{E}$ sont **coplanaires** s'ils sont contenus dans un sea $\mathscr{P}$ de dimension 2 (un plan affine), i.e. si $\dim \mathrm{Aff}\langle A_0, \ldots, A_p\rangle \leq 2$. Donc quatre points $A_0, \ldots, A_3$ sont affinement indépendants $\Longleftrightarrow$ ils sont **non coplanaires**.

Définition et proposition 4.8 **(Repères affines et coordonnées barycentriques)**

Soit $(\mathscr{E}, E)$ *un espace affine de dimension finie* n.

a) *Un* **repère** $\mathscr{R}$ *de* $\mathscr{E}$ *est la donnée d'un* $(n+1)$*-uplet* $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *de points* affinement indépendants.

b) *Dans ce cas, pour tout* $M \in \mathscr{E}$ *il existe un* unique $(n+1)$*-uplet* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in k^{n+1}$ *tel que* $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ *et* $M = \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$. *On dit que* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ *sont les* coordonnées barycentriques *de* M *dans le repère* $\mathscr{R}$.

c) *Si l'on privilégie l'un des points, disons* A_0, *alors les* n *vecteurs* $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ *forment une base* $\mathscr{B}$ *de* E *et l'écriture (unique !) de* $\overrightarrow{A_0M}$ *dans cette base est* $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$.

Démonstration. — Dans (b), *l'existence* résulte de la Prop. 4.4 : comme $\mathrm{Aff}\langle A_0, \ldots, A_n\rangle = \mathscr{E}$ alors tout point M de $\mathscr{E}$ s'écrit comme barycentre des A_i. Mais alors, si $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ et $M = \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$, on a

$$(*) \qquad \overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$$

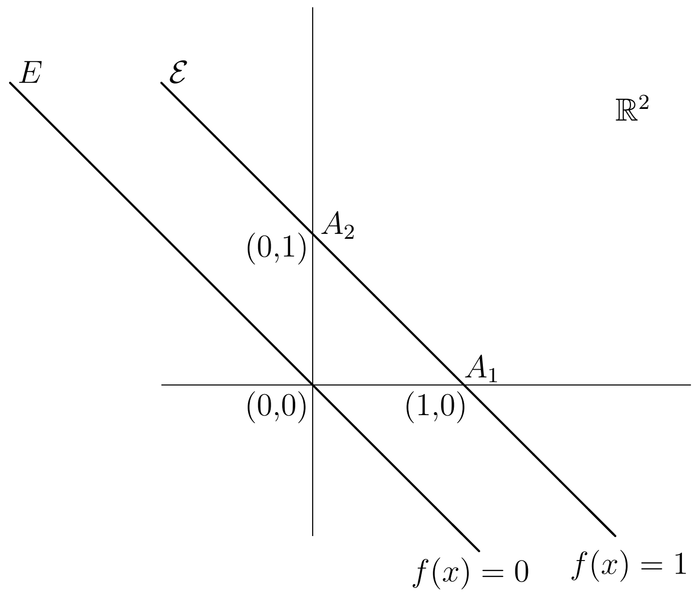
et comme, par hypothèse, les n vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ engendrent E qui est de dimension n, ils forment une base de E et donc l'écriture ci-dessus est unique. Ceci montre que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont uniquement déterminés, et λ_0 l'est aussi puisque $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Ceci prouve (c) ainsi que *l'unicité* dans (b). $\square$

Remarque 4.9. — On peut aussi définir un repère de $\mathscr{E}$ comme un couple $(O, \mathscr{B})$, où O est un point de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Dans ce cas, pour tout point M de $\mathscr{E}$, il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in k^n$ tel que $\overrightarrow{OM} = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et l'on dit que $(x_1, \dots, x_n)$ sont les *coordonnées* de M dans le repère $(O, \mathscr{B})$.

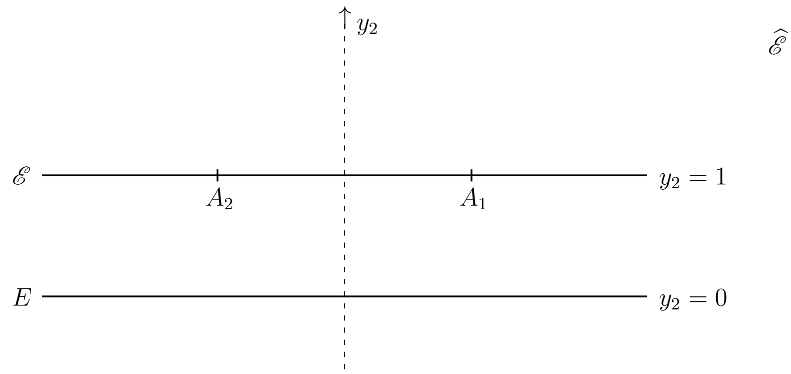
Bien entendu, le lien avec la définition précédente s'obtient en posant $A_0 = O$ et $A_i = A_0 + e_i$ pour $i = 1, \dots, n$; alors $A_0, \dots, A_n$ sont affinement indépendants et les coordonnées barycentriques dans le repère $(A_0, \dots, A_n)$ sont $(1 - S, x_1, \dots, x_n)$, où l'on a posé $S = x_1 + \cdots + x_n$.

5. Plongement vectoriel et coordonnées barycentriques

Pour illustrer ce qui suit, considérons l'exemple fondamental suivant. Soit V l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Considérons la forme linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$. Soit $E = \mathrm{Ker}(f) =$ le sev de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_1 + x_2 = 0$ et soit $\mathscr{E}$ la droite affine d'équation $x_1 + x_2 = 1$. Si l'on considère $\mathbb{R}^2$ comme « espace affine », alors $\mathscr{E}$ passe par les « points » $A_1 = e_1 = (1, 0)$ et $A_2 = e_2 = (0, 1)$, i.e. on a :



Donc $\mathscr{E}$ est l'hyperplan (ici, droite) affine de $V = \mathbb{R}^2$ défini par l'équation $f(x) = 1$, et E est l'hyperplan vectoriel $\mathrm{Ker}(f)$. Cet hyperplan n'admet pas de supplémentaire « canonique », mais pour tout $v \in V$ tel que $f(v) \neq 0$, on a $V = E \oplus \mathbb{R}v$. Par exemple, pour tout $u \in \mathscr{E}$, on a $f(u) = 1$ donc $V = E \oplus \mathbb{R}u$. Même en se limitant ainsi à $u \in \mathscr{E}$, il n'y a pas de choix « canonique » : deux choix « évidents » sont de prendre $u = e_1$ ou $u = e_2$. Toutefois, notre espace affine $\mathscr{E}$ (ici de dimension 1) est défini comme l'hyperplan $f(x) = 1$ dans l'espace vectoriel V de dimension $1 + 1 = 2$. On va voir que cette situation est générale, i.e. que tout espace affine $\mathscr{E}$ de dimension n se plonge de façon canonique dans un espace vectoriel $\widehat{\mathscr{E}}$ de dimension $n + 1$, en tant qu'hyperplan affine $\{x \in \widehat{\mathscr{E}} \mid f(x) = 1\}$ pour une certaine forme linéaire f sur $\widehat{\mathscr{E}}$. Remarquons aussi qu'en faisant le changement de coordonnées $y_1 = x_1$ et $y_2 = x_1 + x_2 = f(x)$, le dessin précédent peut aussi se représenter :



On peut maintenant énoncer et démontrer le théorème suivant :

***Théorème 5.1* (Plongement vectoriel).** — *Soit* $(\mathscr{E}, E)$ *un espace affine. Il existe un espace vectoriel* $\widehat{\mathscr{E}}$ *et une forme linéaire* ϕ *sur* $\widehat{\mathscr{E}}$*, définis de façon canonique, tels que* $\mathscr{E}$ *s'identifie à l'hyperplan affine* $\{x \in \widehat{\mathscr{E}} \mid \phi(x) = 1\}$ *et* E *à l'hyperplan vectoriel* $\operatorname{Ker}(\phi)$. (*En particulier, si* E *est de dimension finie* n*, alors* $\dim(\widehat{\mathscr{E}}) = n + 1$.)

On va donner deux démonstrations.[3] La première est une variante de celle donnée en cours le 16/9 (pour la version originale, voir [LF, §IV.6])

1ère démonstration. — Commençons par rappeler que pour tout ensemble X, l'ensemble $\mathscr{A}(X, E)$ de toutes les applications $f : X \to E$ est un k-espace vectoriel : pour $f, g : X \to E$ et $\lambda \in k$, l'application $(\lambda f + g)$ est définie par $x \mapsto \lambda f(x) + g(x)$; on vérifie facilement (exercice !) que les axiomes d'espace vectoriel sont vérifiés. Remarquons de plus que E s'identifie au sous-espace vectoriel formé des applications *constantes* de X dans E, i.e. on identifie un élément $u \in E$ avec la fonction constante $X \to E$ de valeur u.

Appliquons ceci à $X = \mathscr{E}$ et notons V le k-espace vectoriel $\mathscr{A}(\mathscr{E}, E)$. Tout point $A \in \mathscr{E}$ définit l'application $f_A : \mathscr{E} \to E$, $M \mapsto \overrightarrow{AM}$. Considérons le sous-espace vectoriel $\widehat{\mathscr{E}}$ de V engendré par ces applications. Remarquons d'abord que $\widehat{\mathscr{E}}$ contient E, identifié aux applications constantes de $\mathscr{E}$ dans E.

En effet, fixons $A_0 \in \mathscr{E}$. Pour tout $u \in E$, notons A_u l'unique point de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{A_0A_u} = u$, alors pour tout $M \in \mathscr{E}$ on a : $f_{A_0}(M) - f_{A_u}(M) = \overrightarrow{A_0M} - \overrightarrow{A_uM} = \overrightarrow{A_0A_u} = u$. Ceci montre $f_{A_0} - f_{A_u}$ est la fonction constante de valeur u, que par abus de notation on désigne encore par u. Ceci montre de plus que E est un *hyperplan* de $\widehat{\mathscr{E}}$, i.e. admet un supplémentaire de dimension 1. En effet, quelques soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$, on a :

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{A_i} - (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i) f_{A_0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_{A_i} - f_{A_0}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_iA_0} \in E.$$

donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{A_i}$ appartient à $k f_{A_0} + E$, ce qui montre que $\widehat{\mathscr{E}} = k f_{A_0} + E$. De plus, cette somme est directe, car $f_{A_0} \notin E$ puisque l'application $f_{A_0} : M \mapsto \overrightarrow{A_0M}$ n'est pas constante. On a donc :

$$(**) \qquad \widehat{\mathscr{E}} = E \oplus k A_0.$$

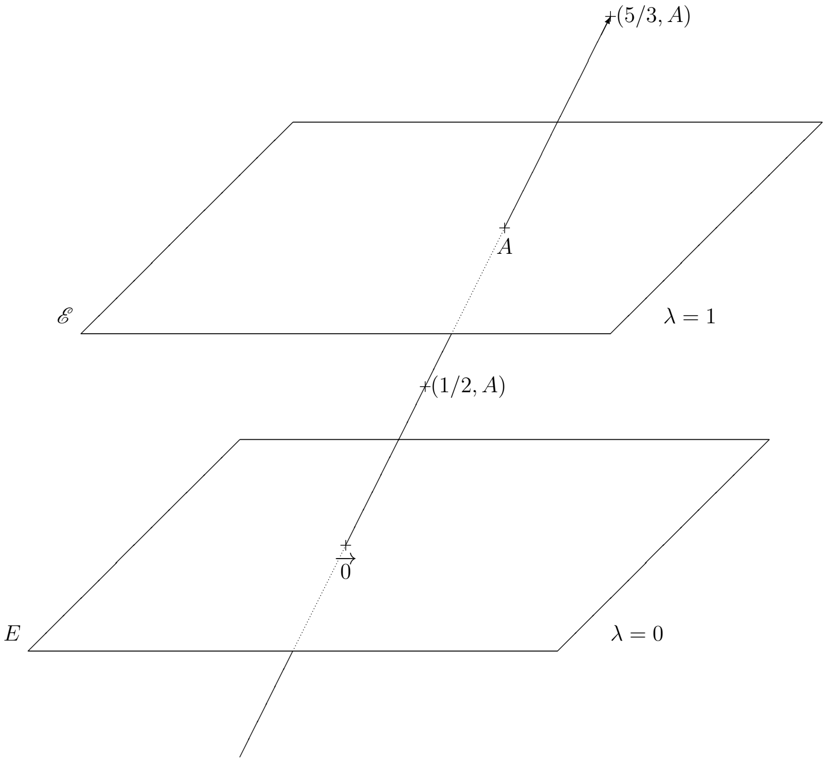
On peut alors définir une forme linéaire ϕ sur $\widehat{\mathscr{E}}$, de noyau E, en posant $\phi(x) = 0$ si $x \in E$ et $\phi(f_{A_0}) = 1$. De plus, comme pour tout $A \in \mathscr{E}$ on a $f_A = f_{A_0} - \overrightarrow{A_0A}$, on voit que l'ensemble

[3] Peu importe la démonstration. Ce qui importe est de savoir que le résultat est vrai, i.e. que tout espace affine peut être considéré comme hyperplan affine d'un espace vectoriel.

$\{f_A \mid A \in \mathscr{E}\}$ s'identifie à l'hyperplan affine $A_0 + \mathrm{Ker}(\phi) = \{w \in \widehat{\mathscr{E}} \mid \phi(w) = 1\}$. Ceci prouve le théorème. [4]

Faisons enfin la remarque générale que si E est un hyperplan d'un espace vectoriel W, défini par une forme linéaire ϕ (i.e. $E = \mathrm{Ker}(\phi)$), alors W est la réunion disjointe de E et de son complémentaire $W_\phi = \{w \in W \mid \phi(w) \neq 0\}$, et que tout $w \in W_\phi$ s'écrit *de façon unique* $w = \lambda x$, avec $\phi(x) = 1$ et $\lambda \in k$. En effet, ces conditions entraînent que $\phi(w) = \lambda$ et donc $x = \phi(w)^{-1}w$. Ceci montre que si l'on pose $\mathscr{H} = \{x \in W \mid \phi(x) = 1\}$ alors, en tant qu'ensemble, W est la réunion de E et des couples (λ, x), où $\lambda \in k^*$ et $x \in \mathscr{H}$.

Ceci permet de voir « géométriquement » $\widehat{\mathscr{E}}$ comme la réunion de E et des droites épointées $k^\times f_A = \{\lambda f_A \mid \lambda \in k^\times\} = \{(\lambda, A) \mid \lambda \in k^\times\}$ pour A parcourant $\mathscr{E}$:



□

2ème démonstration. — On peut définir $\widehat{\mathscr{E}}$, en tant qu'ensemble, comme la réunion de E et des couples (λ, A), pour $\lambda \in k^\times$ et $A \in \mathscr{E}$, et l'on identifie un point $A \in \mathscr{E}$ avec le couple $(1, A)$. La multiplication par un scalaire $\mu \neq 0$ est définie de façon évidente : $\mu \cdot (\lambda, A) = (\mu\lambda, A)$ et si $u \in E$ alors $\mu \cdot u$ est l'élément μu de E. De même, si $u, v \in E$ leur somme est l'élément $u + v$ de E. On pose $(\lambda, A) + u = (\lambda, A + \lambda^{-1}u)$ et :

$$(\lambda, A) + (\mu, B) = \begin{cases} \left(\lambda + \mu, \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}A + \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}B\right) & \text{si } \lambda + \mu \neq 0, \\ \mu\overrightarrow{AB} & \text{si } \lambda = -\mu. \end{cases}$$

On peut alors vérifier directement que les axiomes d'espace vectoriel sont vérifiés, puis que l'application ϕ définie par $\phi(u) = 0$ et $\phi\big((\lambda, A)\big) = \lambda$ est une forme linéaire de noyau E ; alors $\mathscr{E}$ s'identifie à l'hyperplan affine formé des $x \in \widehat{\mathscr{E}}$ tels que $\phi(x) = 1$. Les détails de la vérification sont laissés en exercice. □

Notation 5.2. — Soit A un point de $\mathscr{E}$, on peut aussi le considérer comme un « vecteur » de $\widehat{\mathscr{E}}$. Pour distinguer les deux notions, il est utile d'introduire la notation suivante. Rappelons qu'un espace vectoriel est de façon naturelle un espace affine (cf. 1.4 (a)), donc $\widehat{\mathscr{E}}$ peut être considéré comme un espace affine (contenant $\mathscr{E}$ comme sea) ; on note alors O le

[4] De plus, il résulte de l'égalité $(*)$ que $\phi(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{A_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

vecteur nul $\overrightarrow{0}$ de $\widehat{\mathscr{E}}$ et pour tout « point » $M \in \widehat{\mathscr{E}}$, on note $\overrightarrow{OM}$ le vecteur correspondant. Avec cette notation, on a la proposition fondamentale suivante :

Proposition 5.3. — *Soient $A_0, A_1, \ldots, A_p$ des points de $\mathscr{E}$. On a l'égalité :*

$$(\star) \qquad \dim \mathrm{Vect}(\overrightarrow{OA_0}, \ldots, \overrightarrow{OA_p}) = 1 + \dim \mathrm{Aff}\langle A_0, \ldots, A_p\rangle,$$

où le terme de gauche désigne le sev de $\widehat{\mathscr{E}}$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$.

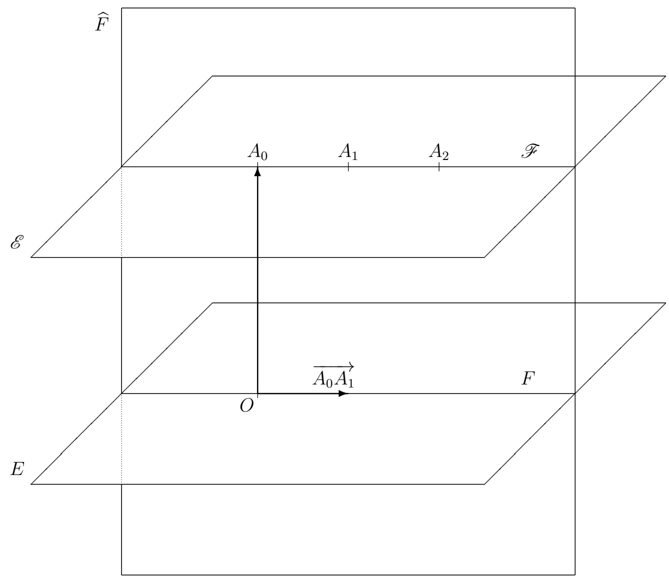
Démonstration. — Notons $\mathscr{F} = \mathrm{Aff}\langle A_0, \ldots, A_p\rangle$, sa direction est le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p})$ de E et par définition on a $\dim(\mathscr{F}) = \dim(F)$.(5)

Posons $\widehat{F} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{OA_0}, \ldots, \overrightarrow{OA_p})$. Comme $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_0A_i}$ pour tout $i \geq 1$, on a

$$\widehat{F} = k\overrightarrow{OA_0} + F$$

et comme $F \subset E$ et $\overrightarrow{OA_0} \notin E$ (car $\phi(\overrightarrow{OA_0}) = 1$), on a $\overrightarrow{OA_0} \notin F$, d'où $k\overrightarrow{OA_0} \cap F = \{0\}$ et donc la somme ci-dessus est directe : $\widehat{F} = k\overrightarrow{OA_0} \oplus F$. On a donc $\dim(\widehat{F}) = 1 + \dim(F)$. $\square$

Exemple 5.4. — Illustrons ceci lorsque $(\mathscr{E}, E)$ est un plan affine sur $\mathbb{R}$ et que les points A_0, A_1, A_2 sont distincts et alignés. Alors F est la droite vectorielle $\mathbb{R}\overrightarrow{A_0A_1} \subset E$ et, dans le dessin ci-dessous, $\widehat{F}$ est le plan « vertical » engendré par $\overrightarrow{A_0A_1}$ et $\overrightarrow{OA_0}$:



On déduit de ce qui précède la proposition suivante :

Proposition 5.5. — *Supposons $\dim(\mathscr{E}) = n$ et soit $\mathscr{R} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ un repère de $\mathscr{E}$. Alors :*

a) *Les vecteurs $\overrightarrow{OA_0}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}$ forment une base $\widehat{\mathscr{R}}$ de $\widehat{\mathscr{E}}$. Notons $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ les coordonnées dans cette base.*

b) *Un « point » M de $\widehat{\mathscr{E}}$ appartient à $\mathscr{E}$ ssi les coordonnées $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ de $\overrightarrow{OM}$ vérifient $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$.*

(5) Ceci est $\leq p$ et l'inégalité est stricte si les points A_i sont affinement liés, par exemple si $p = 2$ et si A_0, A_1, A_2 sont alignés.

c) *De plus, les coordonnées barycentriques d'un point* $M \in \mathscr{E}$ *dans le repère* $\mathscr{R}$ *sont les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *dans la base* $\widehat{\mathscr{R}}$*. On peut donc dire que :* les coordonnées barycentriques dans $\mathscr{E}$ se prolongent en des coordonnées « vectorielles » dans $\widehat{\mathscr{E}}$.

Démonstration. — Le point (a) découle de la Prop. 5.3. D'autre part, si M est un élément de $\widehat{\mathscr{E}}$, l'écriture $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ signifie, avec les notations du théorème 5.1, que $M = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_{A_i}$; comme ϕ est linéaire et vaut 1 sur chaque f_{A_i}, on a donc $\phi(M) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i$. Le point (b) en découle.

Prouvons (c). Soit $M \in \mathscr{E}$ et soient $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ ses coordonnées barycentriques dans $\mathscr{R}$. Alors pour tout $P \in \mathscr{E}$, on a $\overrightarrow{PM} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{PA_i}$ et, comme $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$, on a donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \big(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\big)\overrightarrow{OP} + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{PA_i} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA_i}) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

□

On en déduit le :

Théorème 5.6. — *Soient* $(\mathscr{E}, E)$ *un espace affine de dimension* n *et* $\mathscr{R} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *un repère de* $\mathscr{E}$*. Donnons-nous* $n+1$ *points* $B_0, \ldots, B_n$ *de* $\mathscr{E}$ *et pour* $j = 0, \ldots, n$ *notons* $(\lambda_{0j}, \ldots, \lambda_{nj})$ *les coordonnées barycentriques de* B_j *dans le repère* $\mathscr{R}$*. Alors : les points* $B_0, \ldots, B_n$ *sont affinement liés ssi le déterminant de la matrice* $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j=0,\ldots,n}$ *est nul.*

Démonstration. — Plaçons-nous dans le plongement vectoriel $V = \widehat{\mathscr{E}}$ de $\mathscr{E}$ et notons $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{B_0B_1}, \ldots, \overrightarrow{B_0B_n})$ et $\widehat{F} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{OB_0}, \ldots, \overrightarrow{OB_n})$. On a les équivalences :

$$\text{les } B_i \text{ sont liés } \iff \dim(F) < n \iff \dim(\widehat{F}) < n+1 \iff \mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OB_0}, \ldots, \overrightarrow{OB_n}),$$

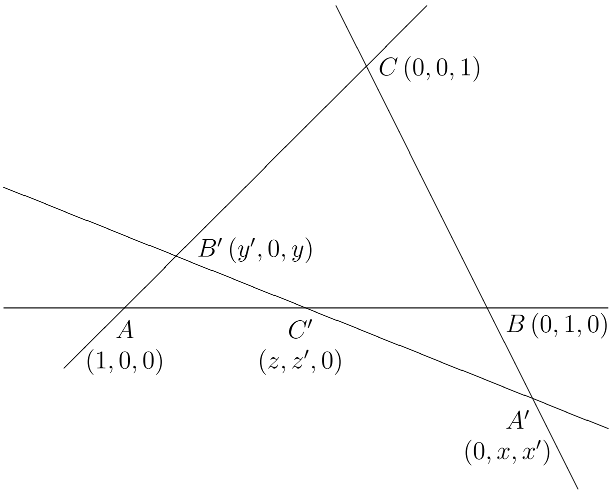
où $\mathscr{B}$ désigne la base $\widehat{\mathscr{R}}$ de V. Or la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OB_0}, \ldots, \overrightarrow{OB_n})$ (qui exprime les $\overrightarrow{OB_j}$ dans la base $\mathscr{B}$) n'est autre que Λ, d'où le résultat. [6] □

6. Théorèmes de Ménélaüs et de Ceva

Dans cette section, on se place dans un *plan affine* $(\mathscr{P}, P)$.

***Théorème 6.1* (de Ménélaüs)**. — [7] *Dans le plan* $\mathscr{P}$*, soient* A, B, C *trois points non alignés, qui forment donc un repère, d'où des coordonnées barycentriques. Soit* A' *un point de la droite* (BC)*, ses coordonnées barycentriques sont donc de la forme* $(0, x, x')$*. De même, soient* $B' \in (CA)$*, de coordonnées* $(y', 0, y)$ [8] *et* $C' \in (AB)$ *de coordonnées* $(z, z', 0)$*. Alors : les points* A', B' *et* C' *sont alignés ssi* $xyz + x'y'z' = 0$*.*

[6] Pour une autre démonstration, n'utilisant pas le plongement vectoriel, voir [Be, Prop. I.2.3].
[7] Mathématicien grec qui vécut autour de l'an 100.
[8] Pour que le résultat final soit « joli », i.e. $xyz + x'y'z' = 0$, on utilise l'ordre « cyclique » $ABCA$.



Démonstration. — D'après le théorème 5.6, A', B' et C' sont alignés ssi le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & y' & z \\ x & 0 & z' \\ x' & y & 0 \end{vmatrix}$ est nul. Or on voit facilement que ce déterminant vaut $xyz + x'y'z'$. □

***Théorème 6.2* (de Céva).** — [9] *Mêmes hypothèses et notations que dans le théorème de Ménélaüs. Alors les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles ssi $xyz = x'y'z'$.*

Démonstration. — On note $\mathscr{R}$ le repère (A, B, C) et l'on se place dans l'espace vectoriel $V = \widehat{\mathscr{P}}$, muni des coordonnées (λ, μ, ν) dans la base $\widehat{\mathscr{R}}$. La démonstration se fait en quatre étapes. On rappelle que le plan vectoriel associé à $\mathscr{P}$ (i.e. sa direction) est noté P.

(i) Remarquons d'abord que toute droite affine $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$ est l'intersection du plan vectoriel Π qu'elle engendre dans V, et de $\mathscr{P}$. Or Π est défini dans V par l'annulation d'une forme linéaire $f(\lambda, \mu, \nu) = a\lambda + b\mu + c\nu$, laquelle est unique à multiplication par un scalaire non nul près. Donc $\mathscr{D}$ est définie dans $\mathscr{P}$ par « l'équation en les coordonnées barycentriques » $a\lambda + b\mu + c\nu = 0$ (ce qu'on aurait bien sûr pu démontrer directement). De plus, $\Pi \cap P$ est la droite vectorielle D qui est la direction de $\mathscr{D}$ (voir le dessin dans l'exemple 5.4).

(ii) Soient maintenant dans $\mathscr{P}$ trois droites affines distinctes $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$, soient Π_1, Π_2, Π_3 les plans vectoriels associés, et soient $f_i(\lambda, \mu, \nu) = a_i\lambda + b_i\mu + c_i\nu$ une forme linéaire définissant Π_i. Comme $\mathscr{D}_1 \neq \mathscr{D}_2$ alors $\Pi_1 \neq \Pi_2$ donc $\Pi_1 \cap \Pi_2$ est une droite vectorielle Δ, et donc le sous-espace $W = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ est égal soit à Δ (si $\Delta \subset \Pi_3$), soit à $\{0\}$ (si $\Delta \not\subset \Pi_3$). De plus, comme $\Pi_i = \mathrm{Ker}(f_i)$ est l'orthogonal dans V de la droite $kf_i \subset V^*$, alors W est l'orthogonal dans V du sous-espace $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ de V^* et donc on a :

$$(*) \qquad \boxed{W = \Delta \Longleftrightarrow W \neq \{0\} \Longleftrightarrow f_1, f_2, f_3 \text{ sont liées}}$$

(revoir vos cours d'algèbre linéaire de L2 ou L3).

(iii) $W = \Delta$ équivaut à ce que les droites $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$ soient concourantes ou parallèles. Plus précisément, si Δ n'est pas contenue dans P, alors elle coupe $\mathscr{P}$ en un unique point I, qui appartient donc à $\mathscr{P} \cap W = \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 \cap \mathscr{D}_3$, donc les droites sont concourantes. Et réciproquement, si elles sont concourantes en un point I, alors la droite $\Delta = k\overrightarrow{OI}$ appartient à chaque Π_i donc à W.

[9] Giovanni Ceva, mathématicien italien (1647-734). Son nom est souvent francisé en : « Jean (de) Céva », probablement pour le distinguer de son frère Tommaso (jésuite et mathématicien, qui eut pour élève le géomètre (et jésuite aussi) Giovanni Saccheri). Source : www-history.mcs.st-and.ac.uk

D'autre part, si $\Delta \subset P$ alors Δ est contenue dans chaque $P \cap \Pi_i$, donc est la direction de chaque $\mathscr{D}_i$, donc $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$ sont parallèles. Réciproquement, si elles le sont et si on note D leur direction commune, alors D est contenue dans chaque $\Pi_i \cap P$ donc dans $W \cap P$, et donc $D = \Delta$.

On a ainsi démontré la proposition suivante :

Proposition 6.3. — *Soient dans $\mathscr{P}$ trois droites affines distinctes $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$, définies respectivement par les équations en les coordonnées barycentriques : $a_i\lambda+b_i\mu+c_i\nu = 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Alors $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$ sont concourantes ou parallèles ssi le déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ est nul.*

En effet, la nullité de ce déterminant équivaut au fait que les formes linéaires $f_i(\lambda, \mu, \nu) = a_i\lambda + b_i\mu + c_i\nu$ soient liées.

(iv) Achevons maintenant la démonstration du théorème de Céva. Comme la droite $\mathscr{D}_1 = (AA')$ passe par les points de coordonnées $(1, 0, 0)$ et $(0, x, x')$, on voit que l'équation f_1 du plan Π_1 est $x'\mu - x\nu = 0$. De même, comme la droite $\mathscr{D}_2 = (BB')$ passe par les points de coordonnées $(0, 1, 0)$ et $(y', 0, y)$, on voit que l'équation f_2 de Π_2 est $-y\lambda + y'\nu = 0$. Et comme $\mathscr{D}_3 = (CC')$ passe par les points de coordonnées $(0, 0, 1)$ et $(z, z', 0)$, on voit que l'équation f_3 de Π_3 est $z'\lambda - z\mu = 0$. On obtient donc que $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles ssi le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & y' & -z \\ -x & 0 & z' \\ x' & -y & 0 \end{vmatrix}$ est nul. Or on voit facilement que ce déterminant vaut $x'y'z' - xyz$.

$\square$

CHAPITRE 3

SEMAINE 3 : ESPACES PROJECTIFS, PLONGEMENT PROJECTIF D'UN ESPACE AFFINE, THÉORÈMES DE PAPPUS ET DE DESARGUES

Références pour ce chapitre :

[Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013 (§I.3.3 et Chap. II), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand

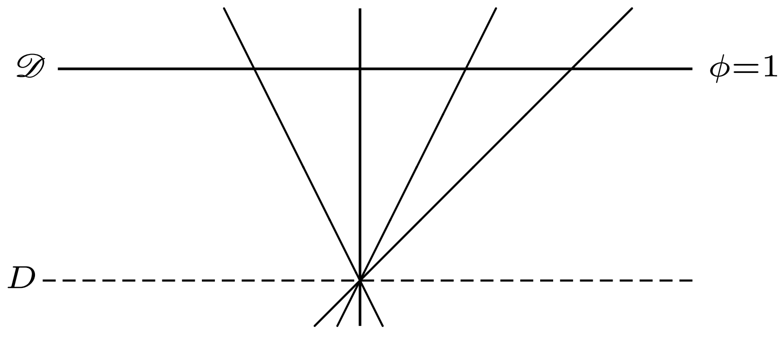
[It] Ilia Itenberg, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2013-2014 (§1.7 et §§2.1-2.4), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~ilia.itenberg

[LF] Jaqueline Lelong-Ferrand, Les fondements de la géométrie (P.U.F., 1985), §§IV.10 et V.11

7. Plongement projectif d'une droite ou d'un plan affine

7.1. Droites projectives. — Soit $\mathscr{D}$ une droite affine, de direction D et soit $V = \widehat{\mathscr{D}}$, c'est un k-espace vectoriel de dimension 2 qui contient comme hyperplan affine $\mathscr{D} = \{v \in V \mid \phi(v) = 1\}$. Notons $\mathbb{P}(V) = \widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ l'ensemble des droites vectorielles de V. On peut le voir de plusieurs façons.

(a) Sur le dessin ci-dessous, on voit que, à l'exception de D, toute droite vectorielle de V coupe $\mathscr{D}$ en un unique point. On peut donc identifier $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ à l'ensemble des points de $\mathscr{D}$, auxquels on rajoute un point, noté ∞, qui correspond à la droite D et qu'on appelle le « point à l'infini ». Donc, comme ensemble, $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathscr{D} \cup \{\infty\}$.



(b) Choisissons des coordonnées (x, y) sur V telles que $\mathscr{D}$ (resp. D) soit donnée par l'équation $y = 1$ (resp. $y = 0$).[1] Alors les droites vectorielles de V sont :

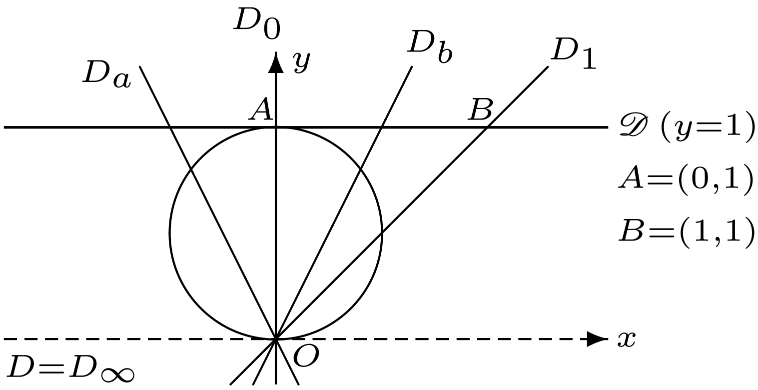
(i) Pour $\lambda \in k$, la droite D_λ d'équation $x = \lambda y$ (engendrée par $e_2 + \lambda e_1$), qui coupe $\mathscr{D}$ en le point $(\lambda, 1)$.

(ii) La droite $D = ke_1$, d'équation $y = 0$.

---

[1] Pour cela, on choisit une forme linéaire ψ non colinéaire à notre ϕ, alors (ψ, ϕ) est une base de V^*, duale d'une unique base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de V et donc les formes linéaires « coordonnées dans cette base » sont (ψ, ϕ).

Dans la figure suivante, pour $k = \mathbb{R}$ on a représenté les droites D_0 et D_1, ainsi que D_a et D_b, où $a = -1/2 = -b$. De plus, lorsque $k = \mathbb{R}$, on voit que lorsque λ tend vers $\pm\infty$, la droite D_λ « tend » vers la droite $D_\infty = D$. Bien qu'on n'ait pas encore défini de topologie sur $\mathbb{P}(V)$, on peut comprendre l'assertion précédente en remarquant que chaque droite D_λ recoupe le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[OA]$ en un unique point $P_\lambda \neq O$, tandis que $D = D_\infty$ est tangente à $\mathscr{C}$ en O, et que, pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$, le point P_λ tend vers O quand λ tend vers $\pm\infty$. Donc, on peut identifier $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ au cercle $\mathscr{C}$ (on reviendra sur ceci plus tard).



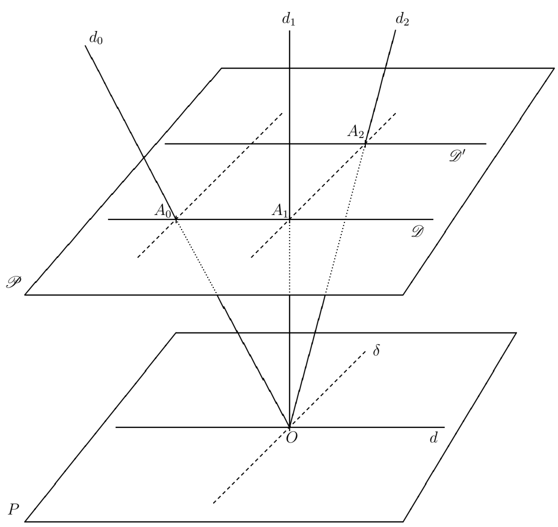
Revenant à un corps quelconque k, soit V un k-espace vectoriel de dimension 2.

Définition 7.1. — (a) On note $\mathbb{P}(V)$ l'ensemble des droites vectorielles de V, et l'on dit que $\mathbb{P}(V)$ est une *droite projective*.

(b) Lorsque $V = \widehat{\mathscr{D}}$ pour une droite affine $\mathscr{D}$, on note $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathbb{P}(\widehat{\mathscr{D}})$ et l'on dit que c'est le « plongement projectif » de $\mathscr{D}$.

L'intérêt de cette notion de « droite projective » va apparaître dans un instant, avec l'introduction du « plan projectif ».

7.2. Le plan projectif. — Soit $\mathscr{P}$ un plan affine, de direction P et soit $V = \widehat{\mathscr{P}}$, c'est un k-espace vectoriel de dimension 3 qui contient comme hyperplan affine $\mathscr{P} = \{v \in V \mid \phi(v) = 1\}$. Notons $\mathbb{P}(V) = \widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ l'ensemble des droites vectorielles de V. On dit que c'est un *plan projectif*, et que c'est le « plongement projectif » de $\mathscr{P}$.



Ainsi, comme ensemble, $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ est la réunion des points de $\mathscr{P}$, qui correspondent aux droites vectorielles de $\widehat{\mathscr{P}}$ non contenues dans P, et des points de $\mathbb{P}(P)$, qui correspondent aux droites vectorielles de P.[(2)]

Les points de $\mathbb{P}(P)$ forment ce qu'on appelle la « droite (projective) à l'infini », qu'on notera $\mathscr{D}_\infty$. Dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$, chaque droite affine $\mathscr{D}$ est « complétée » en lui adjoignant son « point à l'infini », qui est le point de $\mathbb{P}(P)$ correspondant à la direction de $\mathscr{D}$; on obtient ainsi la droite projective $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$.[(3)] De plus, deux droites parallèles ont le même point à l'infini : par exemple, dans la figure, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont d pour point à l'infini, tandis que la droite (A_1A_2) et sa parallèle passant par A_0 ont toutes deux δ comme point à l'infini. On voit ainsi que :

(i) Dans $\mathscr{P}$, soient $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ deux droites affines distinctes, alors dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ les droites projectives $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}_1)$ et $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}_2)$ se coupent en un unique point x, et x appartient à $\mathscr{P}$ (resp. à la droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$) si et seulement si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont concourantes (resp. parallèles). (Ceci suffit déjà à justifier l'étude des espaces projectifs et de la « géométrie projective ».)

(ii) De plus, pour toute droite affine $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$, la droite projective $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ coupe $\mathscr{D}_\infty$ en un unique point, qui est le point à l'infini de $\mathscr{D}$. Donc, en appelant « **droites** » de $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ les droites $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ ainsi que la droite $\mathscr{D}_\infty$, on obtient que :

« dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ deux droites distinctes se coupent en un unique point »,

ce qui est une situation « plus agréable » que dans le plan affine. De plus, on verra plus bas que, en fait, $\mathscr{D}_\infty$ ne joue pas un rôle particulier et peut être remplacée par n'importe quelle droite de $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$.

Remarque 7.2. — Lorsque $k = \mathbb{R}$ le plan projectif réel $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ est muni d'une structure de variété C^∞ compacte mais attention, il ne s'identifie *pas* à la sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$. On peut essayer de se le représenter comme la demi-sphère supérieure : $S^2_+ = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$ en identifiant deux à deux les points diamétralement opposés $(x, y, 0)$ et $(-x, -y, 0)$. En effet, chaque droite vectorielle non contenue dans le plan horizontal $z = 0$ coupe la demi-sphère en un unique point, pour lequel $z > 0$; ceci fournit une bijection entre le plan affine donné par $z = 1$ et $S^2_{z>0} = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$. D'autre part, chaque droite vectorielle horizontale coupe le cercle horizontal $S^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ en deux points diamétralement opposés, qu'il faut donc identifier. On peut montrer que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est une surface compacte *non orientable* (i.e. elle a une seule face au lieu de deux, comme un ruban de Möbius) et donc n'est pas homéomorphe à une surface contenue dans $\mathbb{R}^3$. Mais ceci n'empêche pas de faire de la géométrie projective !

8. Espaces projectifs, coordonnées homogènes, ouverts affines

8.1. Espaces projectifs et coordonnées homogènes. — On fixe un k-espace vectoriel V de dimension $n + 1$.

Définition 8.1. — L'espace projectif de V, noté $\mathbb{P}(V)$, est l'ensemble des droites vectorielles de V. On dit que c'est un espace projectif *de dimension* $n = \dim(V) - 1$.[(4)] Si $V = k^{n+1}$, on le note aussi $\mathbb{P}^n(k)$.

En particulier, si $\dim(V) = 1$ alors $\mathbb{P}(V)$ est un point. Si $\dim(V) = 2$ (resp. 3), on dit que $\mathbb{P}(V)$ est une droite projective (resp. un plan projectif).

---

(2) C'est pour cette raison que, dans la figure précédente, on a noté par des lettres minuscules les droites vectorielles d_0, d_1, d_2, d, δ : elles correspondent à des « points » de $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$.

(3) En effet, le sev de $\widehat{\mathscr{P}}$ engendré par $\mathscr{D}$ s'identifie à $\widehat{\mathscr{D}}$ et l'on retrouve la construction du §1.

(4) Par convention, $\mathbb{P}(\{0\}) = \varnothing$.

Notation 8.1bis. — Soient $\mathscr{E}$ un espace affine et $\widehat{\mathscr{E}}$ son plongement vectoriel. Alors $\mathbb{P}(\widehat{\mathscr{E}})$ est noté $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{E})$ et appelé le *plongement projectif* de $\mathscr{E}$.

Notation 8.2. — Considérons sur $V - \{0\}$ la relation d'équivalence définie par $v \sim v'$ ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $v' = \lambda v$. Comme toute droite D est définie par un vecteur non nul v et que deux vecteurs non nuls v, v' définissent la même droite ssi $v \sim v'$, on voit que $\mathbb{P}(V)$ s'identifie à *l'ensemble quotient* $(V - \{0\})/\sim$, qu'on note $(V - \{0\})/k^\times$.

Pour tout $v \in V - \{0\}$, on notera $[v]$ son image dans $\mathbb{P}(V)$, i.e. le point de $\mathbb{P}(V)$ défini par la droite kv.

***Définition 8.3* (Sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$)**. — Soit W un sev non nul de V. Alors $\mathbb{P}(W)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{P}(V)$ (en effet, les droites vectorielles de V contenues dans W sont exactement les droites vectorielles de W). On dira que c'est un *sous-espace projectif* de $\mathbb{P}(V)$, *de dimension* $\dim(W) - 1$. [5] En particulier, si $\dim(W) = 2$ on dit que $\mathbb{P}(W)$ est une *droite projective* dans $\mathbb{P}(V)$.

Rappelons le lemme suivant, dont on se servira de façon répétée.

Lemme 8.4. — *Soient H un hyperplan de V et W un sev de V non contenu dans H. Alors on a* $\dim(W \cap H) = \dim(W) - 1$.

Démonstration. — En effet, rappelons la formule :

$$(\dagger) \qquad \dim(W \cap H) = \dim(W) + \dim(H) - \dim(W + H).$$

Comme $\dim(H) = \dim(V) - 1$ et comme l'inclusion $H \subset H + W$ est *stricte* (car $W \not\subset H$), on a $\dim(W + H) \geq \dim(V)$ et donc $W + H = V$. Reportant ceci dans (†), on obtient $\dim(W \cap H) = \dim(W) - 1$. □

On a vu au §7.2 que, si $\mathscr{P}$ est un plan affine, alors le plan projectif $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P}) = \mathbb{P}(\widehat{\mathscr{P}})$ a la propriété suivante : deux droites projectives distinctes se coupent en un unique point. On va voir que ceci est vrai dans tout plan projectif. Plus généralement, on a la :

Proposition 8.5. — *Soient E, F deux sev non nuls de V. Posons $p = \dim \mathbb{P}(E)$ et $q = \dim \mathbb{P}(F)$.*

(i) *On a $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E \cap F)$; ceci est non vide ssi $E \cap F \neq \{0\}$.*

(ii) *Si $p + q \geq n = \dim \mathbb{P}(V)$ alors $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F)$ est non vide et est de dimension $\geq p + q - n$.*

(iii) *Par ailleurs, on a : $\mathbb{P}(E) \subseteq \mathbb{P}(F) \Leftrightarrow E \subset F$ et donc : $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F) \Leftrightarrow E = F$.*

(iv) *Si H est un hyperplan de V et si $\mathbf{D}$ est une droite projective non contenue dans $\mathbb{P}(H)$, alors $\mathbf{D} \cap \mathbb{P}(H)$ est formé d'un seul point.*

Démonstration. — $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F)$ est formé des droites vectorielles de V contenues dans E et dans F, i.e. contenues dans $E \cap F$. La 1ère assertion de (i) en découle, et la 2ème est claire.

(ii) On sait que $\dim(E \cap F) + \dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) = p + 1 + q + 1 = p + q + 2$, et comme $\dim(E + F) \leq \dim(V) = n + 1$ on a donc :

$$\dim(E \cap F) \geq p + q + 2 - (n + 1) = p + q + 1 - n.$$

Sous l'hypothèse $p + q \geq n$, ceci est ≥ 1, donc $E \cap F$ est non nul, de dimension $\geq p + q - n + 1$, donc $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F)$ est de dimension $\geq p + q - n$.

[5] Si $W = \{0\}$, alors $\mathbb{P}(W)$ est l'ensemble vide $\varnothing$, auquel on peut attribuer la dimension -1.

(iii) Il est clair que si $E \subset F$ alors $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F)$. Réciproquement, si $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F)$, alors pour tout v non nul dans E, la droite kv est contenue dans F, d'où $v \in F$ et donc $E \subset F$. Ceci prouve la 1ère assertion de (iii), et la 2ème en découle.

(iv) On a $\mathbf{D} = \mathbb{P}(W)$ pour un certain plan vectoriel W de V (uniquement déterminé, d'après (iii)), non contenu dans H. Alors $\Delta = W \cap H$ est une droite vectorielle de H et donc $\mathbf{D} \cap \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(\Delta)$ est le point δ de $\mathbb{P}(H)$ correspondant à Δ. □

Corollaire 8.6. — (i) *Dans un plan projectif, deux droites projectives distinctes* $\mathbf{D}$ *et* $\mathbf{D}'$ *se coupent en un unique point.*

(ii) *Dans un espace projectif* $\mathbb{P}(V)$ de dimension 3 (*i.e.* $\dim(V) = 4$)*, soient* $\mathbf{P}$ *un plan projectif et* $\mathbf{D}$ *une droite projective non contenue dans* $\mathbf{P}$*. Alors* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{D}$ *se coupent en un unique point.*

Pour faire de la géométrie dans le plan projectif (cf. la section 9 sur les théorèmes de Pappus et de Desargues), on aura besoin de la notion de « *droite projective engendrée par deux points distincts* » et de celle de « *points alignés* » dans $\mathbb{P}(V)$. Pour cela, on a besoin de la :

***Définition 8.7* (Sous-espace projectif engendré, points alignés)**
Soit X un sous-ensemble non vide de $\mathbb{P}(V)$. Notons δ_x la droite vectorielle de V correspondant à un élément x de X, et soit E le sev de V engendré par les δ_x. En d'autres termes, si $X = \{p_1, \dots, p_N\}$ et si $p_i = [v_i]$, alors $E = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_N)$. Alors :

(i) $\mathbb{P}(E)$ est le *plus petit* sous-espace projectif de V contenant X. On dit que c'est le sous-espace projectif *engendré* par X.

(ii) Si X est formé de deux points distincts p_1, p_2, alors $\dim(E) = 2$ et l'on dit que $\mathbb{P}(E)$ est la *droite projective engendrée* par p_1 et p_2. On la note (p_1p_2).

(iii) Soient $N \geq 2$ et $p_1, \dots, p_N$ des points de $\mathbb{P}(V)$, pas tous égaux. On dit qu'ils sont *alignés* si le sous-espace projectif qu'ils engendrent est une droite projective.

Démonstration. — Il n'y a que la première phrase de (i) à démontrer. Mais c'est clair, car si X est contenu dans un sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ alors W contient les δ_x donc contient E, d'où $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(W)$. □

***Définition 8.8* (Coordonnées homogènes)**. — Munissons V d'une base $(e_0, \dots, e_n)$, notée $\mathscr{B}$. Alors chaque point de $\mathbb{P}(V)$, correspondant à une droite vectorielle D, peut être paramétré par ses « *coordonnées homogènes* » $[x_0, x_1, \dots, x_n]$: ce sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ d'un élément non nul v de D. Noter que comme $v \neq 0$, les x_i ne sont pas tous nuls. Bien sûr, pour tout $\lambda \in k^\times$, v et λv engendrent la même droite, donc les coordonnées homogènes ne sont définies qu'à la multiplication près par un scalaire non nul, i.e. $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ et $[\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n]$ représentent le même point.

On va voir que malgré cette « non unicité » (qui au prime abord peut sembler gênante), les coordonnées homogènes sont un outil très utile.

En particulier, si $V = k^{n+1}$, les coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{P}(k^{n+1})$ ne sont autres que les classes d'équivalence de $(n+1)$-uplets $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$, où $(x_0, \dots, x_n) \sim (x'_0, \dots, x'_n)$ ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $x'_i = \lambda x_i$ pour tout i, et la classe d'équivalence de $(x_0, \dots, x_n)$ est notée $[x_0, \dots, x_n]$.

8.2. Ouverts affines. — On appellera plus bas « ouverts affines » de $\mathbb{P}(V)$ certains espaces affines, analogues de l'espace affine $\mathscr{E}$ plongé dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{E})$. Pour justifier la terminologie « ouverts », commençons par la définition suivante.

Remarque 8.9. — Pour tout polynôme **homogène** $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$, disons de degré d, on peut définir son « lieu des zéros » dans $\mathbb{P}^n(k)$ par :

$$\mathscr{V}(F) = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \mid F(x_0, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Ceci est bien défini, car puisque F est homogène de degré d, on a $F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \ldots, x_n)$ pour tout $\lambda \in k^\times$, donc si F s'annule sur *un* représentant $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[x_0, \ldots, x_n]$ il s'annule sur *tout* représentant.

Plus généralement, pour tout ensemble $\{F_1, \ldots, F_N\}$ de polynômes homogènes (où F_i est, disons, de degré d_i), on pose :

$$\mathscr{V}(F_1, \ldots, F_N) = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \mid \forall i = 1, \ldots, N, \quad F_i(x_0, \ldots, x_n) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{N} \mathscr{V}(F_i).$$

On appellera ces sous-ensembles des *fermés algébriques* de $\mathbb{P}^n(k)$. [6]

La remarque précédente est valable, indépendamment d'un choix de coordonnées, pour toute *forme linéaire* f sur V. Plus précisément :

***Définition 8.10* (Hyperplans de $\mathbb{P}(V)$).** — (i) Pour toute $f \in V^*$ non nulle, son lieu des zéros $\mathscr{V}(f) = \{[v] \in \mathbb{P}(V) \mid f(v) = 0\}$ est appelé un **hyperplan** de $\mathbb{P}(V)$. Notant H l'hyperplan $\mathrm{Ker}(f) \subset V$, on voit que $\mathscr{V}(f)$ n'est autre que l'ensemble des droites vectorielles contenues dans H, c.-à-d. le sous-espace projectif $\mathbb{P}(H) \subset \mathbb{P}(V)$.

(ii) Plus généralement, pour $f_1, \ldots, f_r \in V^*$, le lieu des zéros $\mathscr{V}(f_1, \ldots, f_r)$ est bien défini et s'identifie au sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$, où $W = \bigcap_{i=1}^r \mathrm{Ker}(f_i)$. [7]

***Rappels 8.11* (sur la dualité).** — (1) Si F est un sev de V^*, son orthogonal dans V est :

$$F^0 = \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ pour tout } f \in F\}.$$

On rappelle que : (i) $\boxed{\dim(F^0) = \dim(V) - \dim(F)}$ et : (ii) si $(f_1, \ldots, f_r)$ est une famille génératrice de F (par exemple une base), alors $F^0 = \{v \in V \mid f_i(v) = 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, r\} = \bigcap_{i=1}^r \mathrm{Ker}(f_i)$.

(2) De même, si W est un sev de V, son orthogonal dans V^* est :

$$W^0 = \{f \in V^* \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in W\}.$$

On a : (i) $\boxed{\dim(W^0) = \dim(V) - \dim(W)}$ et : (ii) si $(v_1, \ldots, v_r)$ est une famille génératrice de W (par exemple une base), alors $W^0 = \{f \in V^* \mid f(v_i) = 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, r\}$. De plus, on a $\boxed{W = W^{00} \text{ et } F = F^{00}.}$

(3) Enfin, le dual de l'espace quotient V/W s'identifie à W^0, i.e. on a : $\boxed{(V/W)^* = W^0.}$

Remarque 8.12. — Soit H un hyperplan de V. Alors son orthogonal $H^0 = \{f \in V^* \mid f(H) = 0\}$ est de dimension 1. Si l'on fixe un générateur f de H^0, i.e. une forme linéaire f telle que $\mathrm{Ker}(f) = H$, alors il est facile de voir (cf. ci-dessous) que « l'ouvert » $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ (complémentaire dans $\mathbb{P}(V)$ du fermé $\mathbb{P}(H)$) s'identifie à l'hyperplan affine $\mathscr{H}_f = \{v \in V \mid f(v) = 1\}$ et est par suite muni d'une structure d'espace affine de direction H.

---

[6] On peut vérifier (nous n'en aurons pas besoin) que les $\mathscr{V}(F)$ forment les fermés d'une certaine topologie sur $\mathbb{P}^n(k)$, appelée la topologie de Zariski. De plus, si k est le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors $\mathbb{K}^{n+1}$ est muni d'une topologie canonique, ainsi que le quotient $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{K}^\times$, et comme les fonctions polynomiales (homogènes) $F = \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ sont *continues*, on obtient que les $\mathscr{V}(F_1, \ldots, F_N)$ sont aussi des fermés pour cette topologie.

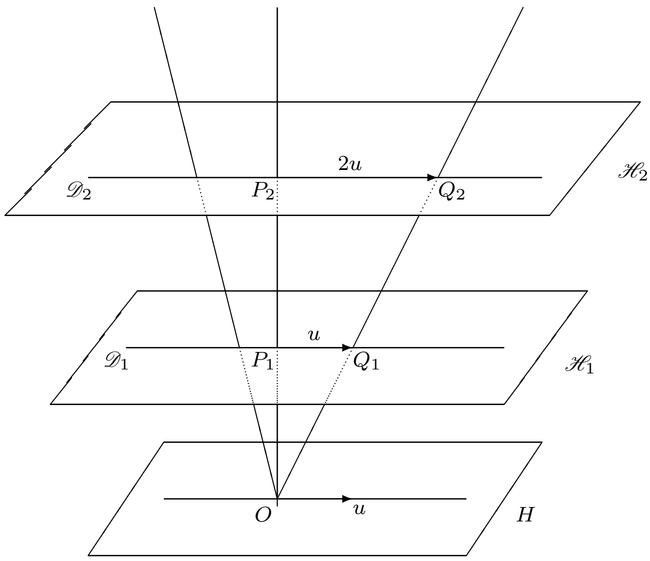
[7] On rappelle que si $W = \{0\}$ alors $\mathbb{P}(W) = \varnothing$.

Mais ceci n'est pas tout-à-fait suffisant pour nos besoin, car dans la section 9 sur les théorèmes de Pappus et de Desargues, on aura dans le plan projectif $\mathbb{P}(V)$ un hyperplan $\mathbb{P}(H)$ qui sera une droite $\mathscr{D}_\infty = (pq)$ pour des points $p \neq q$ bien choisis, et l'on aura besoin de considérer le « plan affine » $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$ *sans fixer* une forme linéaire f telle que $\mathscr{D}_\infty = \mathbb{P}(\mathrm{Ker}(f))$. Pour cette raison, il nous faut soit définir la structure affine de $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ de façon indépendante de f, soit expliquer soigneusement comment les choix pour f et λf (où $\lambda \in k^\times$) donnent des espaces affines canoniquement isomorphes. En fait, on va faire les deux !

Définition et proposition 8.13 **(Les « ouverts » affines $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$)**
Soient H un hyperplan de V et $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Fixons un générateur f de H^0, i.e. une forme linéaire f telle que $\mathrm{Ker}(f) = H$ *et, pour tout $\lambda \in k^\times$ considérons l'hyperplan affine $\mathscr{H}_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda\}$.*

(i) *L'application $\mathscr{H}_\lambda \to U$, $x \mapsto [x]$ est une bijection. Via cette bijection U est muni d'une structure d'espace affine de direction H, définie par $[x] +_\lambda u = [x + \lambda u]$.*

(ii) *Toutes ces structures d'espace affine sont isomorphes : plus précisément, l'homothétie $v \mapsto \lambda v$ dans V induit une bijection de $\mathscr{H}_1$ sur $\mathscr{H}_\lambda$ et un isomorphisme entre les espaces affines $(\mathscr{H}_1, H, +_1)$ et $(\mathscr{H}_\lambda, H, +_\lambda)$ (cf. la figure ci-dessous).*



Démonstration. — (i) Tout $[v] \in U$ admet un *unique* représentant v tel que $f(v) = \lambda$. En effet, si w est un représentant quelconque, alors $v = \lambda f(w)^{-1} w$ vérifie $f(v) = \lambda$, et pour tout représentant $v' = \mu v$ on a $f(v') = \mu\lambda$, donc $f(v') = \lambda \Leftrightarrow \mu = 1$. On a donc une bijection $x \mapsto [x]$ de $\mathscr{H}_\lambda$ sur U. De plus, l'action de H sur $\mathscr{H}_\lambda$ définie par

$$\mathscr{H}_\lambda \times H \to \mathscr{H}_\lambda, \quad (x, u) \mapsto x +_\lambda u = x + \lambda u,$$

fait de $\mathscr{H}_\lambda$ un espace affine de direction H, que l'on désignera par $(\mathscr{H}_\lambda, H, +_\lambda)$. Via la bijection précédente, ceci munit U d'une structure d'espace affine de direction H.

(ii) L'homothétie de V de rapport λ est bijective. Elle induit une bijection h de $\mathscr{H}_1$ sur $\mathscr{H}_\lambda$. De plus, pour tout $x \in \mathscr{H}_1$ et $u \in H$, on a :

$$h(x +_1 u) = h(x + u) = \lambda(x + u) = \lambda x + \lambda u = h(x) +_\lambda u.$$

Ceci montre que, considérée comme application de $(\mathscr{H}_1, H, +_1)$ dans $(\mathscr{H}_\lambda, H, +_\lambda)$, h est une application *affine*, de partie linéaire l'homothétie vectorielle $h_\lambda : H \to H$. Comme h est bijective, c'est donc un isomorphisme entre ces deux espaces affines. □

Pour récrire la proposition précédente de façon plus « canonique » (i.e. sans choisir un générateur f de H^0), on aura besoin du lemme suivant. (Ce paragaphe peut être omis en 1ère lecture.)

Lemme 8.14. — *Soit H un hyperplan de V et soit $E = \mathrm{Hom}(V/H, H)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de V/H dans H.* (8) *Alors :*

(i) *Le choix d'un générateur f de $H^0 = (V/H)^*$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels $\phi_f : H \xrightarrow{\sim} E$.*

(ii) *Plus précisément, pour tout $u \in H$ et $v \in V$, on a : $\boxed{\phi_f(u)(\overline{v}) = f(v)u}$ (où $\overline{v}$ désigne l'image de v dans V/H).*

Démonstration. — (i) En effet, V/H étant de dimension 1, si l'on en fixe un générateur e alors $E = \mathrm{Hom}(ke, H)$ s'identifie à H via l'isomorphisme $\theta \mapsto \theta(e)$. Or, le choix d'un générateur f de $H^0 = (V/H)^*$ définit un générateur e de V/H, à savoir l'unique élément e tel que $f(e) = 1$.

(ii) Fixons f et e comme ci-dessus. Pour tout $u \in H$ on a, par définition, $\phi_f(u)(\mu e) = \mu u$ pour tout $\mu \in k$. D'autre part, pour $v \in V$, posons $\overline{v} = \mu_v e$. Alors $\mu_v = f(\overline{v}) = f(v)$ et donc $\phi_f(u)(\overline{v}) = f(v)u$. (9) □

Retour 8.15 **(sur l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$).** — Soient H un hyperplan de V et $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Soit $E = \mathrm{Hom}(V/H, H)$ et, pour tout $f \in H^0 - \{0\}$, soit $\mathscr{H}_f = \{x \in V \mid f(x) = 1\}$.

(i) U est un espace affine de direction E (et donc de dimension $n = \dim(V) - 1$).

(ii) Pour tout $f \in H^0 - \{0\}$ la bijection $\mathscr{H}_f \to U$, $x \mapsto [x]$ est une application *affine*, de partie linéaire l'isomorphisme $\phi_f : H \xrightarrow{\sim} E$ du lemme 8.14. C'est donc un *isomorphisme* entre les espaces affines $(\mathscr{H}_f, H)$ et (U, E).

Démonstration. — (i) D'abord, pour tout $v \in V$, notons $\overline{v}$ son image dans V/H. On définit alors l'action de E sur U comme suit. Pour tout $\theta \in E$ et $[v] \in U$, on pose :

$$(*) \qquad [v] \mathbin{\boldsymbol{+}} \theta = [\, v + \theta(\overline{v})\,].$$

Vérifions que ceci est bien défini. D'une part, comme $\theta(\overline{v}) \in H$, le vecteur $v+\theta(\overline{v})$ n'appartient pas à H, car sinon on aurait $v \in H$, contradiction. D'autre part, si $v' = \lambda v$ est un autre représentant de $[v]$, on a $\theta(\overline{v'}) = \theta(\lambda\overline{v}) = \lambda\theta(\overline{v})$ et donc $v' + \theta(\overline{v'}) = \lambda(v + \theta(\overline{v}))$. Ceci montre que $(*)$ définit bien une application $U \times E \to U$, $([v], \theta) \mapsto [v] \mathbin{\boldsymbol{+}} \theta$.

Si $\theta = 0$ (l'application nulle), on a bien $[v] \mathbin{\boldsymbol{+}} 0 = [v]$. Et pour tout $\theta, \theta' \in E$, $([v] \mathbin{\boldsymbol{+}} \theta) \mathbin{\boldsymbol{+}} \theta' = [v + \theta(\overline{v})] \mathbin{\boldsymbol{+}} \theta'$ désigne la droite engendrée par le vecteur

$$v + \theta(\overline{v}) + \theta'(v + \theta(\overline{v})) = v + \theta(\overline{v}) + \theta'(\overline{v}) = v + (\theta + \theta')(\overline{v}).$$

Ceci montre que $([v] \mathbin{\boldsymbol{+}} \theta) \mathbin{\boldsymbol{+}} \theta' = [v] \mathbin{\boldsymbol{+}} (\theta + \theta')$, donc $(*)$ définit bien une *action* de E sur U. Il reste à montrer que cette action est simplement transitive, et l'on va démontrer ceci en même temps que le point (ii).

(ii) Tout $[v] \in U$ admet un *unique* représentant v tel que $f(v) = 1$. En effet, si w est un représentant quelconque, alors $v = f(w)^{-1}w$ vérifie $f(v) = 1$, et pour tout représentant $v' = \mu v$ on a $f(v') = \mu$, donc $f(v') = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$. On a donc une bijection $p_f : x \mapsto [x]$ de $\mathscr{H}_f$ sur U.

Soient $x \in U$ et $u \in H$. D'après le lemme 8.14, on a $\phi_f(u)(x) = f(x)u = u$ et l'on a donc les égalités :

$$(**) \qquad p_f(x + u) = [x + u] = [\, x + \phi_f(u)(x)\,] = [x] \mathbin{\boldsymbol{+}} \phi_f(u) = p_f(x) \mathbin{\boldsymbol{+}} \phi_f(u).$$

Ceci montre que, via la bijection p_f, l'action $\boldsymbol{+}$ de E sur U correspond à l'action naturelle de H sur $\mathscr{H}_f$. Comme celle-ci est simplement transitive, on en déduit qu'il en est de même de l'action $\boldsymbol{+}$. Ceci achève de prouver que (U, E) est un espace affine. Mais alors, $(**)$ nous dit que la bijection $p : \mathscr{H}_f \to U$ est affine, de partie linéaire ϕ_f ; c'est donc un *isomorphisme* entre les espaces affines $(\mathscr{H}_f, H)$ et (U, E). □

---

(8) On le note aussi $\mathscr{L}(V/H, H)$, mais nous préférons la notation « Hom » pour « homomorphismes ».

(9) Tout ceci devient plus clair si l'on connaît les produits tensoriels (cf. le cours 4M002) : $\mathrm{Hom}(V/H, H)$ s'identifie au produit tensoriel $(V/H)^* \otimes H = H^0 \otimes H$, et comme $\dim(H^0) = 1$ tout élément est de la forme $f \otimes u$, avec $f \in H^0$ et $u \in H$. Pour tout $\lambda \in k^\times$, $\lambda f \otimes u = f \otimes \lambda u$ correspond à l'application $v \mapsto \lambda f(v)u$, qui est $\phi_{\lambda f}(u)$ aussi bien que $\phi_f(\lambda u)$. (Comparer avec 8.13 et la figure qui le suit.)

Remarque 8.16. — Tout ce qui précède devient très simple si on l'écrit en coordonnées homogènes. Soit H un hyperplan de V. On peut trouver des coordonnées homogènes $[x_0,\dots,x_n]$ telles que H soit donné par l'annulation d'une des coordonnées, disons par l'équation $x_0 = 0$. En effet, soit f_0 une forme linéaire telle que $\mathrm{Ker}(f_0) = H$; complétons-la en une base $(f_0,\dots,f_n)$ de V^*. C'est la base duale d'une unique base $\mathscr{B} = (e_0,\dots,e_n)$ de V et, notant $(x_0,\dots,x_n)$ les coordonnées dans cette base et $[x_0,\dots,x_n]$ les coordonnées homogènes correspondantes sur $\mathbb{P}(V)$, chaque forme linéaire coordonnée $e_i^* = x_i$ n'est autre que f_i et donc H est bien donné par l'équation $x_0 = 0$. Alors l'ouvert $U_0 = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ s'identifie à l'hyperplan affine

$$\mathscr{H} = \{[1, x_1,\dots,x_n] \in \mathbb{P}(V)\} = e_0 + H.$$

Soit H un hyperplan de V. Il résulte de ce qui précède que $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ est muni d'une structure affine ; en particulier, on peut parler de ses sous-espaces affines. Ils sont décrits explicitement par la proposition suivante.

***Proposition 8.17* (Sous-espaces affines de $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$)**. — *Soient H un hyperplan de V et $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Fixons un générateur f de H^0 et identifions U à l'hyperplan affine $\mathscr{H} = \{v \in V \mid f(v) = 1\}$. Alors on a ce qui suit :*

(i) *Pour tout sev W de V non contenu dans H, de dimension $d+1$, $\mathbb{P}(W)\cap U$ est un sous-espace affine $\mathscr{W}$ de U de dimension d et de direction $W\cap H$, et l'on a $W = \mathrm{Vect}(\mathscr{W})$.*

(ii) *Soit $\mathscr{W}$ un sous-espace affine de U, de dimension d, et soit W le sev de V engendré par les droites kv, pour tout $[v] \in \mathscr{W}$. Alors W est de dimension $d+1$, n'est pas contenu dans H et $W\cap H$ est la direction de $\mathscr{W}$. Le sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ de $\mathbb{P}(V)$ est de dimension d et l'on a $\mathbb{P}(W)\cap U = \mathscr{W}$.*

(iii) *Donc les applications $\mathscr{W} \mapsto \mathbb{P}(\mathrm{Vect}(\mathscr{W}))$ et $\mathbb{P}(W) \mapsto \mathbb{P}(W)\cap U$ sont des* bijections réciproques *entre l'ensemble des sous-espaces affines de U et celui des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ non contenus dans $\mathbb{P}(H)$. Ces bijections préservent la dimension.*

Démonstration. — Pour la démonstration, identifions $\mathscr{H}$ à U, via la bijection $x \mapsto [x]$.

(i) Soit W un sev de V non contenu dans H. Alors f induit, par restriction, une forme linéaire sur W, non nulle (car $W \not\subset \mathrm{Ker}(f)$) qu'on notera f_W. Alors on a les identifications suivantes :

$$\mathscr{H}\cap\mathbb{P}(W) = \{v \in V \mid f(v) = 1 \text{ et } v \in W\} = \{v \in W \mid f_W(v) = 1\}$$

qui montrent que $\mathscr{W} = \mathscr{H}\cap\mathbb{P}(W)$ est un espace affine de direction $\mathrm{Ker}(f_W) = W\cap H$, donc de dimension $\dim(W) - 1$.

De plus, montrons que le sev $W' = \mathrm{Vect}(\mathscr{W})$ de W égale W. Fixons $v_0 \in \mathscr{W}$. Alors pour tout $w \in W\cap H$ le point v_0+w appartient à $\mathscr{W}$, donc $w \in W'$. Ceci montre que W' contient l'hyperplan vectoriel $\mathrm{Ker}(f_W)$ de W ; comme il contient de plus v_0 qui n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(f_W)$ (puisque $f_W(v_0) = 1$), on a donc $W' = W$. Ceci prouve (i).

(ii) Soient $\mathscr{W}$ un sous-espace affine de dimension d de $\mathscr{H}$, on peut l'écrire $v_0 + F$ où F est un sev de dimension d de H. Posant $W = \mathrm{Vect}(\mathscr{W})$, on a donc $W = kv_0 + F$ et, comme $v_0 \notin H$ (puisque $f(v_0) = 1$), cette somme est directe : $W = kv_0 \oplus F$ et l'on a $W\cap H = F$.

Il reste à montrer que $\mathbb{P}(W)\cap\mathscr{H} = \mathscr{W}$. Comme plus haut, on a les identifications

$$\mathscr{H}\cap\mathbb{P}(W) = \{v \in V \mid f(v) = 1 \text{ et } v \in W\} = \{w \in W \mid f(w) = 1\}.$$

Or, écrivant $w = \lambda v_0 + u$, avec $u \in F = W\cap H$, on a $f(w) = \lambda$ donc $f(w) = 1 \Leftrightarrow w \in v_0 + F$. Ceci montre que $\mathscr{H}\cap\mathbb{P}(W) = v_0 + F = \mathscr{W}$, ce qui achève la démonstration de (ii).

Enfin, (iii) découle aussitôt de (i) et (ii) car pour tout $\mathscr{W}$ on a $\mathscr{W} = U\cap\mathbb{P}(\mathrm{Vect}(\mathscr{W}))$ et pour tout W on a $W = \mathrm{Vect}(\mathbb{P}(W)\cap U)$. $\square$

8.3. Passage de l'affine au projectif, et inversement. — On a vu au §7 qu'une motivation pour « compléter » le plan affine $\mathscr{P}$ en le plan projectif $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ est que si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites parallèles de $\mathscr{P}$, alors les droites projectives $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ et $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}')$ se coupent en un unique point de la droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$. Ceci permettra de reformuler en projectif certains théorèmes affines de façon à ce qu'une conclusion (ou hypothèse) que des droites affines sont « concourantes ou parallèles » puisse être remplacée par l'assertion que les droites projectives correspondantes sont concourantes. Mais il y a bien plus que cela : en étendant au cas projectif un énoncé affine, puis en se plaçant dans des ouverts affines différents de celui de départ, on peut obtenir de nouveaux théorèmes affines (voir les théorèmes de Pappus et de Desargues dans la section suivante).

Pour passer de l'affine au projectif et réciproquement, on aura besoin de l'énoncé suivant, que l'on peut paraphraser en disant que les bijections de la Prop. 8.17 « *préservent l'alignement des points* » (en un sens rendu précis par la proposition ci-dessous).

Proposition 8.18. — *Soient $p_1, \dots, p_N$, avec $N \geq 3$, des points deux à deux distincts de $\mathbb{P}(V)$ (où $\dim(V) \geq 2$).*

(i) *On suppose que les p_i sont alignés au sens de la définition* 8.7*, i.e. que le sous-espace projectif* $\mathbb{P}(W)$ *qu'ils engendrent soit une droite projective (i.e.* $\dim(W) = 2$*). Alors, pour* **tout** *hyperplan H de V tel que les p_i ne soient pas tous dans $\mathbb{P}(H)$ (i.e. tel $W \not\subset H$) on a ce qui suit : $W \cap H$ est une droite vectorielle D et, notant U l'ouvert affine $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$, on est dans l'une des deux situations suivantes :*

(a) *tous les p_i sont dans U et appartiennent à une droite affine $\mathscr{D}$.*

(b) *tous les p_i sauf un sont dans U et appartiennent à une droite affine $\mathscr{D}$, et le dernier, disons p_N, est dans « l'hyperplan à l'infini »* $\mathbb{P}(H)$ *et correspond à la droite vectorielle D qui est la direction de $\mathscr{D}$.*

(ii) *Réciproquement, s'il existe* **un** *hyperplan H de V tel qu'on soit dans la situation (a) ou (b) ci-dessus, alors le sev W de V engendré par $\mathscr{D}$ est de dimension* 2 *et les p_i appartiennent à la droite projective* $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathbb{P}(W)$.

Démonstration. — (i) Posant $p_i = [v_i]$, soit W le sev de V engendré par les droites kv_i. Supposons $\dim(W) = 2$. Soit H un hyperplan de V ne contenant pas H, alors $W \cap H$ est une droite vectorielle D. D'après la Prop. 8.17, $U \cap \mathbb{P}(W)$ est une droite affine $\mathscr{D}$ de direction D. De plus, $\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(W \cap H) = \mathbb{P}(D) = \{d\}$, où d est le point de $\mathbb{P}(H)$ qui correspond à la droite D. Comme les p_i sont deux à deux distincts, au plus l'un d'entre eux peut être égal à d, et l'on est donc dans l'une des situations (a) ou (b).

(ii) Réciproquement, soit H un hyperplan de V tel qu'on soit dans la situation (a) ou (b). D'après la Prop. 8.17, il existe un unique plan vectoriel W de V, non contenu dans H, tel que $\mathscr{D} = U \cap \mathbb{P}(W)$.[10]. De plus, la direction de $\mathscr{D}$ est la droite vectorielle $D = W \cap H$. On a donc $\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(W \cap H) = \{d\}$, où d est le point de $\mathbb{P}(H)$ qui correspond à D. Donc, dans chacun des cas (a) et (b), les p_i sont contenus dans la droite projective $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathbb{P}(W)$. □

Exercice 8.19. — Soient $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{P}(V)$. On suppose :

(i) $\dim(V) \geq 3$ et $N \geq 5$.

(ii) Les p_i sont *coplanaires*, i.e. le sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ qu'ils engendrent est un plan projectif,

(iii) Trois quelconques des p_i ne sont jamais alignés (i.e. pour i, j, k deux à deux distincts, les points p_i, p_j, p_k ne sont pas alignés).

[10]Explicitement, comme $p_1 = [v_1]$ et $p_2 = [v_2]$ sont distincts et contenus dans $\mathscr{D}$, alors $W = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

Montrer que pour tout hyperplan H ne contenant pas W, tous les p_i sauf au plus deux sont dans l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ et y engendrent un plan affine $\mathscr{P}$. Décrire les trois situations possibles selon le nombre de p_i contenus dans $\mathbb{P}(H)$.

9. Théorèmes de Thalès, de Pappus et de Desargues

9.1. Théorème de Thalès. — Commençons par rappeler le théorème de Thalès[11], que nous aurions pu énoncer et démontrer en semaine 1, comme application des notions de projection et d'homothétie. Rappelons la définition de projection affine (cf. 3.12) :

Définition et proposition 9.1. — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, F, G deux sev de E qui sont supplémentaires, et $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction F. Alors :*

(i) *Pour tout $M \in \mathscr{E}$, il existe un unique point $p(M) \in \mathscr{F}$ tel que $\overrightarrow{Mp(M)} \in G$.*

(ii) *L'application $p : M \mapsto p(M)$ est affine, de partie linéaire la projection π de E sur F de noyau G. On dit que p est la projection de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{F}$ de direction G (ou :* parallèlement *à G.*

Notation 9.2. — Soient u, v deux vecteurs non nuls d'un k-espace vectoriel V. S'ils sont colinéaires, il existe un unique $\lambda \in k^\times$ tel que $u = \lambda v$. Dans ce cas, on désigne par $\dfrac{u}{v}$ le scalaire λ.

***Théorème 9.3* (de Thalès).** — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine de dimension ≥ 2, soient H un hyperplan de E, $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites distinctes dont les directions D et D' ne sont pas contenues dans H, et $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, \mathscr{H}_3$ trois hyperplans de $\mathscr{E}$ de direction H, deux à deux distincts. Alors :*

(i) *$\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) coupe chaque $\mathscr{H}_i$ en un unique point A_i (resp. B_i).*

(ii) *On a $\dfrac{\overrightarrow{A_3A_2}}{\overrightarrow{A_3A_1}} = \dfrac{\overrightarrow{B_3B_2}}{\overrightarrow{B_3B_1}}$. De plus, A_3 et A_1 étant fixés, ce scalaire détermine A_2, i.e. si un point M de $\mathscr{D}$ vérifie $\dfrac{\overrightarrow{A_3M}}{\overrightarrow{A_3A_1}} = \dfrac{\overrightarrow{B_3B_2}}{\overrightarrow{B_3B_1}}$ alors $M = A_2$.*

(iii) *Si de plus $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont concourantes en un point O, le scalaire précédent est aussi égal à $\dfrac{\overrightarrow{A_2B_2}}{\overrightarrow{A_1B_1}}$*

Démonstration. — (i) Comme $D \not\subset H$ alors $E = D \oplus H$ donc $\mathscr{D}$ coupe chaque $\mathscr{H}_i$ en un unique point A_i, et de même pour $\mathscr{D}'$.

(ii) Soit p la projection de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{D}'$ parallèlement à H. Comme $\overrightarrow{A_iB_i} \in H$, alors $p(A_i) = B_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Posons $\overrightarrow{A_3A_2} = \lambda \overrightarrow{A_3A_1}$. Alors on a

$$\overrightarrow{B_3B_2} = \overrightarrow{p(A_3)p(A_2)} = \pi(\overrightarrow{A_3A_2}) = \lambda\pi(\overrightarrow{A_3A_1}) = \lambda\overrightarrow{p(A_3)p(A_1)} = \lambda\overrightarrow{B_3B_1}.$$

Ceci prouve la première assertion de (ii). De plus, si un point $M \in \mathscr{D}$ vérifie $\dfrac{\overrightarrow{A_3M}}{\overrightarrow{A_3A_1}} = \dfrac{\overrightarrow{B_3B_2}}{\overrightarrow{B_3B_1}} = \lambda$ alors on a $\overrightarrow{A_3M} = \lambda\overrightarrow{A_3A_1} = \overrightarrow{A_3A_2}$ et donc $M = A_2$.

[11] Mathématicien grec qui vécut d'environ -624 à -547 de notre ère.

(iii) Dans ce cas, on peut appliquer ce qui précède en prenant $A_3 = O = B_3$. Alors l'homothétie de centre O et de rapport λ envoie A_1 sur A_2 et B_1 sur B_2, donc on a $\overrightarrow{A_2B_2} = \lambda\overrightarrow{A_1B_1}$, ce qui prouve (iii). □

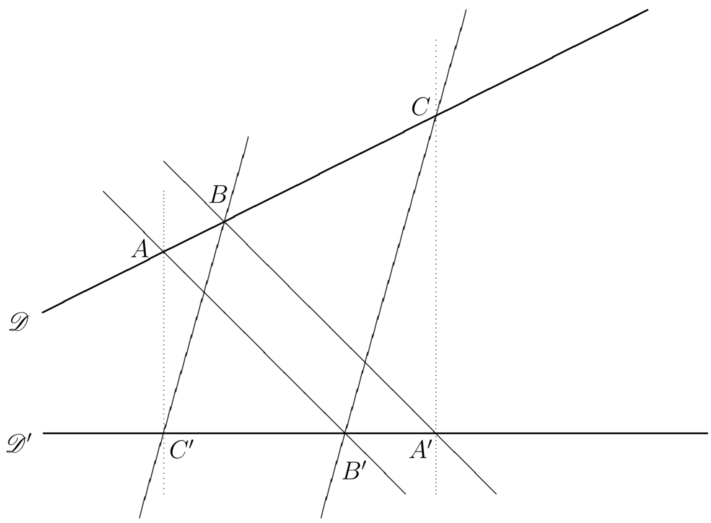
Si $\dim(\mathscr{E}) = 2$, l'assertion (iii) admet la réciproque suivante :

***Théorème 9.4* (réciproque de Thalès dans le plan).** — *Dans un plan affine $\mathscr{P}$, soit $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites distinctes, sécantes en un point O. Soient A_1, A_2 (resp. B_1, B_2) deux points de $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$), distincts de O. Si $\dfrac{\overrightarrow{OA_2}}{\overrightarrow{OA_1}} = \dfrac{\overrightarrow{OB_2}}{\overrightarrow{OB_1}}$ alors les droites (A_1B_1) et (A_2B_2) sont parallèles.*

Démonstration. — Notons λ le scalaire considéré plus haut. Alors l'homothétie de centre O et de rapport λ envoie A_1 sur A_2 et B_1 sur B_2, donc on a $\overrightarrow{A_2B_2} = \lambda\overrightarrow{A_1B_1}$. Par conséquent, les droites (A_1B_1) et (A_2B_2) sont parallèles. □

9.2. Théorème de Pappus. —

***Théorème 9.5* (de Pappus).** — [12] *Dans un plan affine $\mathscr{P}$, soient $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites distinctes et A, B, C (resp. A', B', C') trois points distincts situés sur $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) et distincts de l'éventuel point de concours de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On suppose que (AB') est parallèle à (BA') et que (BC') est parallèle à (CB'). Alors (AC') est parallèle à (CA').*



Démonstration. — Notons P la direction de $\mathscr{P}$. Distinguons deux cas, selon que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles ou concourantes.

(1) Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles, les hypothèses entraînent que $(ABA'B')$ et $(CBC'B')$ sont des parallélogrammes, d'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$ et $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB'}$. Alors on a :

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CA'}$$

et donc (AC') et (CA') sont parallèles.

(2) Supposons $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ concourantes en un point O, qu'on prend comme origine de $\mathscr{P}$. Prenant une base (e_1, e_2) de P où e_1 (resp. e_2) est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$), nos points ont les coordonnées suivantes : $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$, $A'(0, a')$, $B'(0, b')$, $C'(0, c')$, où a, b, c sont distincts et non nuls, et de même pour a', b', c'. Par hypothèse, les vecteurs

[12] Mathématicien grec du IVème siècle (dates approximatives : 290-350).

$\overrightarrow{AB'} = (-a, b')$ et $\overrightarrow{BA'} = (-b, a')$ d'une part, et $\overrightarrow{BC'} = (-b, c')$ et $\overrightarrow{CB'} = (-c, b')$ d'autre part, sont non nuls et liés, donc il existe $\lambda, \mu \in k^\times$ tels que

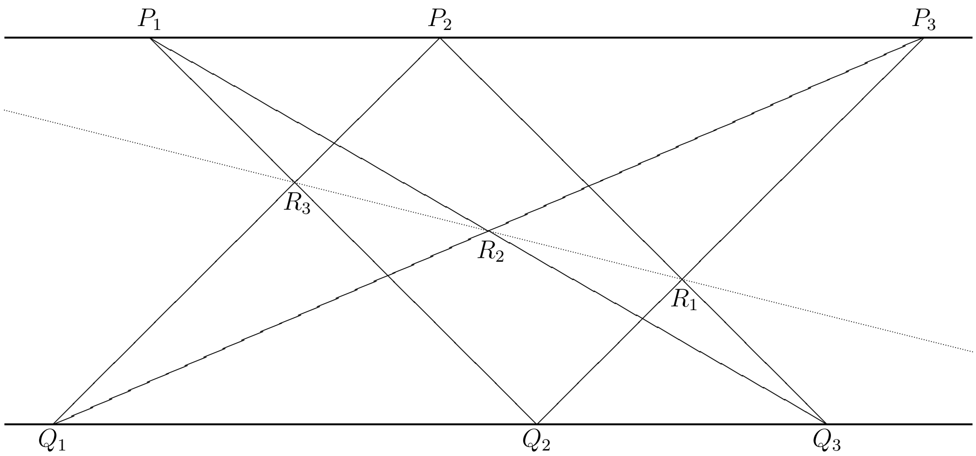
$$\begin{cases} b' = \lambda a' \\ a = \lambda b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c' = \mu b' \\ b = \mu c \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} c' = \mu\lambda a' \\ a = \lambda\mu c \end{cases}$$

Comme $\mu\lambda = \lambda\mu$,[13] on obtient que : $\overrightarrow{AC'} = (-a, c') = \lambda\mu(-c, a') = \lambda\mu\overrightarrow{CA'}$, et donc (AC') est parallèle à (CA').

□

Du théorème précédent on déduit le :

***Théorème 9.6* (de Pappus « projectif »).** — *Dans un plan projectif $\mathbb{P}(V)$, soient $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ deux droites distinctes et P_1, P_2, P_3 (resp. Q_1, Q_2, Q_3) trois points distincts situés sur $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) et distincts du point de concours de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On note R_3 le point de concours des droites (P_1Q_2) et (P_2Q_1) et l'on définit de même R_2 et R_1, cf. la figure ci-dessous :*



Alors les points R_1, R_2, R_3 sont alignés.

Démonstration. — On a bien sûr envie de poser $\mathscr{D}_\infty = (R_1R_2)$ et d'appliquer la théorème 9.5 dans le plan affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$. Pour cela, il faut s'assurer que les points P_i et Q_j sont dans U, i.e. ne sont pas sur la droite (R_1R_2). Ceci « se voit » sur la figure ci-dessus, et on peut le démontrer comme suit :

(i) Les points R_i sont deux à deux distincts. En effet, si on avait par exemple $R_1 = R_2 = S$, les points $P_3SQ_1Q_2$ seraient alignés, d'où $P_3 \in \mathscr{D}'$, contradiction.

(ii) Aucun P_i ou Q_j n'appartient à la droite (R_1R_2). En effet, vis-à-vis de (R_1R_2), les points P_1, P_2, Q_1, Q_2 d'une part, et P_3, Q_3 d'autre part, jouent le même rôle, donc il suffit de le vérifier pour P_1 et P_3. Si on avait $P_1 \in (R_1R_2)$, les points $P_1R_1R_2Q_3P_2$ seraient alignés, d'où $Q_3 \in \mathscr{D}$, contradiction. Et si on avait $P_3 \in (R_1R_2)$, les points $P_3R_1R_2Q_1Q_2$ seraient alignés, d'où $P_3 \in \mathscr{D}'$, contradiction.

Prenons alors la droite (R_1R_2) comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$. Alors dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$, les droites affines (P_3Q_2) et (P_2Q_3), d'une part, et (P_1Q_3) et (P_3Q_1) d'autre part, ne se coupent pas donc sont parallèles. D'après le théorème de Pappus affine, les droites affines (P_2Q_1) et (P_1Q_2) sont donc parallèles, donc dans $\mathbb{P}(V)$ leur point d'intersection R_3 appartient à la droite $\mathscr{D}_\infty = (R_1R_2)$. Ceci montre que R_1, R_2, R_3 sont alignés. □

Et de cette version projective, on déduit la variante affine suivante :

[13] On fait cette remarque car on peut définir la notion d'espaces vectoriels et d'espaces affines sur un corps k éventuellement non commutatif, et alors la validité du théorème de Pappus est équivalente à la commutativité de k. Le lecteur intéressé pourra consulter [LF, §IV.11].

***Corollaire 9.7* (Version affine de Pappus projectif).** — *Dans un plan affine $\mathscr{P}$, soient $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites distinctes et P_1, P_2, P_3 (resp. Q_1, Q_2, Q_3) trois points distincts situés sur $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) et distincts de l'éventuel point de concours de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On suppose que les droites (P_2Q_3) et (P_3Q_2), resp. (P_1Q_3) et (P_3Q_1), se coupent en un point R_1, resp. R_2. Alors :*

a) *ou bien (P_2Q_3) et (P_3Q_2) se coupent en un point R_3 de la droite (R_1R_2),*

b) *ou bien (P_2Q_3) et (P_3Q_2) sont parallèles à la droite (R_1R_2).*

Démonstration. — Plaçons-nous dans le plongement vectoriel $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ de $\mathscr{P}$. Soit R_3 le point de concours des droites projectives (P_2Q_3) et (P_3Q_2), d'après le théorème précédent il appartient à la droite projective (R_1R_2), d'où (a) si $R_3 \in \mathscr{P}$. Au contraire, si $R_3 \in \mathscr{D}_\infty$ alors c'est le point à l'infini de chacune des droites affines (R_1R_2), (P_2Q_3) et (P_3Q_2), donc ces trois droites sont parallèles. $\square$

9.3. Théorème de Desargues. — [14]

***Théorème 9.8* (de Desargues affine).** — *Dans un plan affine, soient A, B, C, A', B', C' six points distincts, avec A, B, C (resp. A', B', C')* non alignés. *On suppose que :*

a) *les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont deux à deux distinctes,*

b) *les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, ainsi que les droites (AC) et $(A'C')$.*

Alors les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles si et seulement si les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles.

Démonstration. — L'hypothèse (b) entraîne qu'il existe $\lambda, \mu \in k^\times$ tels que $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{AC}$. On a donc

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'B'} = \mu\overrightarrow{AC} - \lambda\overrightarrow{AB},$$

et comme $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ sont linéairement indépendants, $\overrightarrow{B'C'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\mu = \lambda$. On a donc :

$$(1) \qquad (BC) \text{ et } (B'C') \text{ parallèles} \iff \lambda = \mu.$$

D'autre part, remarquons que les droites (AB) et $(A'B')$ sont *distinctes*, car sinon $ABA'B'$ seraient alignés et l'on aurait $(AA') = (BB')$, contrairement à l'hypothèse (a). De même, $(AC) \neq (A'C')$. Alors on a les équivalences suivantes : $\lambda = 1 \Leftrightarrow ABB'A'$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ (AA') est parallèle à (BB'), et de même : $\mu = 1 \Leftrightarrow ACC'A'$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ (AA') est parallèle à (CC'). Par conséquent, on a :

$$(2) \qquad \lambda = 1 = \mu \iff (AA'), (BB') \text{ et } (CC') \text{ sont parallèles.}$$

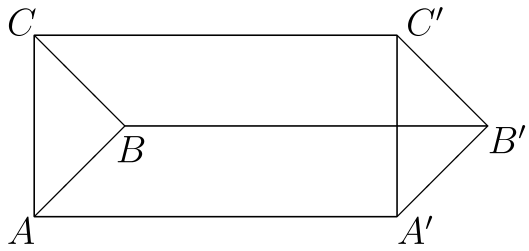
Et si $\lambda \neq 1$, alors les droites (AA') et (BB') se coupent en un point O, et d'après le théorème de Thalès, on a $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$, d'où $\boxed{\overrightarrow{AO} = (1-\lambda)^{-1}\overrightarrow{AA'}.}$ De même, si $\mu \neq 1$, alors les droites (AA') et (CC') se coupent en un point T, et d'après le théorème de Thalès, on a $\overrightarrow{TA'} = \mu\overrightarrow{TA}$, d'où $\boxed{\overrightarrow{AT} = (1-\mu)^{-1}\overrightarrow{AA'}.}$ On en déduit que $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ssi $\lambda \neq 1$, $\mu \neq 1$, et $T = O$. Or $T = O$ équivaut à $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AO}$ et donc à $\mu = \lambda$. Donc finalement :

$$(3) \qquad (AA'), (BB') \text{ et } (CC') \text{ sont concourantes} \iff \lambda = \mu \neq 1.$$

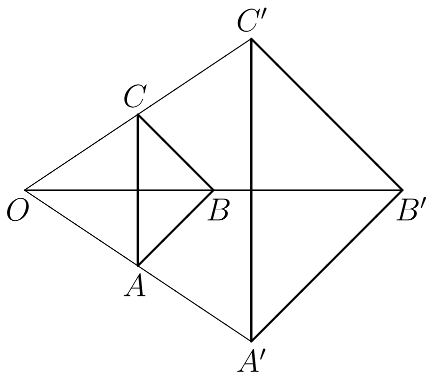
[14] Girard Desargues (1591-1661) mathématicien et architecte français, contemporain de Fermat (1601-1665) et de Descartes (1596-1650). Par ailleurs, il eut pour élève vers 1640 le jeune Blaise Pascal (1623-1662).

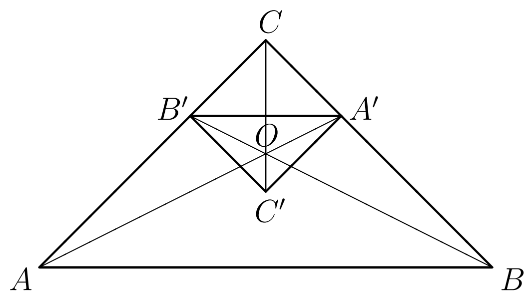
En combinant (1), (2) et (3), on obtient bien que (BC) et $(B'C')$ sont parallèles si et seulement si $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles. Lorsque $k = \mathbb{R}$, on peut illustrer les deux cas par les figures suivantes. □

Lorsque (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles, il y a essentiellement une figure :

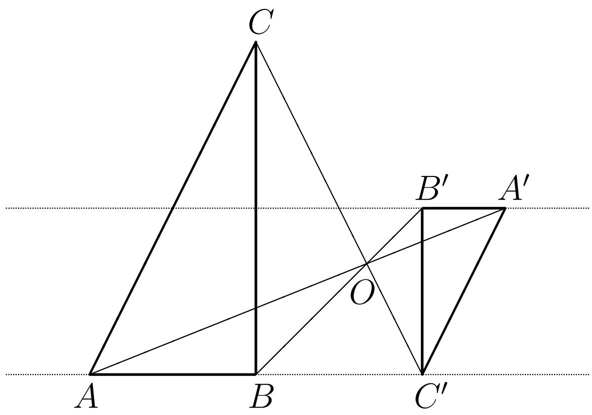


Si (AA'), (BB') et (CC') se coupent en un point O, le triangle $A'B'C'$ est l'image de ABC par une homothétie de centre O et de rapport λ, et la figure est différente selon le signe de λ :





Remarquons que le second cas contient aussi le cas « dégénéré » où, par exemple, ABC' sont alignés :

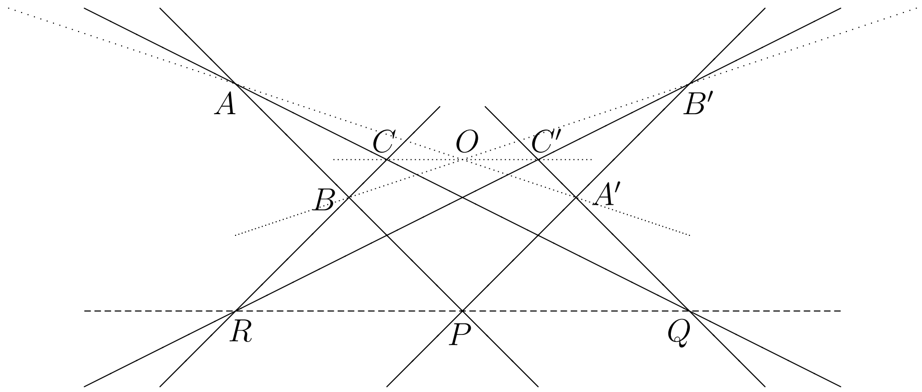


Du théorème précédent on déduit :

***Théorème 9.9* (de Desargues projectif).** — *Dans un plan projectif, considérons six points distincts A, B, C, A', B', C'. On suppose :*

a) *A, B, C (resp. A', B', C') sont* non alignés.
b) *Les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont deux à deux* distinctes.

Notons P, resp. Q, resp. R, l'unique point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$, resp. (AC) et $(A'C')$, resp. (BC) et $(B'C')$. Alors P, Q, R sont alignés si et seulement si les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en un point O.



Démonstration. — (1) Remarquons d'abord que les points P, Q, R sont bien définis, car les droites (AB) et $(A'B')$ sont *distinctes*, ainsi que (AC) et $(A'C')$ d'une part, et (BC) et $(B'C')$ d'autre part. En effet, comme $(AA') \neq (BB')$, les points $ABA'B'$ ne sont pas alignés donc (AB) et $(A'B')$ se coupent en un unique point P, et de même pour Q et R.

(2) Remarquons de plus que P, Q, R sont deux à deux distincts. En effet, supposons par exemple que $P = R$ et notons provisoirement M ce point. Comme $B \neq B'$ alors M ne peut être simultanément égal à B et à B'. Supposons par exemple $M \neq B$. Alors la droite $(BM) = (BP) = (BR)$ contient A (car ABP sont alignés) et aussi C (car BCR sont alignés). Donc A, B, C sont alignés, contradiction. Ceci montre que P, Q, R sont bien deux à deux distincts.

(3) Démontrons maintenant l'équivalence annoncée.

(i) Supposons P, Q, R alignés et prenons cette droite comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$. Alors dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$, les droites affines (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, de même que (AC) et $(A'C')$ d'une part, et (BC) et $(B'C')$ d'autre part. Donc, d'après le théorème de Desargues affine, les droites affines $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles, donc les droites projectives correspondantes sont concourantes.

(ii) Réciproquement, supposons les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') concourantes. Prenons la droite (PQ) comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$. Alors dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$, les droites affines (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, de même que (AC) et $(A'C')$, et les droites affines $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles. Donc, d'après le théorème de Desargues affine, les droites affines (BC) et $(B'C')$ sont parallèles, donc les droites projectives correspondantes se coupent sur la droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$, donc $R \in \mathscr{D}_\infty = (PQ)$ et donc P, Q, R sont alignés. □

Et de cette version projective, on déduit la variante affine suivante :

***Corollaire 9.10* (Version affine de Desargues projectif)**

Dans un plan affine $\mathscr{P}$, soit A, B, C, A', B', C' six point distincts. On suppose que A, B, C (resp. A', B', C') sont non alignés *et que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont deux à deux* distinctes. *Alors les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :*

a) *Les paires de droites $\{(AB), (A'B')\}$, $\{(AC), (A'C')\}$, $\{(BC), (B'C')\}$ sont formées de droites parallèles.*

b) *Les droites d'une paire concourent en un point P, celles d'une autre paire en un point $Q \neq P$, et la droite (PQ) est parallèle aux deux droites de la dernière paire.*

c) *Chaque paire de droites est concourante et les points d'intersection P, Q, R sont alignés.*

La démonstration est laissée en exercice. D'autre part, on suggère de faire les 6 dessins correspondant aux cas (a), (b) ou (c), selon que $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles ou bien concourantes.

CHAPITRE 4

SEMAINE 4 : REPÈRES PROJECTIFS, GROUPE $\mathrm{PGL}(V)$ ET BIRAPPORT

Références pour ce chapitre :

[Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013 (Chap. II, §§2.1-2.2), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand

[It] Ilia Itenberg, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2013-2014 (§§2.5-2.8), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~ilia.itenberg

10. Repères projectifs, groupe $\mathrm{PGL}(V)$ et birapports

On fixe un k-espace vectoriel V de dimension $n+1$. On rappelle que $\mathrm{GL}(V)$ désigne le groupe des automorphismes de V (i.e. applications linéaires $V \to V$ bijectives).

10.1. Points projectivement indépendants et repères projectifs. —

Définition 10.1. — On dit que $N+1$ points $p_0, \dots, p_N \in \mathbb{P}(V)$ sont *projectivement indépendants* si le sous-espace projectif qu'ils engendrent (cf. Déf. 8.7) est de dimension N.

Si $N = 1$ (resp. $N = 2$, resp. $N = 3$), ceci équivaut à dire que p_0, p_1 sont *distincts*, resp. que p_0, p_1, p_2 sont *non alignés*, resp. que p_0, p_1, p_2, p_3 sont *non coplanaires*

Remarques 10.2. — (1) Attention, la donnée de $n+1$ points projectivement indépendants de $\mathbb{P}(V)$ ne suffit pas à déterminer des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}(V)$. Ceci revient juste à se donner des droites $D_i = ke_i$, où $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est une base de V, et il reste à préciser un générateur v_i de chaque D_i — ceci à multiplication près des v_i par un scalaire commun λ, d'après le point (2) ci-dessous.

(2) On a défini en semaine 3 les coordonnées homogènes $[x_0, \dots, x_n]$ sur $\mathbb{P}(V)$ associées à une base $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ de V. Remarquons que, pour tout $\lambda \in k^\times$, la base $\lambda\mathscr{B} = (\lambda e_0, \dots, \lambda e_n)$ définit les *mêmes* coordonnées homogènes : en effet, $[x_0, \dots, x_n]$ représente la droite engendrée par le vecteur $v = \sum_i x_i e_i$, resp. le vecteur λv, et il s'agit bien de la même droite !

Définition 10.3. — (i) On dit qu'un $(n+2)$-uplet $(p_0, \dots, p_{n+1})$ de points de $\mathbb{P}(V)$ est un **repère projectif** si $n+1$ quelconques d'entre eux sont projectivement indépendants. On notera $\mathrm{RP}(V)$ l'ensemble des repères projectifs de $\mathbb{P}(V)$.

(ii) Si $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est une base de V, on appellera « repère (projectif) standard » associé à $\mathscr{B}$ le repère $(p_0, \dots, p_{n+1})$ où $p_i = [e_i]$ pour $i = 0, \dots, n$ et $p_{n+1} = [e_0 + \cdots + e_n]$. Remarquons que, pour tout $\lambda \in k^\times$, ce repère est *le même* que celui associé à la base $\lambda\mathscr{B} = (\lambda e_0, \dots, \lambda e_n)$.

10.2. Retour sur les actions de groupes. — Soient X un ensemble et G un groupe (non nécessairement commutatif), dont on note e l'élément neutre. On dit que G **agit** (ou *opère*) à gauche sur X si l'on s'est donné une application $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ vérifiant les deux propriétés : a) $e \cdot x = x$, b) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ pour tout $x \in X$, $g, h \in G$. Souvent on notera simplement gx au lieu $g \cdot x$.

Terminologie 10.4. — Pour tout $x \in X$, le sous-ensemble $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ de X est appelé **l'orbite** de x sous l'action de G, ou simplement la G-*orbite* de x. L'ensemble $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ est un *sous-groupe* de G, appelé le **stabilisateur** de x. On dit que deux éléments $x, y \in X$ sont **conjugués** (sous l'action de G) s'ils sont dans la même orbite. L'ensemble des orbites sera noté X/G et appelé le **quotient** de X par G.

Remarquons que deux orbites distinctes sont *disjointes*,(1) donc les orbites forment une *partition* de X.

Remarquons aussi que $gx = g'x \Leftrightarrow x = g^{-1}g'x \Leftrightarrow h = g^{-1}g'$ appartient à $G_x \Leftrightarrow g' = gh$ avec $h \in G_x$. On voit donc que l'application $G \to Gx$, $g \mapsto gx$ est bijective si et seulement si $G_x = \{e\}$.

Enfin, on dit qu'un élément x_0 de X est un **point fixe** de G si $gx_0 = x_0$ pour tout $g \in G$, i.e. si $G_{x_0} = G$.

Définitions 10.5. — L'action est dite :

(i) *transitive* s'il n'y a qu'une seule orbite.

(ii) *libre* si pour tout $x \in X$ on a $G_x = \{e\}$.

(iii) *fidèle* si $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$, c.-à-d. si l'élément neutre e est le seul élément g de G qui vérifie $gx = x$ pour tout x.

(iv) Dans la semaine 1, on avait dit qu'une action est « simplement transitive » si (i) et (ii) sont vérifiés. Cette terminologie est un peu désuète, donc dans ce cas il vaut mieux dire que l'action est **libre et transitive**.(2)

Exemple 10.6. — L'action naturelle de $G = \mathrm{GL}(V)$ sur V est fidèle (car le seul automorphisme de V qui fixe chaque $v \in V$ est l'application identique id_V), mais elle n'est pas libre.

Lemme 10.7. — *Soit G un groupe agissant à gauche sur X. Alors :*

(i) *Pour tout $x \in X$ et $g \in G$, on a* $\boxed{G_{gx} = gG_xg^{-1}}$(3) *donc :* « deux éléments conjugués ont des stabilisateurs conjugués ».

(ii) $N = \bigcap_{x \in X} G_x$ *est un sous-groupe* distingué *de G.*

(iii) *Le groupe quotient $\overline{G} = G/N$ agit* fidèlement *sur X.*

Démonstration. — (i) Fixons x et g et soit h un élément arbitraire de G. Alors : $h \in G_{gx} \Leftrightarrow hgx = gx \Leftrightarrow g^{-1}hgx = x \Leftrightarrow g^{-1}hg \in G_x \Leftrightarrow h \in gG_xg^{-1}$. Ceci prouve (i).

(ii) peut se déduire de (i), mais nous préférons procéder comme suit. Notons $\mathscr{S}(X)$ le groupe des *permutations* de X, i.e. des bijections de X dans X. Alors se donner une action à gauche de G sur X équivaut à se donner le morphisme de groupes $\phi : G \to \mathscr{S}(X)$ défini par $\phi(g)(x) = gx$. (Exercice : vérifier cette assertion !) Posons $N = \mathrm{Ker}(\phi)$, c'est un sous-groupe distingué de G qu'on appellera « noyau de l'action sur X ». Remarquons que N est formé des $g \in G$ tels que $\phi(g) = \mathrm{id}_X$, i.e. tels que $gx = x$ pour tout $x \in X$. On voit donc que $N = \bigcap_{x \in X} G_x$. Ceci prouve (ii) et montre aussi que l'action est fidèle ssi $\mathrm{Ker}(\phi) = \{e\}$.

(1) En effet, si $z \in Gx \cap Gy$ il existe $g, h \in G$ tels que $z = gx = hy$, alors $x = g^{-1}hy$ donc $Gx \subset Gy$, et de même $Gy \subset Gx$, d'où $Gx = Gy$.

(2) Ainsi, un espace affine de direction V est un ensemble non vide $\mathscr{V}$ muni d'une action (à droite) du groupe abélien V, qui est *libre et transitive*.

(3) Si H est un sous-groupe de G, on rappelle que gHg^{-1} désigne le sous-groupe : $\{ghg^{-1} \mid h \in H\}$.

(iii) Pour tout $g \in G$, notons gN sa classe modulo N, i.e. son image dans G/N. D'après la propriété universelle du groupe quotient, il existe un unique morphisme de groupes $\overline{\phi} : G/N \to \mathscr{S}(X)$ tel que $\overline{\phi}(gN) = \phi(g)$ pour tout $g \in G$. Ceci montre que l'action de G sur X « se factorise » (ou « se descend ») en une action de $\overline{G}$ sur X. De plus, un élément gN de $\overline{G}$ appartient à $\mathrm{Ker}(\overline{\phi})$ ssi $\phi(g) = \mathrm{id}_X$, c.-à-d. ssi $g \in N$. Ceci montre que $\overline{\phi}$ est injectif, donc l'action de $\overline{G}$ sur X est fidèle. □

Le lemme suivant peut être omis en 1ère lecture. Il ne sera utilisé que dans la remarque 10.20.

Lemme 10.8. — *Soit G un groupe agissant à gauche sur X et soit H un sous-groupe* distingué *de G. Alors :*

(i) *G agit sur X/H par $g \cdot Hx = Hgx$ et ceci se factorise en une action de $\overline{G} = G/H$ sur X/H.*
(ii) *Si l'action de G sur X est transitive, l'action de $\overline{G}$ sur X/H l'est aussi.*
(iii) *Si l'action de G sur X est libre, l'action de $\overline{G}$ sur X/H l'est aussi.*

Démonstration. — (i) Pour tout $g \in G$ et $x \in X$, on définit $g \cdot Hx$ comme étant la H-orbite de gx, notée Hgx. Ceci est bien défini car si hx est un autre élément de l'orbite Hx on a $ghx = (ghg^{-1})gx$ et, comme $h' = ghg^{-1} \in H$ puisque H est distingué, on voit que $ghx = h'gx$ et gx définissent la même H-orbite.

Ayant ainsi montré que $g \cdot Hx$ est bien défini, on vérifie immédiatement que c'est une action, car $e \cdot Hx = Hx$ et $g \cdot (g' \cdot Hx) = g \cdot Hg'x = Hgg'x = (gg') \cdot Hx$. De plus, pour tout $h \in H$ et $x \in X$, on a $hHx = Hx$, donc H est contenu dans le noyau de l'action de G sur X/H. Par conséquent, l'action de G se factorise en une action de $\overline{G} = G/H$ telle que $\overline{g} \cdot Hx = Hgx$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$.

(ii) Supposons l'action de G sur X transitive et soient $x_0, x_1 \in X$. Par hypothèse, il existe $g \in G$ tel que $gx_0 = x_1$; alors on a $\overline{g} \cdot Hx_0 = Hx_1$. Ceci montre que l'action de $\overline{G}$ sur X/H est transitive.

(iii) Soient $x \in X$ et $g \in G$ tels que $g \cdot Hx = Hx$, i.e. tels que gx appartienne à Hx. Il existe donc $h \in H$ tel que $gx = hx$ d'où $h^{-1}g \in G_x$. Si $G_x = \{e\}$ (ou, plus généralement, si l'on suppose que $G_x \subset H$), on en déduit $h^{-1}g \in H$ d'où $g \in H$ et donc $\overline{g} = \overline{e}$. Ceci montre que si l'action de G sur X est libre (ou, plus généralement, si elle vérifie $G_x \subset H$ pour tout x), alors l'action de $\overline{G}$ sur X/H est libre. □

10.3. PGL(V) et repères projectifs. —

Définition 10.9. — Soit $H = \{\lambda\, \mathrm{id}_V \mid \lambda \in k^\times\}$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ formé des homothéties. Il est *central* (i.e. pour tout $h \in H$ et $g \in G$ on a $ghg^{-1} = h$) donc a fortiori *distingué*. On peut donc former le groupe quotient $\mathrm{GL}(V)/H$. On le note $\mathrm{PGL}(V)$ et on l'appelle le **groupe projectif** de V. Ses éléments sont appelés *transformations projectives* ou **homographies**.

Notation. Pour tout $g \in \mathrm{GL}(V)$ on notera $\overline{g}$ son image dans $\mathrm{PGL}(V)$.

Proposition 10.10. — $\mathrm{GL}(V)$ *agit librement et transitivement sur l'ensemble des bases de V.*

Démonstration. — Soient $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_0, \dots, e'_n)$ deux bases de V. Comme un endomorphisme de V est déterminé par l'image d'une base, il existe un unique endomorphisme g de V tel que $g(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$, i.e. tel que $g(e_i) = e'_i$ pour $i = 0, \dots, n$ et de plus, comme g transforme une base en une base, c'est un automorphisme de V (dont l'inverse est l'endomorphisme qui à chaque e'_i associe e_i). Il en résulte que g est l'unique élément de $\mathrm{GL}(V)$ tel que $g(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$. La proposition en découle. □

Corollaire 10.11. — *Pour tout entier $N \leq n$,* $\mathrm{GL}(V)$ *agit transitivement sur l'ensemble des familles $(v_0, \dots, v_N)$ de $N+1$ vecteurs linéairement indépendants.*

Démonstration. — Soient $\mathscr{F} = (e_0, \dots, e_N)$ et $\mathscr{F}' = (e'_0, \dots, e'_N)$ deux telles familles. Complétons $\mathscr{F}$ en une base $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ et de même $\mathscr{F}'$ en $\mathscr{B}' = (e'_0, \dots, e'_n)$. D'après la proposition précédente, il existe $g \in \mathrm{GL}(V)$ tel que $g(e_i) = e'_i$ pour $i = 0, \dots, n$, d'où a fortiori $g(\mathscr{F}) = \mathscr{F}'$. □

Proposition 10.12. — (i) $\mathrm{PGL}(V)$ *agit* fidèlement et transitivement *sur* $\mathbb{P}(V)$.

(ii) *Cette action transforme tout sous-espace projectif* $\mathbb{P}(W)$ *en un sous-espace projectif de même dimension.*

(iii) *Elle respecte donc la notion de points projectivement indépendants, donc en particulier transforme tout repère projectif en un repère projectif.*

Démonstration. — Le groupe $G = \mathrm{GL}(V)$ agit sur V et transforme chaque droite en une droite, donc agit sur l'ensemble $\mathbb{P}(V)$ des droites de V. D'après le corollaire précédent, cette action est transitive, car étant données deux droites $D_0 = kv_0$ et $D = kv$, il existe $g \in G$ tel que $gv_0 = v$ d'où $g(D_0) = D$.

Le noyau N de cette action est formé des $g \in \mathrm{GL}(V)$ tels que $g(D) = D$ pour toute droite D donc, d'après le lemme ci-dessous, $N = H$. Donc, d'après le lemme 10.7, l'action de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathbb{P}(V)$ se factorise en une action fidèle de $\mathrm{PGL}(V)$ sur $\mathbb{P}(V)$. De plus, cette action est transitive puisque l'action de $\mathrm{GL}(V)$ l'est. Ceci prouve (i).

(ii) Soit W un sev non nul de V et soit $g \in \mathrm{GL}(V)$. Alors $g(W)$ est un sev de V de même dimension, et pour toute droite D de V on a : $D \subset W \Leftrightarrow g(D) \subset g(W)$. Il en résulte que

$$\overline{g}\big(\mathbb{P}(W)\big) = \{\overline{g}(D) \mid D \in \mathbb{P}(W)\} = \{g(D) \mid D \in \mathbb{P}(W)\} = \mathbb{P}(g(W)).$$

Ceci prouve (ii), et (iii) en découle. □

Lemme 10.13. — *Soit $f : V \to V$ un endomorphisme non nul tel que $f(D) \subset D$ pour toute droite D. Alors f est une homothétie.*

Démonstration. — Si $\dim(V) = 1$ tout endomorphisme non nul est une homothétie. On peut donc supposer $\dim(V) \geq 2$, i.e. $n \geq 1$. Soit $(e_0, \dots, e_n)$ une base de V. L'hypothèse entraîne qu'il existe des scalaires μ_i tels que $f(e_i) = \mu_i e_i$ pour tout i. Fixons un indice $i \geq 1$. Comme e_0 et e_i sont linéairement indépendants, l'hypothèse que $f(e_0 + e_i) = \mu_0 e_0 + \mu_i e_i$ soit colinéaire à $e_0 + e_i$ entraîne que $\mu_i = \mu_0$. Ceci prouve que $f = \mu_0 \,\mathrm{id}_V$ (et $\mu_0 \neq 0$ par hypothèse). □

***Théorème 10.14* (L'action de $\mathrm{PGL}(V)$ sur les repères projectifs)**

(i) *Soient* $(e_0, \dots, e_n)$ *une base de* V *et* $(p_0, \dots, p_{n+1})$ *le repère « standard » associé* (cf. 10.3). *Pour tout repère projectif* $(q_0, \dots, q_{n+1})$, *il existe un* unique *élément* $\overline{g} \in \mathrm{PGL}(V)$ *tel que* $\overline{g}(p_i) = q_i$ *pour* $i = 0, \dots, n+1$.

(ii) *Par conséquent,* $\mathrm{PGL}(V)$ *agit* librement et transitivement *sur l'ensemble* $\mathrm{RP}(V)$ *des repères projectifs de* $\mathbb{P}(V)$.

Démonstration. — Pour $i = 0, \dots, n+1$, choisissons un vecteur v_i tel que $[v_i] = p_i$. Alors $(v_0, \dots, v_n)$ est une base de V donc v_{n+1} s'écrit de façon unique

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Notons g l'élément de $\mathrm{GL}(V)$ défini par $g(e_i) = \lambda_i v_i$ pour $i = 0, \dots, n$, il vérifie $g(p_i) = q_i$ pour $i = 0, \dots, n+1$.

Pour $h \in \mathrm{GL}(V)$ arbitraire, la condition $h([e_i]) = [v_i]$ pour $i = 0, \dots, n$ équivaut à : il existe $\mu_0, \dots, \mu_n \in k^\times$ tels que $h(e_i) = \mu_i v_i$ pour $i = 0, \dots, n$. Sous ces conditions, $h(e_0 + \cdots + e_n) = \mu_0 e_0 + \cdots + \mu_n e_n$ est colinéaire à v_{n+1} ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $\mu_i = \lambda\lambda_i$ pour $i = 0, \dots, n$, c.-à-d. ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $h = \lambda g$, et cette condition équivaut à ce que h et g aient pour image $\overline{g}$ dans $\mathrm{PGL}(V)$. Ceci montre que $\overline{g}$ est l'unique élément de $\mathrm{PGL}(V)$ tel que $\overline{g}(p_i) = q_i$ pour $i = 0, \dots, n+1$. Ceci prouve (i), et (ii) en découle immédiatement. □

10.15. — Conservons les notations de la démonstration et notons $f_i : V \to k$ la forme linéaire définie par $f_i(u) = \mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, u, \dots, v_n)$, où u se trouve à la i-ème place (au lieu de v_i). Comme $v_{n+1} = \lambda_i v_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j v_j$, il résulte des propriétés du déterminant que :

$$f(v_{n+1}) = \mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, \lambda_i v_i, \dots, v_n) = \lambda_i f(v_i),$$

et donc λ_i s'exprime comme un quotient de déterminants :

$$(\dagger) \qquad \lambda_i = \frac{\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, v_{n+1}, \dots, v_n)}{\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, v_i, \dots, v_n)}.$$

Ceci nous sera utile pour définir le birapport sous une forme généralisée (cf. §10.4). Avant cela, signalons l'interprétation plus « géométrique » suivante de la notion de repère projectif.

Proposition 10.16. — *Dans $\mathbb{P}(V)$, il est équivalent de se donner :*

a) *Un repère projectif $(p_0, \dots, p_{n+1})$.*

b) *Un hyperplan $\mathbb{P}(H)$ et un repère affine $(p_0, \dots, p_n)$ de l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$.*

Démonstration. — (i) Le passage de (a) vers (b) est essentiellement contenu dans la preuve du théorème 10.14. En effet, soit $(p_0, \dots, p_{n+1})$ un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$; choisissons pour $i = 0, \dots, n+1$ un vecteur v_i tel que $[v_i] = p_i$. Alors $(v_0, \dots, v_n)$ est une base de V donc v_{n+1} s'écrit de façon unique $v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$. Posons $e_i = \lambda_i v_i$, soit f la forme linéaire sur V définie par $f(e_i) = 1$ pour $i = 0, \dots, n$ et soit $H = \mathrm{Ker}(f)$. Alors $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est une base de V contenue dans l'hyperplan affine $\mathscr{H}_f = \{v \in V \mid f(v) = 1\}$, donc forme un repère affine de $\mathscr{H}_f$, identifié à l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. De plus, p_{n+1} est la droite $k(e_0 + \cdots + e_n)$ et ceci détermine $\mathscr{B}$ à homothétie près, i.e. si $\mathscr{B}' = (e'_0, \dots, e'_n)$ est une autre base de V telle que $p_i = [e'_i]$ pour $i = 0, \dots, n$ et $p_{n+1} = [e'_0 + \cdots + e'_n]$, alors il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $e'_i = \lambda e_i$ pour $i = 0, \dots, n$.

(ii) Réciproquement, supposons donné un hyperplan $\mathbb{P}(H)$ et un repère affine $(p_0, \dots, p_n)$ de l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Fixons un générateur f de H^0 et identifions U à l'hyperplan affine $\mathscr{H}_f$. Chaque droite p_i contient un unique vecteur e_i tel que $f(e_i) = 1$, et comme $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est un repère affine de $\mathscr{H}_f$, c'est une base de V. Si l'on remplace f par $\lambda^{-1} f$, on obtient la base $\lambda\mathscr{B} = (\lambda e_0, \dots, \lambda e_n)$, et quelque soit $\lambda \in k^\times$ le repère standard associé à la base $\lambda\mathscr{B}$ est $(p_0, \dots, p_n, p_{n+1})$ où p_{n+1} est la droite engendrée par $e_0 + \cdots + e_n$. $\square$

Avant de passer à la définition du « $(n+1)$-rapport », signalons les trois bijections suivantes, qui permettent de reformuler les résultats précédents. Ce paragraphe peut être omis en première lecture.[4]

Lemme 10.17. — *Soit $\phi : X \to Y$ une application et soit H un groupe agissant sur X. Supposons ϕ* constante sur les H-orbites, *i.e. $\phi(hx) = \phi(x)$ pour tout $x \in X$ et $h \in H$. Alors :*

(i) *L'application $\overline{\phi} : X/H \to Y$, $Hx \mapsto \phi(x)$ est bien définie.*
(ii) *Elle est surjective si ϕ l'est.*
(iii) *Elle est injective ssi ϕ vérifie la propriété suivante : « si $\phi(x') = \phi(x)$ alors $Hx' = Hx$ ».*

Démonstration. — (i) est clair et (ii) est facile : soit $y \in Y$, comme ϕ est surjective il existe $x \in X$ tel que $y = \phi(x) = \overline{\phi}(Hx)$, donc $\overline{\phi}$ est surjective. Enfin, $\overline{\phi}$ est injective ssi l'égalité de $\overline{\phi}(Hx') = \phi(x')$ avec $\overline{\phi}(Hx) = \phi(x)$ entraîne $Hx' = Hx$. Ceci prouve (iii). $\square$

Notations 10.18. — (1) Notons $\mathbf{B}$ l'ensemble des bases de V et $\mathbf{B}/\!\sim$ le quotient par l'action des homothéties, i.e. deux bases $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_0, \dots, e'_n)$ sont équivalentes ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $\mathscr{B}' = \lambda\mathscr{B}$, i.e. $e'_i = \lambda e_i$ pour $i = 0, \dots, n$. On notera $[\mathscr{B}]$ la classe de $\mathscr{B}$, i.e. son image dans $\mathbf{B}/\!\sim$.

[4] Mais, de l'avis de l'auteur, en seconde lecture ce second point de vue peut aider à mieux comprendre le Th. 10.14 et la Prop. 10.16.

(2) Notons $\mathrm{AH}_\infty(V)$ l'ensemble des couples $(\mathbb{P}(H), A)$ où $\mathbb{P}(H)$ est un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ (choisi comme hyperplan à l'infini) et $A = (p_0, \dots, p_n)$ est un repère affine de l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$.(5)

(3) Pour toute base $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$, posons $A(\mathscr{B}) = (p_0, \dots, p_n) = ([e_0], \dots, [e_n])$ et, notant $f_{\mathscr{B}}$ la forme linéaire définie par $f(e_i) = 1$ pour $i = 0, \dots, n$, posons

$$J(\mathscr{B}) = \big(\mathrm{Ker}(f_{\mathscr{B}}), A(\mathscr{B})\big) \in \mathrm{AH}_\infty(V).$$

Le repère standard $R(\mathscr{B})$ associé à $\mathscr{B}$ s'obtient en ajoutant à $A(\mathscr{B})$ le point $p_{n+1} = [e_0 + \cdots + e_n]$. Enfin, notons $C(\mathscr{B})$ les coordonnées homogènes $[x_0, \dots, x_n]$ définies par $\mathscr{B}$.

***Proposition 10.19* (Trois bijections).** — *Les applications J,R et C définies plus haut se factorisent par $\mathbf{B}/\!\sim$ et induisent des* bijections $\overline{J}$, $\overline{R}$ *et* $\overline{C}$ *:*

$$\begin{array}{ccccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{systèmes de} \\ \textit{coord. homog.} \end{array} \right\} & \xleftarrow{\ \overline{C}\ } & \mathbf{B}/\!\sim & \xrightarrow{\ \overline{R}\ } & \mathrm{RP}(V) \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{J}} & & \\ & & \mathrm{AH}_\infty(V) & & \end{array}$$

Démonstration. — C est surjective car, par définition, tout système de coordonnées homogènes provient d'une base. On a déjà remarqué en 10.2 que si $\mathscr{B}' \sim \mathscr{B}$ alors $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$ définissent les mêmes coordonnées homogènes. Donc C se factorise en une application $\overline{C}$ qui est surjective. Montrons qu'elle est injective. Supposons que $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_0, \dots, e'_n)$ définissent les mêmes coordonnées homogènes. Alors, pour tout $i = 0, \dots, n$, la coordonnée homogène $[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$, où le 1 est à la i-ème place, correspond à $[e_i]$ et à $[e'_i]$ donc il existe des scalaires $\mu_i \neq 0$ tels que $e'_i = \mu_i e_i$ pour $i = 0, \dots, n$. De plus, la coordonnée homogène $[1, \dots, 1]$ correspond à $[e_0 + \cdots + e_n]$ et aussi à $[e'_0 + \cdots + e'_n]$; il existe donc $\mu \in k^\times$ tel que $\mu_0 e_0 + \cdots + \mu_n e_n = \mu(e_0 + \cdots + e_n)$, d'où $\mu_i = \mu$ pour tout i et donc $\mathscr{B}' = \mu\mathscr{B}$. D'après le lemme 10.17, ceci montre que $\overline{C}$ est injective et surjective. C'est donc une bijection.

Montrons que R et J sont surjectives. Soit $A = (p_0, \dots, p_n) = ([v_0], \dots, [v_n])$ un $(n+1)$-uplet de points projectivement indépendants et soient, respectivement, $p_{n+1} = [v_{n+1}]$ un point tel que $\mathscr{R} = (p_0, \dots, p_{n+1})$ soit un repère projectif, et $H = \mathrm{Ker}(f)$ un hyperplan de V tel que $p_0, \dots, p_n$ appartiennent à $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Alors $(v_0, \dots, v_n)$ est une base de V et :

(1) Dans le premier cas, v_{n+1} s'écrit de façon unique $v_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$ et l'hypothèse que $\mathscr{R}$ soit un repère projectif entraîne que chaque λ_i est non nul. Posant alors $e_i = \lambda_i v_i$, on obtient que $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est une base de V telle que $p_i = [e_i]$ pour $i = 0, \dots, n$ et $p_{n+1} = [e_0 + \cdots + e_n]$, i.e. $\mathscr{R} = R(\mathscr{B})$.

(2) Dans le second cas, on a $f(v_i) \neq 0$ pour $i = 0, \dots, n$. Posant alors $e_i = f(v_i)^{-1} v_i$, on obtient que $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est une base de V telle que $p_i = [e_i]$ pour $i = 0, \dots, n$ et $f_{\mathscr{B}} = f$, d'où $H = \mathrm{Ker}(f_{\mathscr{B}})$ et donc $(H, A) = J(\mathscr{B})$.

Ceci montre que R et J sont surjectives. On a déjà remarqué en 10.2 que $\mathscr{B}$ et $\lambda\mathscr{B}$ définissent le même repère projectif ; d'autre part $f_{\mathscr{B}} = \lambda f_{\lambda\mathscr{B}}$ donc on a aussi $J(\lambda\mathscr{B}) = J(\mathscr{B})$. Donc R et J induisent des applications $\overline{R} : \mathbf{B}/\!\sim \longrightarrow \mathrm{RP}(V)$ et $\overline{J} : \mathbf{B}/\!\sim \longrightarrow \mathrm{AH}_\infty(V)$ qui sont surjectives.

Montrons qu'elles sont aussi injectives. Soient $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_0, \dots, e'_n)$ deux bases ayant même image par R (resp. J). Alors les égalités $[e_i] = p_i = [e'_i]$ entraînent qu'il existe des scalaires $\mu_i \neq 0$ tels que $e'_i = \mu_i e_i$ pour $i = 0, \dots, n$. De plus :

(1) Dans le cas de R, l'égalité $[e_0 + \cdots + e_n] = p_{n+1} = [e'_0 + \cdots + e'_n]$ entraîne qu'il existe $\mu \in k^\times$ tel que $\mu_0 e_0 + \cdots + \mu_n e_n = \mu(e_0 + \cdots + e_n)$, d'où $\mu_i = \mu$ pour tout i.

(2) Dans le cas de J, l'égalité $\mathrm{Ker}(f_{\mathscr{B}}) = H = \mathrm{Ker}(f_{\mathscr{B}'})$ entraîne qu'il existe $\mu \in k^\times$ tel que $f_{\mathscr{B}} = \mu f_{\mathscr{B}'}$. Alors, pour tout $i = 0, \dots, n$ on a :

$$\mu = \mu f_{\mathscr{B}'}(e'_i) = f_{\mathscr{B}}(e'_i) = f_{\mathscr{B}}(\mu_i e_i) = \mu_i.$$

Dans les deux cas, on obtient que $\mathscr{B}' = \mu\mathscr{B}$. D'après le lemme 10.17, ceci montre que $\overline{R}$ (resp. $\overline{J}$) est injective et surjective. C'est donc une bijection. Ceci achève la démonstration. □

Remarque 10.20. — La démonstration du fait que $\overline{J}$, resp. $\overline{R}$, soit une bijection est quasiment identique à celle de la Prop. 10.16, resp. du Th. 10.14. Et ce dernier se déduit de la proposition précédente grâce au lemme 10.8. En effet, $G = \mathrm{GL}(V)$ agit librement et transitivement sur l'ensemble $\mathbf{B}$ des bases de V et $\mathbf{B}/\!\sim$ n'est autre que le quotient de $\mathbf{B}$ par le sous-groupe H (central donc distingué) des homothéties.

(5) D'après la Prop.10.16, ceci fournit une interprétation plus « géométrique » de la notion de repère projectif.

Donc, d'après le lemme 10.8, le groupe quotient $\overline{G} = G/H = \mathrm{PGL}(V)$ agit librement sur $\mathbf{B}/\sim$ et aussi sur $\mathrm{RP}(V)$, car la bijection $\overline{R}$ « respecte l'action de $\overline{G}$ », i.e. $\overline{R}([g\mathscr{B}]) = \overline{g}\,\overline{R}(\mathscr{B})$ pour tout $g \in G$ et $\mathscr{B} \in \mathbf{B}$.

10.4. Le quotient de $\mathrm{RP}(V) \times \mathbb{P}(V)$ par $\mathrm{PGL}(V)$. —

La définition du birapport de quatre points (dont trois distincts) dans une droite projective repose sur le lemme simple mais important suivant.

Lemme 10.21. — *Soit G un groupe agissant sur deux ensembles Y et Z ; il agit alors sur $X = Y \times Z$ par $g(y,z) = (gy, gz)$. On suppose que l'action sur Y est* libre et transitive *et l'on fixe un point $y_0 \in Y$. Alors :*

(i) *Pour tout $(y,z) \in X$, il existe un unique $u \in Z$ tel que (y,z) et (y_0,u) soient dans la même orbite. Ceci définit une application $\phi : X \to Z$, $(y,z) \mapsto u$.*

(ii) *ϕ est* constante sur les G-orbites, *i.e. $\phi(gy,gz) = \phi(y,z)$ pour tout $g \in G$.*

(iii) *L'application $\overline{\phi} : X/G \to Z$ définie par $\overline{\phi}(Gx) = \phi(x)$ est une* bijection *de X/G sur Z, dont la bijection réciproque est l'application $Z \to X/G$, $u \mapsto G(y_0,u)$.*

Démonstration. — Soient $y \in Y$ et $z,u \in Z$. Si (y,z) et (y_0,u) sont dans la même orbite, il existe $g \in G$ tel que $gy_0 = y$ et $gu = z$.

Comme l'action de G sur Y est libre et transitive, la condition $gy_0 = y$ détermine un *unique* élément $g \in G$ et alors il existe un unique u tel que $gu = z$, à savoir $u = g^{-1}z$. Ceci définit donc une application $\phi : X \to Z$, $(y,z) \mapsto u$.

Cette application est *constante* sur les orbites de G dans X : en effet, si $h \in G$ et si $x' = (hy, hz)$, alors hg est l'unique élément de G vérifiant $hgy_0 = hy$ et donc on a

$$\phi(x') = (hg)^{-1}hz = g^{-1}h^{-1}hz = g^{-1}z = \phi(y,z).$$

Par conséquent, l'application $\overline{\phi} : X/G \to Z$ qui à toute G-orbite Gx associe $\phi(x)$ est bien définie.

Notons $\psi : Z \to X/G$ l'application qui à tout $u \in Z$ associe la G-orbite de (y_0,u). Alors, $\overline{\phi}(\psi(u)) = u$ pour tout $u \in Z$. D'autre part, pour tout $x = (y,z) \in X$ on a vu que $u = \phi(y,z)$ est l'unique élément de Z tel que $Gx = G(y_0,u) = \psi(u)$; on a donc $Gx = \psi(\phi(x)) = \psi(\overline{\phi}(Gx))$. Ceci montre que $\overline{\phi}$ et ψ sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Le lemme est démontré. ☐

D'après le théorème 10.14, l'action de $G = \mathrm{PGL}(V)$ sur l'ensemble $Y = \mathrm{RP}(V)$ des repères projectifs de $\mathbb{P}(V)$ est libre et transitive. Posons $Z = \mathbb{P}(V)$, alors $X = Y \times Z$ est l'ensemble des $(n+3)$-uplets $(p_0,\dots,p_{n+2}) \in \mathbb{P}(V)^{n+3}$ tels que les $n+2$ premiers points $(p_0,\dots,p_{n+1})$ forment un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$.

D'après le lemme précédent, le choix d'un repère projectif $\mathscr{R}_0$ fournit une bijection ϕ entre le quotient $E = X/G$ et $Z = \mathbb{P}(V)$. De plus, ϕ est donnée explicitement par le théorème suivant :

Théorème 10.22 **(« du $(n+1)$-rapport »)**. — [6] *Posons $X = \mathrm{RP}(V) \times \mathbb{P}(V)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de V, notons $(p_0,\dots,p_{n+1})$ le repère projectif associé et $[\xi_0,\dots,\xi_n]$ les coordonnées homogènes correspondantes.*

(i) *L'application ϕ, qui à tout $(n+3)$-uplet $x = ([v_0],\dots,[v_{n+2}]) \in X$ associe l'unique point α de $\mathbb{P}(V)$ tel que $(p_0,\dots,p_{n+1},\alpha)$ et x soient dans la même orbite de $G = \mathrm{PGL}(V)$,*

[6] Cette terminologie est due à l'auteur, donc n'est peut-être pas standard.

est donné en coordonnées homogènes par : pour tout $i = 0, \ldots, n$,

$$(\star) \qquad \xi_i(\alpha) = \frac{\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \ldots, \overset{i\text{-ème place}}{\overset{\downarrow}{v_{n+2}}}, \ldots, v_n)}{\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \ldots, \underset{i\text{-ème place}}{\underset{\uparrow}{v_{n+1}}}, \ldots, v_n)}$$

(ii) *De plus, cette application est constante sur les orbites de G dans X et induit une bijection $\overline{\phi}$ de l'ensemble quotient $E = X/G$ sur $\mathbb{P}(V)$.*

Démonstration. — Que l'application ϕ soit constante sur les G-orbites et induise une bijection $\overline{\phi}$ de X/G sur $\mathbb{P}(V)$ résulte du lemme 10.21, donc la seule chose à démontrer est la formule explicite $(\star)$. Donnons deux démonstrations.

Première démonstration. D'après le lemme 10.21, on sait qu'il existe $g \in \mathrm{GL}(V)$, unique à homothétie près, tel que $[ge_i] = [v_i]$ pour $i = 0, \ldots, n+1$, et alors l'élément α cherché est égal à $[g^{-1}v_{n+2}]$. En remplaçant g par g^{-1}, on peut reformuler ceci en disant qu'il existe $g \in \mathrm{GL}(V)$, unique à homothétie près, tel que

$$(*) \qquad [gv_i] = [e_i] \quad \text{pour } i = 0, \ldots, n+1,$$

et alors l'élément α cherché est égal à $[gv_{n+2}]$. Il suffit donc d'exhiber un élément $g \in \mathrm{GL}(V)$ vérifiant $(*)$, et alors on aura $\alpha = [gv_{n+2}]$. Fixons les vecteurs $v_0, \ldots, v_{n+1}$ et, pour tout $j = 0, \ldots, n$ notons $f_j : V \to k$ la forme linéaire définie par $f_j(u) = \mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \ldots, u, \ldots, v_n)$, où u se trouve à la j-ème place (au lieu de v_j). Remarquons que comme $([v_0], \ldots, [v_{n+1}])$ est un repère projectif, alors $f_j(v_j)$ et $f_j(v_{n+1})$ sont *non nuls*. Par contre, pour $i \in \{0, \ldots, n\} - \{j\}$ on a $f_j(v_i) = 0$ car le vecteur v_i apparaît alors deux fois.

Soit g l'endomorphisme de V qui à tout $u \in V$ associe le vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B} = (e_0, \ldots, e_n)$ sont :

$$\Big(\frac{f_0(u)}{f_0(v_{n+1})}, \ldots, \frac{f_n(u)}{f_n(v_{n+1})}\Big).$$

D'après les remarques précédentes, ceci est bien défini car $f_j(v_{n+1}) \neq 0$ pour tout j, et pour tout $i = 0, \ldots, n$, le vecteur $g(v_i)$ a toutes ses coordonnées nulles sauf la i-ème, qui vaut $f_i(v_i)/f_i(v_{n+1})$. On a donc $[g(v_i)] = [e_i] = p_i$ pour $i = 0, \ldots, n$. De plus, il est clair que $g(v_{n+1}) = (1, \ldots, 1)$ donc $[g(v_{n+1})] = p_{n+1}$. Donc g est bien l'élément cherché (unique à homothétie près), d'où $\alpha = [g(v_{n+2})]$ et donc les coordonnées homogènes de α sont :

$$\xi_i(\alpha) = \frac{f_i(v_{n+2})}{f_i(v_{n+1})} = \frac{\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \ldots, \overset{i\text{-ème place}}{\overset{\downarrow}{v_{n+2}}}, \ldots, v_n)}{\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \ldots, \underset{i\text{-ème place}}{\underset{\uparrow}{v_{n+1}}}, \ldots, v_n)}$$

On peut se demander d'où vient la formule $(\star)$. Pour cette raison, nous donnons la :

Deuxième démonstration. Déterminons une matrice $A \in M_{n+1}(k)$ telle que $[Ae_i] = [v_i]$ pour $i = 0, \ldots, n+1$: une telle A est unique à homothétie près et alors $\alpha = [A^{-1}v_{n+2}]$. Pour $i = 0, \ldots, n$, la condition $[Ae_i] = [v_i]$ entraîne que la i-ème colonne de A, notons-la C_i, égale $\lambda_i v_i$ pour un certain $\lambda_i \in k^\times$. D'après la remarque 10.15, la condition $A(e_0 + \cdots + e_n) = v_{n+1}$ donne les formules

$$(\dagger) \qquad \forall i = 0, \ldots, n, \qquad \lambda_i = \frac{\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \ldots, v_{n+1}, \ldots, v_n)}{\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \ldots, v_i, \ldots, v_n)},$$

qui déterminent donc la matrice A. Notons $\mathrm{Com}(A)$ la matrice des cofacteurs, i.e. $\mathrm{Com}(A)_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)$ alors $A^{-1} = \mathrm{dét}(A)^{-1}\,{}^t\mathrm{Com}(A)$ donc $\alpha = [A^{-1}v_{n+2}] = [{}^t\mathrm{Com}(A)v_{n+2}]$. Enfin, les coordonnées de ${}^t\mathrm{Com}(A)v_{n+2}$ sont données par les « formules de Cramer » : notant $(y_0, \ldots, y_n)$ les coordonnées de v_{n+2}, la i-ème coordonnée x_i de ${}^t\mathrm{Com}(A)v_{n+2}$ vaut

$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{i+j}\Delta_{ji}(A)y_j$ et l'on reconnaît là le développement suivant la i-ème colonne du déterminant $\text{dét}_{\mathscr{B}}(C_0,\dots,v_{n+2},\dots,C_n)$, où v_{n+2} est la i-ème colonne. Comme $C_j=\lambda_j v_j$ pour $j\neq i$, on obtient donc que :

$$x_i=\text{dét}_{\mathscr{B}}(C_0,\dots,v_{n+2},\dots,C_n)=\text{dét}_{\mathscr{B}}(v_0,\dots,v_{n+2},\dots,v_n)\times\prod_{j\neq i}\lambda_j$$

et tenant compte de la formule (†) pour les λ_j, on obtient que les coordonnées homogènes de α sont données, à homothétie près, par :

$$\xi_i(\alpha)=\text{dét}_{\mathscr{B}}(v_0,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{-ème place}}}{v_{n+2}},\dots,v_n)\times\prod_{j\neq i}\text{dét}_{\mathscr{B}}(v_0,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{-ème place}}}{v_{n+1}},\dots,v_n). \tag{1}$$

En divisant chaque $\xi_i(\alpha)$ par le scalaire $\prod_{j=0}^{n}\text{dét}_{\mathscr{B}}(v_0,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{-ème place}}}{v_{n+1}},\dots,v_n)$, on obtient que α a aussi pour coordonnées homogènes les $(n+1)$ rapports indiqués en $(\star)$. □

10.5. Birapport. — Soit $\mathbf{D}=\mathbb{P}(W)$ une droite projective (i.e. $\dim(W)=2$). Dans ce cas, trois points p_1,p_2,p_3 de $\mathbf{D}$ forment un repère projectif ssi ils sont deux à deux distincts. Soit $\mathscr{B}=(e_0,e_1)$ une base de W et notons $[x,y]$ les coordonnées homogènes correspondantes. Il est d'usage de prendre pour point à l'infini ∞ le point $[1,0]=[e_0]$; alors on identifie la droite affine $U=\{[x,y]\mid y\neq 0\}$ à k par la bijection $[x,y]\mapsto\dfrac{x}{y}$ (dont l'inverse est $t\mapsto[t,1]$). On désigne donc par 0 et 1 les points $[0,1]=[e_1]$ et $[1,1]=[e_0+e_1]$. (De plus, pour tout $x\neq 0$, on a « $x/0=\infty$ ».)

Définition et proposition 10.23 **(Birapport)**. —

(i) *Soient p_1, p_2, p_3, p_4 quatre points de* $\mathbf{D}$, *avec p_1, p_2, p_3 deux à deux distincts. Leur* **birapport** *est l'unique élément α de* $\mathbf{D}$ *tel que (p_1,p_2,p_3,p_4) et $(\infty,0,1,\alpha)$ soient dans la même orbite de $G=\mathrm{PGL}(W)$. On le note $[p_1,p_2,p_3,p_4]$. En d'autres termes, si g est l'unique élément de G tel que $g(p_1)=\infty$, $g(p_2)=0$ et $g(p_3)=1$, alors $[p_1,p_2,p_3,p_4]=g(p_4)$.*

(ii) *Notant $[x_i,y_i]$ les coordonnées homogènes de p_i, on a :*

$$\alpha=\big[(x_4y_2-x_2y_4)(x_1y_3-x_3y_1),(x_1y_4-x_4y_1)(x_3y_2-x_2y_3)\big].$$

Si de plus on a $p_i\in U$ et qu'on écrit $p_i=[x_i,1]$, alors

$$\alpha=\big[(x_4-x_2)(x_1-x_3),(x_1-x_4)(x_3-x_2)\big]=\left[\frac{x_4-x_2}{x_3-x_2},\frac{x_4-x_1}{x_3-x_1}\right].$$

(C'est cette dernière expression qui explique le nom de birapport.*)*

Démonstration. — Tout ceci découle du théorème 10.22, dans le cas $n=1$. □

10.6. Retour sur les homographies et le $(n+1)$-rapport. — [7] La définition des homographies donnée au §10.3 (Déf. 10.9) est trop restrictive et doit être remplacée par la suivante.

Déf. 10.9 revue. — (i) Soient E,F deux k-espaces vectoriels de même dimension $n+1$. Notons $\mathrm{Isom}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes (i.e. applications linéaires bijectives) de E sur F. Il est muni d'une action du groupe multiplicatif $k^\times$: pour tout $\phi\in\mathrm{Isom}(E,F)$ et $x\in E$, $(\lambda\cdot\phi)(x)=\lambda\phi(x)=\phi(\lambda x)$.[8]

[7]Corrections ajoutées le 2/10/14 et traitées en cours au début de la semaine 5.
[8]Donc cette action coïncide avec celle des homothéties de F (ou de E).

Soient $\phi \in \mathrm{Isom}(E,F)$ et $\psi = \phi^{-1} \in \mathrm{Isom}(F,E)$ l'isomorphisme réciproque. Alors ϕ transforme toute droite de E en une droite de F, donc induit une application $\mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$, $D \mapsto \phi(D)$, qu'on notera $\mathbb{P}(\phi)$ ou simplement $\overline{\phi}$. Cette application est bijective, car elle admet pour réciproque l'application $\overline{\psi} : \mathbb{P}(F) \to \mathbb{P}(E)$. Notant $\mathrm{Bij}\big(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F)\big)$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(F)$, on obtient donc une application :

$$\mathrm{Isom}(E,F) \longrightarrow \mathrm{Bij}\big(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F)\big), \quad \phi \mapsto \overline{\phi}.$$

Les bijections $\overline{\phi} : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ ainsi obtenues s'appellent des **homographies** de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(F)$, et l'ensemble de ces homographies sera noté $\mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F)\big)$. Si $F = E$, on le notera $\mathrm{PGL}(E)$.

(ii) Notons que l'application $\phi \mapsto \overline{\phi}$ « respecte la composition des applications », i.e. si $\theta \in \mathrm{Isom}(F,V)$ on a $\overline{\theta \circ \phi} = \overline{\theta} \circ \overline{\phi}$. Par conséquent, l'application $\mathrm{GL}(E) \to \mathrm{PGL}(E)$, $\phi \mapsto \overline{\phi}$ est un morphisme de groupes.

Prop. 10.12 revue. — *On conserve les notations précédentes. Soient* $\phi, \psi \in \mathrm{Isom}(E,F)$.

(i) *Alors :* $\overline{\phi} = \overline{\psi} \iff$ *il existe* $\lambda \in k^\times$ *tel que* $\phi = \lambda\psi$. *En particulier, le noyau du morphisme de groupes* $\mathrm{GL}(E) \to \mathrm{PGL}(E)$ *est le sous-groupe* $k^\times \mathrm{id}_E$ *des homothéties de* E, *et donc* $\boxed{\mathrm{PGL}(E) \text{ s'identifie au groupe quotient } \mathrm{GL}(E)/k^\times \mathrm{id}_E.}$

(ii) *Pour tout sev* W *de* E, *on a* $\overline{\phi}(\mathbb{P}(W)) = \mathbb{P}(\phi(W))$, *donc* $\overline{\phi}$ *transforme tout sous-espace projectif de* $\mathbb{P}(E)$ *en un sous-espace projectif de* $\mathbb{P}(F)$ *de même dimension.*

(iii) *Par conséquent, toute homographie* $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ *respecte la notion de points projectivement indépendants, donc en particulier transforme tout repère de* $\mathbb{P}(E)$ *en un repère de* $\mathbb{P}(F)$.

Démonstration. — (i) Il suffit de démontrer la première assertion (la seconde étant un cas particulier). Or, on a : $\overline{\phi} = \overline{\psi}$ si et seulement si $\overline{\psi}^{-1} \circ \overline{\phi} = \overline{\psi^{-1} \circ \phi}$ est l'application identique $\mathrm{id}_{\mathbb{P}(E)}$ de $\mathbb{P}(E)$. Or $f = \psi^{-1} \circ \phi$ est un automorphisme de E et d'après le lemme 10.13 (semaine 3), $\overline{f} = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(E)}$ si et seulement si il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $f = \lambda\, \mathrm{id}_E$, ce qui équivaut à $\phi = \lambda\psi$. Ceci prouve (i).

La démonstration de (ii) et (iii) est identique à celle de (ii) et (iii) de la Prop. 10.12. $\square$

Notation. — Lorsque $E = k^{n+1}$, on désigne $\mathbb{P}(k^{n+1})$ par $\mathbb{P}^n(k)$. Comme k^{n+1} est muni de la base canonique $(e_0, \dots, e_n)$, alors $\mathbb{P}^n(k)$ est muni des coordonnées homogènes « canoniques » $[x_0, \dots, x_n]$ et du repère projectif canonique $(p_0, \dots, p_{n+1}) = ([e_0], \dots, [e_n], [e_0 + \cdots + e_n])$. Par ailleurs, $\mathrm{PGL}(k^{n+1})$ est noté $\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$.

Donc il faut vraiment penser à $\mathbb{P}^n(k)$ comme à « un espace projectif de dimension n muni d'un repère projectif $\mathscr{R}_0$ fixé une fois pour toutes ».

La définition du $(n+1)$-rapport donnée au §10.4 (Th. 10.22) n'est pas tout-à-fait satisfaisante, car l'application $\phi : \mathrm{RP}(V) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ qu'on y a défini dépend du choix d'une base $\mathscr{B}$ de V. En fait, le bon énoncé est le suivant :

Théorèmes 10.14 et 10.22 revus. — *Soit* V *un* k*-espace vectoriel de dimension* $n+1$. *Posons* $X = \mathrm{RP}(V) \times \mathbb{P}(V)$.

(i) *Pour tout* $(q_0, \dots, q_{n+1}) \in \mathrm{RP}(V)$, *il existe un* unique $h \in \mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$ *tel que* $h(p_i) = q_i$ *pour* $i = 0, \dots, n$.

(ii) *Pour* $x = (q_0, \dots, q_{n+1}, q_{n+2})$ *dans* X *et pour* h *comme ci-dessus, on pose* $\phi(x) = h^{-1}(q_{n+2})$. *Ceci définit une application* $\phi : X \to \mathbb{P}^n(k)$.

(iii) ϕ *est constante sur chaque orbite de* $G = \mathrm{PGL}(V)$ *dans* X *et induit une application* $\overline{\phi} : X/G \to \mathbb{P}^n(k)$ *qui est* bijective.

(iv) *ϕ est donnée par la formule suivante : écrivons $q_i = [v_i]$ pour $i = 0, \dots, n$ et choisissons une base $\mathscr{B}$ de V, alors les coordonnées homogènes ξ_i de $\phi(x)$ sont données par :*

$$(\star) \qquad \forall i = 0, \dots, n \qquad \xi_i = \frac{\text{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, \overset{\substack{i\text{-ème place} \\ \downarrow}}{v_{n+2}}, \dots, v_n)}{\text{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ème place}}}{v_{n+1}}, \dots, v_n)}$$

(En particulier, ceci est indépendant du choix de $\mathscr{B}$.)

(v) *Cette application $\phi : \mathrm{RP}(V) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(k)$ est appelée le «* $(n+1)$-rapport *», et le* **birapport** *lorsque $n = 1$.*

Démonstration. — La démonstration de (i) est identique à celle du Th. 10.14 : au lieu de partir d'une base $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ de V on part de la base canonique $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ de k^{n+1}, et l'on obtient un unique élément h qui appartient à $\mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$ au lieu d'être dans $\mathrm{PGL}(V)$. Par conséquent, le point (i) donne une identification canonique :

$$(*) \qquad \mathrm{RP}(V) = \mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big).$$

Via cette identification, l'action naturelle de $G = \mathrm{PGL}(V)$ sur $\mathrm{RP}(V)$ correspond à l'action $(g, h) \mapsto gh = g \circ h$ de G sur $\mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$ et comme celle-ci est libre et transitive, il en est de même de l'action de G sur $\mathrm{RP}(V)$.

Soient $x = (\mathscr{R}, q) \in X$ et $g \in G$, posons $x' = gx = (\mathscr{R}', q')$, où $\mathscr{R}' = g(\mathscr{R})$ et $q' = g(q)$. Soit h l'unique homographie de $\mathbb{P}^n(k)$ sur $\mathbb{P}(V)$ telle que $h(\mathscr{R}_0) = \mathscr{R}$; par définition on a $\phi(x) = h^{-1}(q)$. D'autre part, l'homographie gh envoie $\mathscr{R}_0$ sur $g(\mathscr{R}) = \mathscr{R}'$, donc par définition aussi, on a $\phi(x') = (gh)^{-1}(q') = h^{-1}g^{-1}(g(q)) = h^{-1}(q)$, d'où $\phi(x') = \phi(x)$. Ceci montre que ϕ est constante sur les G-orbites. Elle induit donc une application $\overline{\phi} : X/G \to \mathbb{P}^n(k)$, $Gx \mapsto \phi(x)$.

Pour montrer que $\overline{\phi}$ est bijective, remarquons que pour tout $\alpha \in \mathbb{P}^n(k)$, l'ensemble

$$\theta(\alpha) = \Big\{(h(\mathscr{R}_0), h(\alpha)) \mid h \in \mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)\Big\}$$

est une orbite sous G : en effet, pour toute homographie $h : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}(V)$ *fixée*, on a : $\mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big) = \{gh \mid g \in G\}$ et donc $\theta(\alpha) = G\big(h(\mathscr{R}_0), h(\alpha)\big)$.

Donc θ est une application $\mathbb{P}^n(k) \to X/G$ et l'on a, pour tout $h \in \mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$:

$$(\overline{\phi} \circ \theta)(\alpha) = \phi\big(h(\mathscr{R}_0), h(\alpha)\big) = h^{-1}(h(\alpha)) = \alpha,$$

et $(\theta \circ \phi)(h(\mathscr{R}_0), q) = \theta(h^{-1}(q))$ est la G-orbite de $\big(h(\mathscr{R}_0), h(h^{-1}(q)\big) = (h(\mathscr{R}_0), q)$. Ceci montre que θ et $\overline{\phi}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre, ce qui prouve (iii).

Enfin, fixant une base $\mathscr{B}$ de V, on obtient la formule $(\star)$ exactement comme dans la preuve du théorème 10.22. Mais on voit qu'en fait cette formule ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$, car si $\mathscr{B}'$ est une autre base de V, on a $\text{dét}_{\mathscr{B}'}(\cdot) = \text{dét}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})\,\text{dét}_{\mathscr{B}}(\cdot)$ donc le numérateur et le dénominateur dans la formule $(\star)$ sont tous deux multipliés par le scalaire $\text{dét}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \neq 0$ et donc le quotient est inchangé. Ceci achève la démonstration de cette version revue des théorèmes 10.14 et 10.22. $\square$

Remarque. — En fait, on a une application naturelle :

$$\mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(k), \qquad (h, q) \mapsto h^{-1}(q)$$

et via l'identifiation $\mathrm{RP}(V) = \mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$ obtenue en $(*)$, ϕ n'est autre que cette application.

Corollaire 10.14 bis. — *Soient* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{V}'$ *deux espaces projectifs de même dimension n.*

(i) *Étant donnés des repères projectifs $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ de* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{V}'$*, il existe une* unique *homographie $h : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ telle que $h(\mathscr{R}) = \mathscr{R}'$.*

(ii) *En particulier, si* p_0, p_1, p_2 (*resp.* q_0, q_1, q_2) *sont des points deux à deux distincts d'une droite projective* $\mathbf{D}$ (*resp.* $\mathbf{D}'$), *il existe une* unique *homographie* $h : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ *telle que* $h(p_i) = q_i$ *pour* $i = 0, 1, 2$.

Démonstration. — Le point (i) découle de la démonstration de 10.14 (i). Et lorsque $n = 1$, un repère projectif d'une droite $\mathbf{D}$ n'est autre qu'un triplet de points deux à deux distincts, d'où le point (ii). □

10.7. Homographies et préservation du $(n+1)$-rapport. — [9]

Terminologie 10.24. — Soient $\mathbf{D}, \mathbf{D}'$ deux droites projectives. Un repère projectif de $\mathbf{D}$ (resp. $\mathbf{D}'$) est simplement un triplet de points de $\mathbf{D}$ (resp. $\mathbf{D}'$) qui sont *deux à deux distincts*. Par conséquent, si $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ est une *bijection* alors, pour tout quadruplet $(p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathrm{RP}(\mathbf{D}) \times \mathbf{D}$, les points $(f(p_0), f(p_1), f(p_2))$ forment un repère de $\mathbf{D}'$ et donc le birapport $[f(p_0), f(p_1), f(p_2), f(p_3)]$ est bien défini.

On dira alors que f « *préserve le birapport* » si, pour tout quadruplet $(p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathrm{RP}(\mathbf{D}) \times \mathbf{D}$ on a : $[p_0, p_1, p_2, p_3] = [f(p_0), f(p_1), f(p_2), f(p_3)]$.

Proposition 10.25. — *Soit* $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ *une* bijection *entre deux droites projectives. Alors* f *est une homographie ssi elle préserve le birapport.*

Plus généralement, on a la :

Proposition 10.26. — *Soient* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{V}'$ *deux espaces projectifs de même dimension* n *et soit* $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ *une application* bijective. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un repère projectif* $\mathscr{R} = (q_0, \ldots, q_{n+1})$ *tel que* $f(\mathscr{R}) = (f(q_0), \ldots, f(q_{n+1}))$ *soit un repère projectif de* $\mathbf{V}'$ *et pour tout* $x \in \mathbf{V}$ *on a :*

$$[q_0, \ldots, q_{n+1}, x] = [f(q_0), \ldots, f(q_{n+1}), f(x)].$$

(ii) *L'assertion précédente est vérifiée pour* tout *repère projectif* $\mathscr{R}$ *de* $\mathbf{V}$.

(iii) f *est une homographie.*

On peut résumer ceci en disant que : « f est une homographie ssi elle préserve le $(n+1)$-rapport ».

Démonstration. — Notons $\mathscr{R}_0 = (p_0, \ldots, p_{n+1})$ le repère standard de $\mathbb{P}^n(k)$.

(iii) ⇒ (ii). Supposons que f soit une homographie. Soit $\mathscr{R} = (q_0, \ldots, q_{n+1})$ un repère de $\mathbf{V}$. D'après la Prop. 10.12 revue, $(f(q_0), \ldots, f(q_{n+1}))$ est un repère projectif de $\mathbf{V}'$. Notons h' l'unique homographie de $\mathbf{V}'$ sur $\mathbb{P}^n(k)$ telle $h'(f(q_i)) = p_i$. Alors $h = h' \circ f$ est l'unique homographie de $\mathbf{V}$ sur $\mathbb{P}^n(k)$ telle que $h(\mathscr{R}) = \mathscr{R}_0$. Donc, par définition du $(n+1)$-rapport, on a :

$$[f(q_0), \ldots, f(q_{n+1}), f(x)] = h'(f(x)) = (h' \circ f)(x) = [q_0, \ldots, q_{n+1}, x].$$

(i) ⇒ (iii). Réciproquement, supposons (i) vérifié. Soit h (resp. h') l'unique homographie de $\mathbf{V}$ (resp. $\mathbf{V}'$) sur $\mathbb{P}^n$ telle $h(\mathscr{R})$ (resp. $h'(f(\mathscr{R}))$) égale $\mathscr{R}_0$. Par définition du $(n+1)$-rapport on a :

$$[f(q_0), \ldots, f(q_{n+1}), f(x)] = h'(f(x)) \qquad \text{et} \qquad [q_0, \ldots, q_{n+1}, x] = h(x)$$

et l'égalité de ces deux quantités entraîne $f(x) = h'^{-1}\big(h(x)\big)$, pour tout $x \in \mathbf{V}$. On a donc $f = h'^{-1} \circ h$, ce qui prouve que f est une homographie. □

---

[9] Après les corrections données dans le §10.6 précédent, on reprend la suite du §10.5, qui se terminait par la définition 10.23 du birapport. C'est pourquoi l'énoncé suivant porte le no. 10.24.

CHAPITRE 5

PERSPECTIVITÉS ET PROJECTIONS CENTRALES, INVOLUTIONS D'UNE DROITE PROJECTIVE ET BIRAPPORT

Références pour ce chapitre :

[Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013 (Chap. II, §§2.1-2.2), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand

[Co] H. S. M. Coxeter, Projective Geometry (revised reprint of the 2nd edition, Springer-Verlag, 1994), Chap. 1 et 4-6.

[Gr] André Gramain, Géométrie élémentaire (Hermann, 1997), Chap. VII.

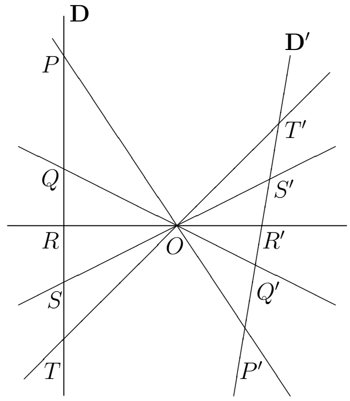
[It] Ilia Itenberg, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2013-2014 (§§2.5-2.8), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~ilia.itenberg

[Sa] Pierre Samuel, Géométrie projective (P.U.F., 1986), Chap. I, §B et Chap. II, §§A-D.

11. Perspectivités et projections centrales, involutions et birapport

11.1. Figures en perspective. — Dans ce paragraphe et le suivant on va essayer de présenter les points de vue de Desargues et de Poncelet[(1)], en suivant l'excellente présentation de Coxeter [Co, Chap. 1]. Plaçons-nous dans un plan projectif $\mathbf{P}$.

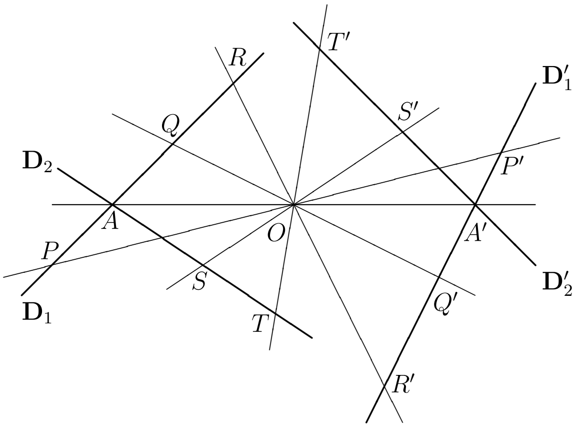
(1) On dit que deux droites distinctes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ sont *en perspective depuis un point* O si l'application qui à tout point $P \in \mathbf{D}$ associe le point P' où la droite (OP) coupe $\mathbf{D}'$ est bien définie (i.e. si $O \notin \mathbf{D}$) et est une bijection de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}'$, la réciproque étant l'application (bien définie si $O \notin \mathbf{D}'$) qui à tout $P' \in \mathbf{D}'$ associe le point $P = (OP') \cap \mathbf{D}$. On voit ainsi que deux droites distinctes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ sont « en perspective » depuis n'importe quel point O hors de $\mathbf{D} \cup \mathbf{D}'$:



(2) Soient A, A' deux points distincts et soit $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ (resp. $(\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_2)$) un couple de droites distinctes, sécantes en A (resp. en A'). Si elles sont en perspective depuis un point O (i.e. si $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}'_1$ sont en perspective depuis O, ainsi que $\mathbf{D}_2$ et $\mathbf{D}'_2$), alors le point de

(1) Jean-Victor Poncelet, mathématicien (et capitaine d'artillerie, puis général) français, 1788-1867.

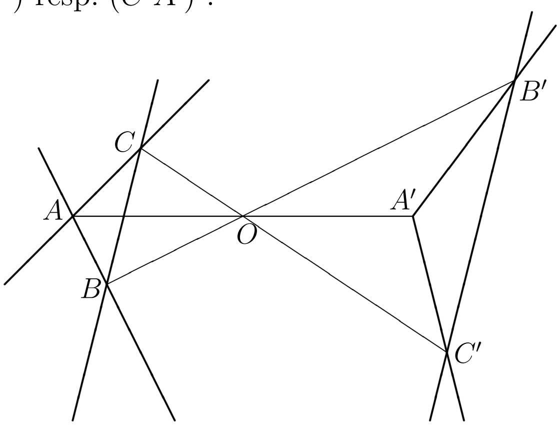
concours $A = \mathbf{D}_1 \cap \mathbf{D}_2$ correspond par cette bijection au point de concours $A' = \mathbf{D}'_1 \cap \mathbf{D}'_2$ et donc AOA' sont alignés. Réciproquement, pour tout point O de (AA') distinct de A et A', les couples de droites $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ et $(\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_2)$ sont en perspective depuis O :



Terminologie. — Si $\mathbf{V}$ est un espace projectif de dimension n et N un entier $\geq n+1$, on dit que N points $p_1, \ldots, p_N$ de $\mathbf{V}$ sont *en position générale* si $n+1$ quelconques d'entre eux sont projectivement indépendants.

(3) Soient A, B, C, A', B', C' six points de $\mathbf{P}$ en position générale (i.e. trois d'entre eux ne sont jamais alignés). Les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont alors deux à deux distinctes. Si les trois paires de droites $\big((AB), (A'B')\big)$, $\big((AC), (A'C')\big)$ et $\big((BC), (B'C')\big)$ sont en perspective depuis un point O alors, d'après (2) ci-dessus, O appartient à (AA'), (BB') et (CC'), donc $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes et O.

Réciproquement, on peut montrer (voir le §11.5 et sa note de bas de page) que si $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes, leur point de concours O n'appartient à aucune des droites $(AB), (AC), (CA), (A'B')$, etc. et donc (AB) resp. (BC) resp. CA est en perspective depuis O avec $(A'B')$ resp. $(B'C')$ resp. $(C'A')$:



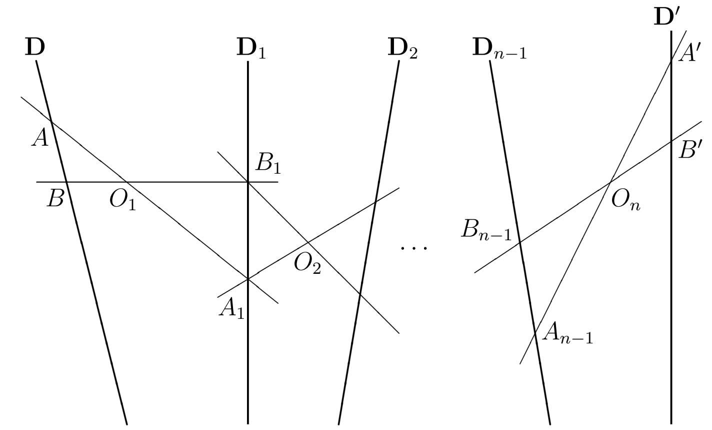
Dans ce cas, au lieu de dire que « les deux triplets de droites $\big((AB), (BC), (CA)\big)$ et $\big((A'B'), (B'C'), (C'A')\big)$ sont en perspective », on dira plus brièvement que : « les deux triangles (ABC) et $(A'B'C')$ » sont en perspective. La condition précédente se récrit donc :

Pour A, B, C, A', B', C' en position générale, les triangles (ABC) et $(A'B'C')$ sont en perspective ssi les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes.

11.2. Perspectivités et projectivités. — Dans le paragraphe précédent, on s'est intéressé à la situation où des figures données sont « en perspective », i.e. dans une certaine position l'une par rapport à l'autre.

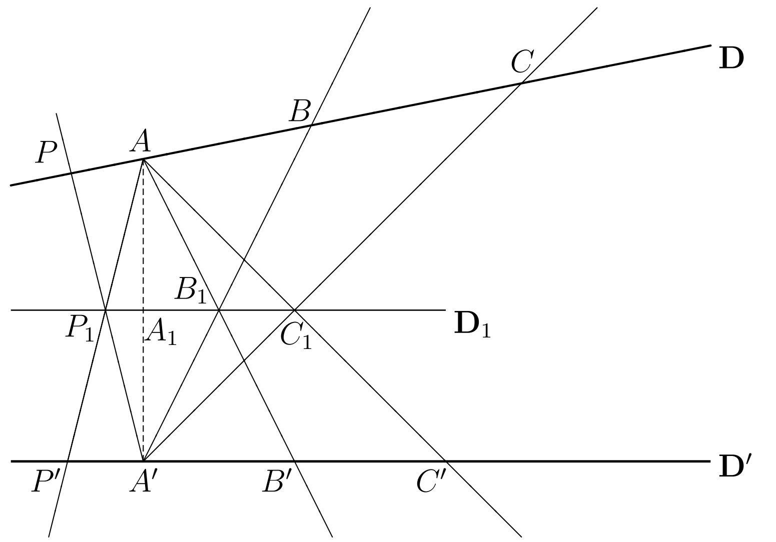
Changeons légèrement de point de vue : fixons un point O, deux droites $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ ne passant pas par O, et considérons *l'application bijective* $\mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ qui à tout $P \in \mathbf{D}$ associe le point de concours P' de (OP) et $\mathbf{D}'$. (Noter que le point de concours E de $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ vérifie $E' = E$.) On dira provisoirement que cette application est une *perspectivité.* (2)

D'autre part, Poncelet s'est intéressé à des applications a priori plus générales que les perspectivités, à savoir les composées de perspectivités : si deux droites distinctes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ sont reliées par une suite de perspectivités $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 \to \mathbf{D}_1 \to \cdots \to \mathbf{D}_n = \mathbf{D}'$, l'application $\mathbf{D} \to \mathbf{D}'$, $P \mapsto P'$ ainsi obtenue est appelée une *projectivité* de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}'$:



Tout ceci pose un certain nombre de questions. Une projectivité de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}'$ est-elle une homographie ? Obtient-on ainsi toutes les homographies de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}'$? Si oui, est-ce que les perspectivités sont des homographies particulières ?

Remarque. — On verra au paragraphe suivant que toute projectivité est une homographie. La construction ci-dessous montrera alors que toute homographie est une projectivité : Pour deux droites distinctes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ et trois points distincts A, B, C (resp. A', B', C') sur $\mathbf{D}$ (resp. $\mathbf{D}'$), on peut construire une projectivité entre $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$, composée de seulement deux perspectivités, qui envoie A, B, C sur A', B', C' respectivement :



En effet, notons B_1 (resp. C_1) le point d'intersection des droites (AB') et $(A'B)$ (resp. (AC') et $(A'C)$), puis notons A_1 le point d'intersection de (AA') avec la droite $\mathbf{D}_1 = (B_1C_1)$. Alors

(2) « perspectivity » dans [Co, 1.6 et 4.22], à ne pas confondre avec la terminologie « perspective collineation » de [Co, 6.2] qui donne, comme on le verra plus bas, les élations et les homologies.

la perspectivité de centre A' transforme A, B, C en A_1, B_1, C_1, puis ceux-ci sont transformés en A', B', C' par la perspectivité de centre A.

11.3. Projections centrales et perspectivités. — Revenons sur les perspectivités dans le plan projectif $\mathbf{P}$: la donnée d'un point O et d'une droite $\mathbf{D}'$ ne contenant pas O définit une application $\mathbf{P} - \{O\} \to \mathbf{D}'$, qui à tout point $P \neq O$ associe le point de concours P' de (OP) et $\mathbf{D}'$.[(3)] Ceci se généralise comme suit.

***Définition 11.1* (Projections centrales).** — Soit V un k-espace vectoriel de dimension $n+1$. Soient E et F deux sev de V non nuls et supplémentaires (i.e. $V = E \oplus F$) et soit π la projection de V sur F de noyau E. Elle induit une application

$$\overline{\pi} : \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$$

définie comme suit : pour tout $v \in V - E$, $\overline{\pi}([v]) = [\pi(v)]$. Ceci est bien défini, car comme $v \notin E$ on a $\pi(v) \neq 0$. On dit que $\overline{\pi}$ est la projection sur $\mathbb{P}(F)$ *de centre* $\mathbb{P}(E)$.[(4)]

Proposition 11.2. — *Conservons les notations précédentes. Pour tout supplémentaire F' de E,*[(5)] *la restriction de $\overline{\pi}$ à $\mathbb{P}(F')$ est une* homographie *de $\mathbb{P}(F')$ sur $\mathbb{P}(F)$.*

Démonstration. — En effet, notons $\pi' : F' \to F$ la restriction de π à F' ; elle est injective (car $F' \cap E = \{0\}$) donc c'est un *isomorphisme* de F' sur F (puisque $\dim(F') = \dim(F)$). De plus, pour tout $v \in \mathbb{P}(F')$ on a : $\overline{\pi}([v]) = [\pi(v)] = [\pi'(v)]$. Ceci montre que la restriction de $\overline{\pi}$ à $\mathbb{P}(F')$ est l'homographie de $\mathbb{P}(F')$ sur $\mathbb{P}(F)$ définie par l'isomorphisme $\pi' : F' \xrightarrow{\sim} F$. $\square$

Proposition 11.3. — *Soient H un hyperplan de V, O un point de $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ et p la projection sur $\mathbb{P}(H)$ de centre O.*

(i) *p est l'application qui à tout point $P \neq O$ associe le point de concours de la droite (OP) et de $\mathbb{P}(H)$.*

(ii) *Les points fixes de p sont les points de $\mathbb{P}(H)$.*

(iii) *Pour tout point P distinct de O et hors de $\mathbb{P}(H)$, les droites $(Pp(P))$ concourent en O.*

Démonstration. — Écrivons $O = [v_0]$ et notons π la projection $V \to H$ de noyau kv_0. Soit $P = [v]$ un point distinct de O, alors v s'écrit de façon unique $v = x + \mu v_0$, avec $\mu \in k$ et $x \in H - \{0\}$, et l'on a $\overline{\pi}([v]) = [\pi(v)] = [x]$.

D'autre part, $W = \mathrm{Vect}(v_0, v)$ est de dimension 2 et non contenu dans H, donc $W \cap H$ est une droite vectorielle Δ. Comme la droite projective (OP) égale $\mathbb{P}(W)$, alors $(OP) \cap \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(W \cap H) = \mathbb{P}(\Delta)$ est le point de $\mathbb{P}(H)$ correspondant à Δ. Enfin, $x = v - \mu v_0$ est un élément non nul de $H \cap W$, donc $\Delta = kx$. Ceci prouve (i).

Un point $P \neq O$ est fixe ssi la droite (OP) coupe $\mathbb{P}(H)$ en P, c.-à-d. ssi $P \in \mathbb{P}(H)$. Ceci prouve (ii). Enfin, (iii) résulte de (i). $\square$

***Définition 11.4* (Perspectivités).** — Soient $O \in \mathbb{P}(V)$ et $\mathbf{H}, \mathbf{H}'$ deux hyperplans projectifs ne contenant pas O. On dira que l'homographie $\mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ induite par la projection sur $\mathbf{H}'$ de centre O est une *perspectivité*.[(6)] Ceci généralise la définition donnée au §11.2. lorsque $\dim \mathbb{P}(V) = 2$.

[(3)] Noter que cette application n'est pas définie au point O.

[(4)] Noter que $\overline{\pi}$ n'est pas définie en les points de $\mathbb{P}(E)$.

[(5)] C.-à-d. pour tout sev F' de V de même dimension que F et tel que $F' \cap E = \{0\}$.

[(6)] On dit aussi *homologie*, mais nous préférons conserver la terminologie « perspectivité ».

Remarque 11.5. — Plaçons-nous dans un plan projectif $\mathbf{P}$, comme au §11.2. On vient de voir que toute perspectivité est une homographie, donc toute projectivité (= composée de perspectivités) est une homographie. De plus, d'après la Remarque du §11.2, toute homographie $\mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ est une projectivité, composée de seulement deux perspectivités. Celles-ci sont caractérisées par la proposition suivante.

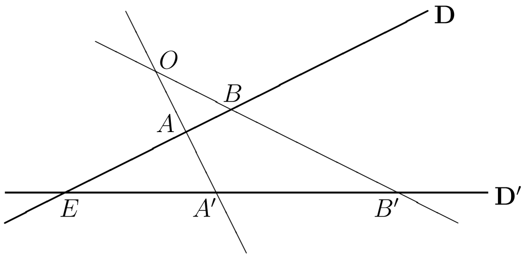
Proposition 11.6. — *Dans un plan projectif* $\mathbf{P}$*, soient* $\mathbf{D}, \mathbf{D}'$ *deux droites distinctes,* E *leur point de concours et* $h : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ *une homographie. Alors :*

(i) *h est une perspectivité ssi $h(E) = E$.*

(ii) *Dans ce cas, si $A \neq B$ sont des point* $\mathbf{D}$ *distincts de E, le centre de perspectivité est le point de concours des droites $(Ah(A))$ et $(Bh(B))$.*

Démonstration. — On a vu en §11.2 que si h est une perspectivité de centre O alors $h(E) = E$ et pour tout $P \in \mathbf{D}$, d'image $P' \in \mathbf{D}'$, les points O, P, P' sont alignés.

Réciproquement, supposons $h(E) = E$ et soient $A \neq B$ des points de $\mathbf{D}$ distincts de E, et A', B' leurs images par h. Notons O le point de concours des droites (AA') et (BB') :



Alors la perspectivité de centre O laisse fixe E et envoie A, B sur A', B', donc coïncide avec h d'après le Corollaire 10.14 bis. $\square$

Revenons à un espace projectif $\mathbf{V} = \mathbb{P}(V)$ de dimension n. Soient H, H' deux hyperplans de V distincts. Alors $H_1 = H \cap H'$ est un hyperplan de H. Notons $\mathbf{H}, \mathbf{H}'$ et $\mathbf{H}_1$ les sous-espaces projectifs de V correspondants. Si $h : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ est une perspectivité de centre O, elle laisse fixe tout point de $\mathbf{H}_1$. Réciproquement, ceci caractérise les perspectivités de $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{H}'$:

Proposition 11.7. — *Soient* $\mathbf{H}, \mathbf{H}'$ *deux hyperplans distincts de* $\mathbf{V}$*, soit* $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} \cap \mathbf{H}'$ *et soit* $h : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ *une homographie. Alors :*

(i) *h est une perspectivité ssi h est l'identité sur* $\mathbf{H}_1$ *(i.e. $h(P) = P$ pour tout $P \in \mathbf{H}_1$).*

(ii) *Dans ce cas, pour tout point A de $\mathbf{H} - \mathbf{H}_1$, les droites $(Ah(A))$ sont concourantes en un point O qui est le centre de perspectivité.*

Démonstration. — Soit g l'isomorphisme $H \xrightarrow{\sim} H'$ (unique à homothétie près) tel que $\overline{g} = h$. Supposons que h est l'identité sur $\mathbf{H}_1$. Ceci entraîne qu'il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $g(v) = \lambda v$ pour tout $v \in H_1$ et, quitte à remplacer g par $\lambda^{-1} g$, on peut supposer que $\lambda = 1$.

Fixons un vecteur $e \in H - H_1$ et posons $v_0 = g(e) - e$. On a $v_0 \notin H'$ car sinon on aurait $e \in H'$ et comme $H = H_1 \oplus ke$ on aurait $H \subset H'$, ce qui n'est pas le cas. (De même, $v_0 \notin H$.) On a donc $V = H' \oplus kv_0$, notons alors π la projection sur H' de noyau kv_0.

Soit $v \in H$, écrivons $v = x + \mu e$ avec $x \in H_1$ et $\mu \in k$, alors on a $v = x + \mu g(e) + \mu v_0$ donc $g(v) = x + \mu g(e)$ égale $\pi(v)$. Ceci montre que h est la projection sur $\mathbb{P}(H')$ de centre $O = [v_0]$. Ceci prouve (i), et alors (ii) découle de la Prop. 11.3. $\square$

11.4. Homographies de $\mathbb{P}(V)$ laissant stable un hyperplan. — Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème ci-dessous. Commençons par la :

Notation 11.8. — Soit $\mathbf{H} = \mathbb{P}(H)$ un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ et soit $g \in \mathrm{GL}(V)$ tel que $\overline{g}(\mathbf{H}) \subset \mathbf{H}$. Ceci équivaut à dire que $g(H) \subset H$ et donc $g(H) = H$ (puisque $g(H)$ et H ont même dimension), d'où $\overline{g}(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ et donc $\overline{g}$ induit une bijection de l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbf{H}$ sur lui-même, qu'on notera $\overline{g}_U$.

D'autre part, on rappelle que l'on note $\mathrm{GA}(U)$ le groupe des automorphismes de l'espace affine U (i.e. applications affines $U \to U$ bijectives).

Théorème 11.9. — *Soient $\mathbf{H}$ un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ et U l'ouvert affine $\mathbb{P}(V) - \mathbf{H}$. Notons $G_{\mathbf{H}}$ le sous-groupe de $\mathrm{PGL}(V)$ formé des $\overline{g}$ tels que $\overline{g}(\mathbf{H}) \subset \mathbf{H}$. Alors :*

(i) *Pour tout $\overline{g} \in G_{\mathbf{H}}$, la bijection $\overline{g}_U : U \to U$ est une application* affine.

(ii) *L'application $\overline{g} \mapsto \overline{g}_U$ est un isomorphisme de groupes $G_{\mathbf{H}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GA}(U)$.*

La démonstration de ce théorème repose sur quelques résultats d'algèbre linéaire et de théorie des groupes. En 1ère lecture, on pourra sauter cette démonstration et passer directement au § suivant, pour des applications géométriques de la correspondance entre « homographies fixant un hyperplan (à l'infini) $\mathbf{H}$ » et « automorphismes de l'espace affine $\mathscr{H} = \mathbb{P}(V) - \mathbf{H}$ ».

***Définition 11.10* (Produits semi-directs)**. — (1) Soient H un groupe, G et N deux sous-groupes, N étant *distingué* dans H. On dit que H est le *produit semi-direct* de N par G, et l'on note $H = N \rtimes G$, si tout $h \in H$ s'écrit de façon unique $h = ng$, avec $n \in N$ et $g \in G$, i.e. si l'application $N \times G \to H$, $(n, g) \mapsto ng$ est bijective. **Attention**, cette application n'est **pas** un morphisme de groupes en général : le produit de ng et de $n'g'$ est donné par : $(ng)(n'g') = n(gn'g^{-1})\,gg'$ (noter que $gn'g^{-1} \in N$ puisque N est distingué).(7)

(1 bis) Remarquons que l'application $G \times N \to N$, $(g, n) \mapsto gng^{-1}$ est une action à gauche de G sur N. Cette action est compatible à la structure de groupe de N, i.e. pour tout $n, n' \in N$ et $g \in G$, on a :

$$g(nn')g^{-1} = (gng^{-1})(gn'g^{-1}).$$

Notant $\mathscr{S}(N)$ le groupe de toutes les bijections $N \to N$, on peut exprimer ceci en disant que le morphisme de groupes $G \to \mathscr{S}(N)$ donné par l'action, est à valeurs dans le sous-groupe $\mathrm{Aut}(N)$ de $\mathscr{S}(N)$ formé des automorphismes de groupe.

(2) On peut alors reformuler la définition de façon plus abstraite (mais plus souple). Soient G, N deux groupes ; on dit que G agit sur N « par automorphismes de groupe » si l'on s'est donné un morphisme de groupes $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(N)$. On peut alors former le *produit semi-direct* de N par G (relativement à l'action φ), noté $N \rtimes_\varphi G$ (ou simplement $N \rtimes G$), en déclarant que c'est l'ensemble produit $N \times G$ muni de la loi de groupe ainsi définie :

$$(n, g) \cdot (n', g') = \big(n\varphi(g)(n'), gg'\big).$$ (8)

Dans le cas particulier où l'action de G sur N est *triviale*(9) le groupe obtenu est noté $N \times G$ et appelé le *produit direct* de N et G : c'est l'ensemble produit $N \times G$ muni de la loi de groupe $(n, g) \cdot (n', g') = (nn', gg')$.

(3) Dans la situation de (1), lorsque N et G sont des sous-groupes d'un groupe H dans lequel N est distingué, l'action φ est la conjugaison : $\varphi(g)(n) = gng^{-1}$. En fait, la situation (2) n'est pas plus générale que (1), car posant $H = N \rtimes_\varphi G$ et notant e_N (resp. e_G) l'élément neutre de N (resp. G), le groupe N (resp. G) s'identifie au sous-groupe $\{(n, e_G) \mid n \in N\}$ (resp. $\{(e_N, g) \mid g \in G\}$) de H, et alors pour tout $n \in N$ et $g \in G$ on a :

$$gng^{-1} = (e_N, g)(n, e_G)(e_N, g^{-1}) = (e_N, g)(n, g^{-1}) = (\varphi(g)(n), e_G) = \varphi(g)(n),$$

i.e. l'action donnée φ de G sur N devient dans $H = N \rtimes_\varphi G$ l'action par conjugaison de G sur le sous-groupe distingué N.

(4) Si $H = N \rtimes G$, alors le groupe quotient H/N est isomorphe à G.

(7) Tout $h \in H$ s'écrit aussi de façon unique gn', avec $g \in G$ et $n' \in N$, puisque $ng = g(g^{-1}ng)$.

(8) On laisse au lecteur le soin de vérifier que ceci est bien une loi de groupe.

(9) Si G est un groupe et X un ensemble, l'action *triviale* de G sur X est donnée par $g \cdot x = x$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$.

Proposition 11.11. — *Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine,* $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ *le groupe affine de $\mathscr{E}$ et T le sous-groupe des translations (isomorphe à E). Pour tout $O \in \mathscr{E}$ on a :*

(i) *Le sous-groupe $G_O = \{g \in \mathrm{GA}(\mathscr{E}) \mid g(O) = O\}$ est isomorphe à* $\mathrm{GL}(E)$ *via le morphisme $f \mapsto \overrightarrow{f}$.*

(ii) $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ *est le produit semi-direct de T et de G_O et la projection* $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) \to \mathrm{GA}(\mathscr{E})/T$ *s'identifie à $f \mapsto \overrightarrow{f}$ via les isomorphismes* $\mathrm{GA}(\mathscr{E})/T \simeq G_O \simeq \mathrm{GL}(E)$.

(iii) *On peut résumer ceci en écrivant :* $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) \simeq T \rtimes \mathrm{GL}(E) \simeq E \rtimes \mathrm{GL}(E)$.

Démonstration. — D'abord, la bijection $E \to T$, $u \mapsto t_u$ est un isomorphisme de groupes, puisque $t_u \circ t_v = t_{u+v}$ pour tout $u, v \in E$. D'autre part, T est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ car, pour tout $g \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$, $u \in E$ et $A \in \mathscr{E}$, on a :

$$(g \circ t_u \circ g^{-1})(A) = g(g^{-1}(A) + u) = A + \overrightarrow{g}(u),$$

ce qui montre que $g \circ t_u \circ g^{-1} = t_{\overrightarrow{g}(u)}$.

Fixons $O \in \mathscr{E}$. Alors l'application $G_O \to \mathrm{GL}(E)$, $f \mapsto \overrightarrow{f}$ est un isomorphisme de groupes, sa réciproque étant le morphisme qui à tout $\phi \in \mathrm{GL}(E)$ associe l'application affine $M \mapsto O + \phi(\overrightarrow{OM})$. Ceci prouve (i).

De plus, pour tout $h \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$, l'application affine $t_{\overrightarrow{h(O)O}} \circ h$ appartient à G_O et l'on obtient ainsi des bijections réciproques :

$$\begin{array}{ccc} T \times G_O & \longrightarrow & \mathrm{GA}(\mathscr{E}) \\ (t_u, g) & \mapsto & t_u \circ g \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{GA}(\mathscr{E}) & \longrightarrow & T \times G_O \\ h & \mapsto & \big(t_{\overrightarrow{Oh(O)}},\, t_{\overrightarrow{h(O)O}} \circ h\big). \end{array}$$

□

On peut maintenant démontrer le Théorème 11.9, dont on rappelle l'énoncé :

Théorème (11.9). — *Soient $\mathbf{H} = \mathbb{P}(H)$ un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ et U l'ouvert affine $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Soit $G_{\mathbf{H}}$ le sous-groupe de* $\mathrm{PGL}(V)$ *formé des $\overline{g}$ tels que $\overline{g}(\mathbf{H}) \subset \mathbf{H}$. Alors :*

(i) *Pour tout $\overline{g} \in G_{\mathbf{H}}$, la bijection $\overline{g}_U : U \to U$ est une application* affine.

(ii) *L'application $\overline{g} \mapsto \overline{g}_U$ est un isomorphisme de groupes* $G_{\mathbf{H}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GA}(U)$.

Démonstration. — Soit $f \in V^*$ une forme linéaire telle que $H = \mathrm{Ker}(f)$. Soit $(e_0, \dots, e_{n-1})$ une base de H et soit $e_n \in V$ tel que $f(e_n) = 1$; alors $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est une base de V. Alors un élément $h \in \mathrm{PGL}(V)$ vérifie $h(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ ssi h est l'image dans $\mathrm{PGL}(V)$ d'un (unique) élément $g \in \mathrm{GL}(V)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme :

$$(*) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \left(\begin{array}{c|c} & a_1 \\ A & \vdots \\ & a_n \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right)$$

où $A \in \mathrm{GL}_n(k)$ et $a_i \in k$. (Les éléments qui ont pour image h sont les λg, pour $\lambda \in k^\times$, et parmi eux g est déterminé par la condition que le coefficient dans le coin inférieur droit de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ vaut 1, autrement dit que $g(e_n) - e_n \in H$.) Notons G_1 l'ensemble des matrices de cette forme, on voit facilement que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{n+1}(k)$. On obtient donc que l'application $G_1 \to G_{\mathbf{H}}$, $g \mapsto \overline{g}$ est un *isomorphisme* de groupes.

D'autre part, identifions U à l'hyperplan affine $\mathscr{H} = \{v \in V \mid f(v) = 1\} = e_n + H$. Alors, pour tout $g \in G_1$ et $v \in \mathscr{H}$, on a $g(v) \in \mathscr{H}$ [10] et donc $\overline{g}_U([v]) = [g(v)]$ s'identifie

[10] On peut montrer que la réciproque est vraie, i.e. si $g \in \mathrm{GL}(V)$ vérifie $g(\mathscr{H}) \subset \mathscr{H}$ alors $g \in G_1$.

à $g(v)$ via l'identification $U = \mathscr{H}$. Par conséquent, pour tout $x \in H$ et $g \in G_1$ comme en $(*)$ ci-dessus, on a :

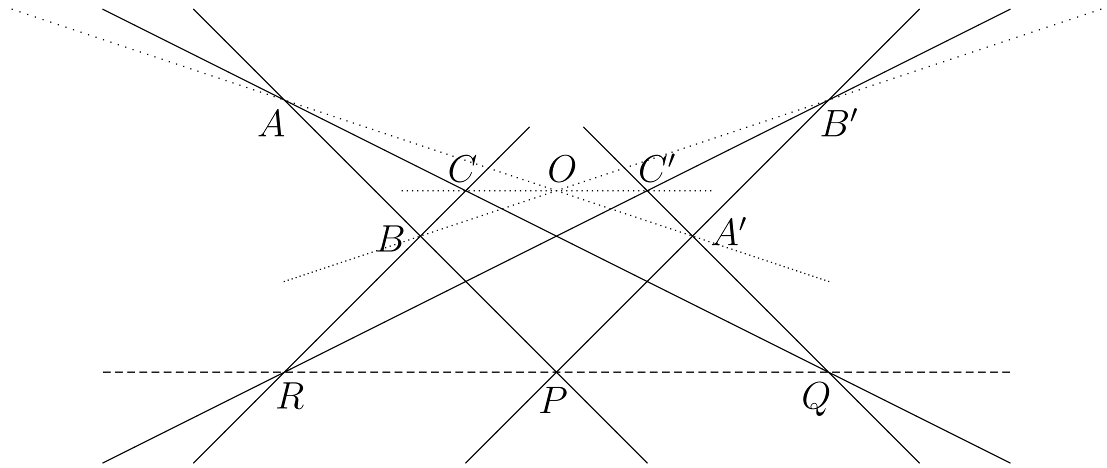
$$\overline{g}_U(e_n + x) = g(e_n + x) = g(e_n) + Ax = e_n + Ax + u,$$

où u désigne le vecteur $\sum_{i=1}^n a_i e_i = g(e_n) - e_n \in H$. Ceci montre que $\overline{g}_U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est une application affine, dont la partie linéaire est l'application $H \to H$, $x \mapsto Ax$.

Donc l'application de restriction $r_U : \overline{g} \mapsto \overline{g}_U$ est un morphisme de groupes de $G_{\mathbf{H}}$ dans $\mathrm{GA}(\mathscr{H})$, et r_U est surjective car $A \in \mathrm{GL}(H)$ et $u \in H$ pouvant être choisis arbitrairement, on obtient ainsi tous les éléments de $\mathrm{GA}(\mathscr{H})$, d'après la proposition 11.11. Enfin, r_U est injective, car si $r_U(g) = \mathrm{id}_{\mathscr{H}}$ alors, prenant $x = 0$ on obtient $u = 0$, puis l'égalité $Ax = x$ pour tout $x \in H$ donne que $A = \mathrm{id}_H$, d'où $g = \mathrm{id}_V$. Le théorème est démontré. □

11.5. Homologies et élations de $\mathbb{P}(V)$. — Intéressons-nous maintenant à quelques homographies d'un espace projectif $\mathbb{P}(V)$ dans lui-même. (On en verra d'autres au paragraphe suivant.)

Commençons par le cas d'un plan projectif et considérons la configuration de Desargues :



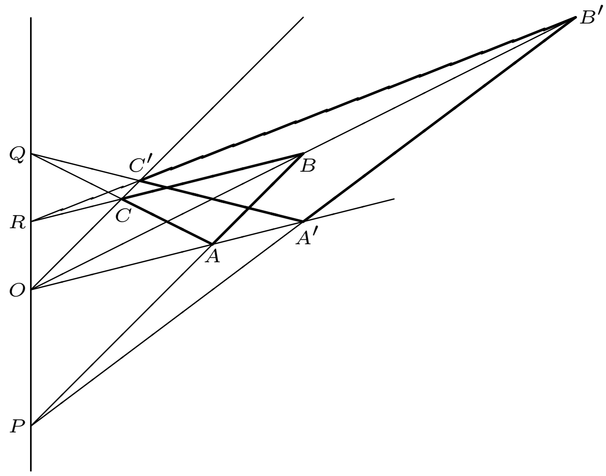
Supposons que, comme sur le dessin, O soit distinct des six points A, B, C, A', B', C'.[11] Alors O n'appartient pas à la droite (AB) : sinon A' et B' appartiendraient à la droite $(AO) = (AB) = (OB)$ donc on aurait $(AA') = (BB')$, contrairement à l'hypothèse. De même, O n'appartient à aucune des droites $(AB), (BC), (CA), (A'B')$, etc. donc (O, A, B, C) forme un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$, de même que (O, A', B', C'). Donc il existe une unique homographie h de $\mathbf{P}$ qui fixe O et envoie A, B, C sur A', B', C' respectivement.

Elle échange donc les droites (AB) et $(A'B')$ donc laisse fixe leur point de concours P. Pour la même raison, elle laisse fixe Q et R. Comme elle fixe trois points distincts de la droite projective $\mathscr{D} = (PQR)$, elle fixe donc chaque point de cette droite. Prenant celle-ci comme droite à l'infini, et posant $U = \mathbf{P} - \mathscr{D}$, étudions l'application affine $h_U : U \to U$ induite par h. Comme on a envoyé P, Q, et R à l'infini, les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, ainsi que (AC) et $(A'C')$ d'une part, et (BC) et $(B'C')$ d'autre part. D'après la démonstration du théorème de Desargues affine, on voit que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

[11] On pourrait avoir, par exemple, $O = A$; dans ce cas B', C' appartiennent respectivement à (AB) et (AC), d'où $B' = P$ et $C' = Q$. Alors $(PQ) = (B'C')$ est soit parallèle à (BC), soit la coupe en un point R, et P, Q, R sont alignés. Quant à A' il est arbitraire et les droites (AA'), $(BB') = (AB')$ et $(CC') = (AC')$ sont concourantes en $A = O$. Noter que comme A, B, B' sont alignés, ceci ne peut pas se produire si l'on suppose que A, B, C, A', B', C' sont en position générale, cf. §11.1 (3).

a) Si $O \notin \mathscr{D}$ (comme sur le dessin ci-dessus), alors le repère affine (A', B', C') se déduit de (A, B, C) par une *homothétie de centre* O (de rapport $\neq 1$), donc h_U coïncide avec cette homothétie. Dans ce cas, on dira que h est une *homologie*.

b) Si $O \in \mathscr{D}$, alors le repère affine (A', B', C') se déduit de (A, B, C) par une *translation*, donc h_U coïncide avec cette translation. Dans ce cas, on dira que h est une *élation* :



Définition et proposition 11.12. — *Soit g une homographie de $\mathbb{P}(V)$ qui* fixe chaque point *d'un hyperplan $\mathbf{H} = \mathbb{P}(H)$. Posons $U = \mathbb{P}(V) - \mathbf{H}$. Alors, on est dans l'une des situations suivantes :*

a) *L'application affine g_U est une homothétie (de rapport $\neq 1$), donc possède un unique point fixe O dans U. Dans ce cas, on dit que g est une* homologie *et ses points fixes sont les points de $\mathbf{H}$ et O.*

b) *L'application affine g_U est une translation. Dans ce cas, on dit que g est une* élation. *Si g_U est distincte de id_U (i.e. si $g \neq \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}$) alors g_U n'a aucun point fixe donc les points fixes de g sont exactement les points de $\mathbf{H}$.*

Démonstration. — Comme $g(\mathbf{H}) \subset \mathbf{H}$ on est dans la situation du théorème 11.9. L'hypothèse supplémentaire que g soit l'identité sur $\mathbf{H}$ entraîne que la matrice A de 11.9 $(*)$ est une homothétie $\lambda\,\mathrm{id}_H$. De plus, la démonstration de 11.9 montre que A est la partie linéaire de l'application affine g_U. Si $\lambda \neq 1$ alors g_U est une « vraie » homothétie et possède un point fixe unique, d'où (i). Et si $\lambda = 1$ alors g_U est une translation et (ii) en découle. □

11.6. Involutions d'une droite projective. — Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathrm{car}(k) \neq 2$ et l'on se place dans un plan projectif $\mathbf{P}$.

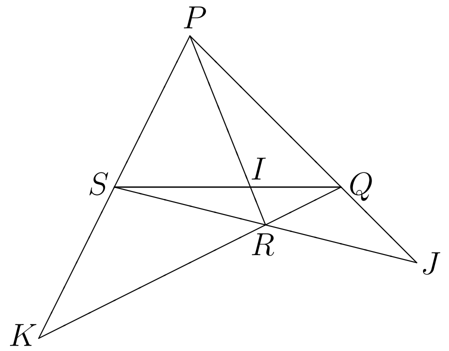
Les objectifs principaux de ce paragraphe sont : le Th. 11.18 et son corollaire, la Prop. 11.23 et les points (i), (ii), (ii) du Th. 11.24. Pour ajouter un contenu plus « géométrique » à ces résultats, on a ajouté des définitions ou énoncés géométriques (Déf. 11.13, 11.15, 11.16, Prop. 11.21),[12] en suivant à nouveau l'excellente présentation de Coxeter [Co, 2.4 et 5.3].[13] En première lecture, on pourra se concentrer sur les résultats principaux sus-mentionnés, et revenir plus tard sur les énoncés géométriques.

Définition 11.13. — Un *quadrangle complet* dans $\mathbf{P}$ est la donnée de quatre points P, Q, R, S formant un repère projectif (i.e. trois d'entre eux ne sont jamais alignés), appelés les *sommets*, et des $\binom{4}{2} = 6$ droites qui les joignent, appelées les *côtés* (cf. la figure suivante).

Deux côtés qui ne se coupent pas en un sommet sont dits *opposés* ; les trois paires de côtés opposés se coupent en trois points supplémentaires I, J, K, appelés les points *diagonaux*.

(12) Qui remontent probablement à Desargues, vers 1640.

(13) Sauf pour le lemme 11.14, tiré de [Gr, Ch. VII, p. 171], qui est pris comme axiome dans [Co, 2.17].



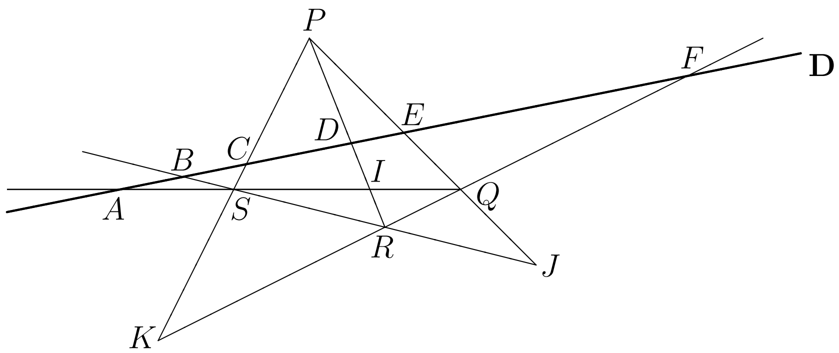
Lemme 11.14. — *Les points diagonaux I, J, K ne sont pas alignés.* (14)

Démonstration. — Les points P, Q, R, S définissent un repère projectif dans lequel leurs coordonnées homogènes sont $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ et $[1, 1, 1]$. Alors la droite (PQ) (resp. (RS)) a pour équation $z = 0$ (resp. $x = y$), donc $K = [1, 1, 0]$. On obtient de même que $J = [0, 1, 1]$ et $I = [1, 0, 1]$. On a

$$\text{dét}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \qquad (\text{car } \operatorname{car}(k) \neq 2)$$

donc I, J, K ne sont pas alignés. □

Définition 11.15. — Soit $\mathbf{D}$ une droite projective de $\mathbf{P}$. On dit que trois paires de points $\{A, D\}$, $\{B, E\}$ et $\{C, F\}$ de $\mathbf{D}$ sont *en involution* si ce sont les points d'intersection avec $\mathbf{D}$ des trois paires de côtés opposés d'un quadrangle complet $(PQRS)$:

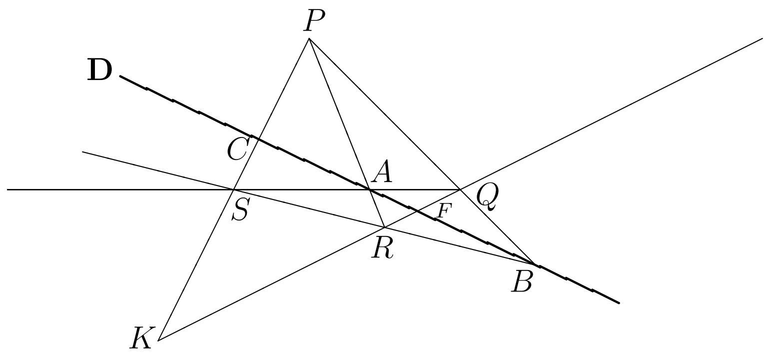


On a dessiné ci-dessus le cas « général » où les six points sont distincts. Si $\mathbf{D}$ passe par un point diagonal M, la paire correspondante est « dégénérée » : ses deux points coïncident avec M ; par exemple si $\mathbf{D}$ passe par I alors $A = D = I$. Et si $\mathbf{D}$ passe par deux points diagonaux, il y a deux paires dégénérées : par exemple si $\mathbf{D}$ passe par I et J alors $A = D = I$ et $B = E = J$; (15) ce cas particulier donne la définition suivante.

Définition 11.16. — Soit $\mathbf{D}$ une droite projective de $\mathbf{P}$. On dit que quatre points A, B, C, F dans cet ordre sont *en division harmonique* si les paires $\{A, A\}$, $\{B, B\}$ et $\{C, F\}$ sont en involution, i.e. si A, B sont deux points diagonaux d'un quadrangle complet et C, F sont les points d'intersection de $\mathbf{D}$ avec la dernière paire de côtés opposés :

(14) A fortiori, ils sont deux à deux distincts.

(15) D'après le lemme précédent, $\mathbf{D}$ ne peut pas passer par les trois points diagonaux, puisqu'ils ne sont pas alignés.



Les définitions précédentes soulèvent les questions suivantes : s'agit-il de propriétés intrinsèques des points $A, \ldots, F$ de la droite $\mathbf{D}$? C.-à-d., est-ce indépendant du plongement de $\mathbf{D}$ dans le plan $\mathbf{P}$ et du choix du quadrangle complet ? On va voir que oui.

Terminologie 11.17. — Comme expliqué par Coxeter [Co, p.45], le mot « involution » a été introduit en mathématiques vers 1640 par Desargues, sous la forme de « paires de points en involution ». Plus tard, von Staudt[16] a relié cela à une propriété de l'homographie h qui échange les points de ces paires : $h \circ h$ est l'identité !

Depuis, on dit qu'une application f d'un ensemble X dans lui-même est une *involution* (ou une application *involutive*) si elle vérifie $f \circ f = \mathrm{id}_X$. Ceci équivaut à dire que f est bijective et que $f^{-1} = f$.

Dans la suite, on va s'intéresser aux **homographies** de $\mathbb{P}(V)$ qui sont *involutives*. Conformément à l'usage (cf. [Co], [Gr], [Sa]), on dira simplement une **involution** de $\mathbb{P}(V)$.[17]

Théorème 11.18. — *Soient* $\mathbf{D}$ *une droite projective et* $\{A, D\}$ *et* $\{B, E\}$ *deux paires disjointes de points de* $\mathbf{D}$, *avec* $A \neq D$.

(i) *Il existe une (unique) homographie* h *de* $\mathbf{D}$ *qui échange* A *et* D *d'une part, et* B *et* E *d'autre part.*

(ii) h *est une involution.*

Démonstration. — Posons $\mathbf{D} = \mathbb{P}(V)$, où $\dim(V) = 2$. Comme A, D, B sont deux à deux distincts, ils forment un repère projectif. Il existe donc une base (e_1, e_2) de V telle que $[e_1] = A$, $[e_2] = D$ et $[e_1 + e_2] = B$. Comme E est distinct de A et B, alors $E = [ae_1 + be_2]$ pour certains $a, b \in k^\times$.

On cherche une matrice $g \in \mathrm{GL}_2(k)$ qui échange A et D d'une part, et D et E d'autre part. La première condition signifie que g envoie e_1 sur λe_2 et e_2 sur μe_1, pour certains $\lambda, \mu \in k^\times$, i.e. que g est de la forme $g = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Remarquons déjà que $g^2 = \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix}$ est une homothétie, donc l'homographie $h = \overline{g}$ est une involution (car $\overline{g}^2 = \overline{g^2} = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}$). Ceci prouve (ii).

D'autre part, on veut que $g(e_1 + e_2) = \mu e_1 + \lambda e_2$ soit colinéaire à $ae_1 + be_2$, ce qui équivaut à $b\mu = a\lambda$. Posant $\nu = \lambda/b = \mu/a$, on a donc $\lambda = b\nu$ et $\mu = a\nu$, d'où :

$$g = \begin{pmatrix} 0 & a\nu \\ b\nu & 0 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que g est unique à homothétie près, d'où (i). Le théorème est démontré. □

[16] Karl Georg Christian von Staudt, mathématicien allemand, 1798-1867.

[17] Attention, il existe des bijections involutives de $\mathbb{P}(V)$ qui ne sont *pas* des homographies donc ce raccourci est un abus de langage. Il faut garder présent à l'esprit qu'on ne s'intéresse qu'à des homographies !

***Corollaire 11.19* (de la démonstration).** — *Soit h une homographie d'une droite projective* $\mathbf{D}$.

(i) *Si h échange deux points distincts A et B, c'est une involution.*
(ii) *Si h est une involution, une paire de points $\{B,E\}$ est dite une* « paire de h » *si h échange B et E. On dit que la paire est dégénérée si $B = E$ est un point fixe de h.*
(iii) *Toute involution h est déterminée par deux quelconques de ses paires $\{A,D\}$ et $\{B,E\}$, pourvu que l'une au moins soit non dégénérée.*

Démonstration. — On a vu dans la démonstration du théorème 11.18 que si $h = \overline{g}$ échange A et B alors la matrice de g dans une base appropriée est $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ et donc $g^2 = \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix}$ est une homothétie. Ceci prouve (i). Et (iii) résulte de l'unicité établie dans le théorème 11.18. □

***Notation 11.20*.** — Dans un plan projectif, soient $A, B, C, D, \ldots$ (resp. $I, J, K, L, \ldots$) des points alignés et pas tous égaux, et soit O un point hors des droites $\mathbf{D} = (ABCD)$ et $\mathbf{D}' = (IJKL)$. On écrira :

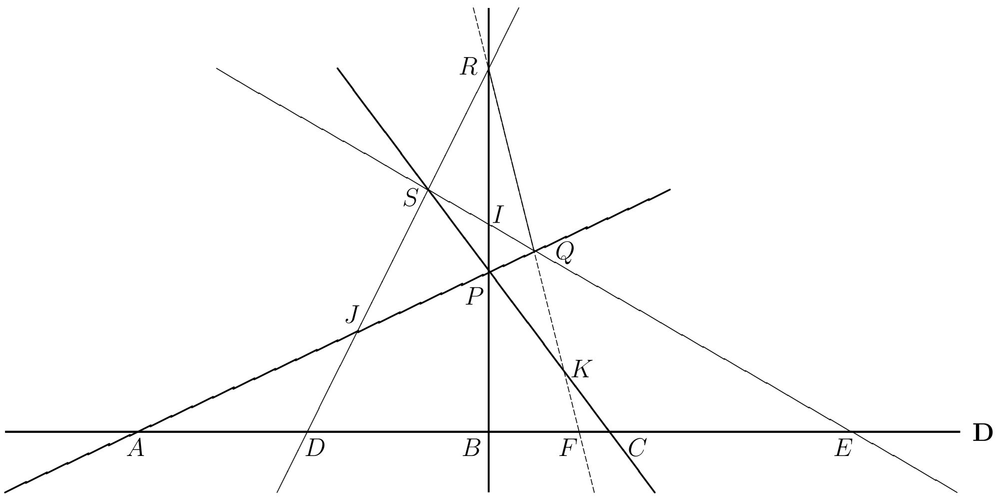
$$ABCD \xrightarrow{O} IJKL$$

pour indiquer que la perspectivité de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}'$ de centre O envoie A sur I, B sur J, etc. De même, lorsque $\mathbf{D} = \mathbf{D}'$ et que h est une homographie de $\mathbf{D}$, on écrira :

$$h : ABCD \longrightarrow IJKL$$

pour indiquer que h envoie A sur I, B sur J, etc.

Considérons maintenant trois ensembles $\{A,D\}$, $\{B,E\}$ et $\{C\}$ de points de $\mathbf{D}$, deux à deux disjoints. Plongeons $\mathbf{D}$ dans un plan projectif et choisissons un point P hors de $\mathbf{D}$. Alors les droites $(PA), (PB), (PC)$ sont deux à deux distinctes. Choisissons sur la droite (PA) un point Q distinct de P et A, et notons S le point de concours des droites (QE) et (PC), puis R celui de (DS) et de (PB) :



Montrons que les points P, Q, R, S forment un repère projectif : il faut montrer que trois d'entre eux ne sont jamais alignés. Or les trois droites $(PQ), (PR), (PS)$ (resp. $(SP), (SQ), (SR)$) coupent $\mathbf{D}$ en trois points distincts : A, B, C (resp. C, E, D), donc P (resp. S) ne peut être aligné avec deux autres de ces points. Ceci montre que P, Q, R, S forment un repère projectif.

On obtient donc un quadrangle complet $PQRS$, tel que A, D (resp. B, E) sont les points d'intersection de $\mathbf{D}$ avec la paire de côtés opposés (PQ) et (RS) (resp. (PR) et (QS)). Enfin, la droite (RQ) coupe $\mathbf{D}$ (resp. (SP)) en un point F (resp. K).

Remarquons que A et D (resp. B et E) coïncident ssi ils coïncident avec le point diagonal J (resp. I). Par conséquent, si $A = D = J$ et $B = E = I$, alors $C \neq F$ car sinon on aurait $C = F = K$ et les trois points diagonaux appartiendraient à $\mathbf{D}$, contredisant le lemme 11.14.

Ce qui précède montre que toute donnée de « deux paires et demie » $\{A, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C\}$ se complète en « trois paires en involution » $\{A, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, F\}$ au sens de la définition 11.15. Montrons de plus que F est uniquement déterminé.

Considérant la perspectivité p_1 de $\mathbf{D}$ sur (SPC) de centre Q, puis la perspectivité p_2 de (SPC) sur $\mathbf{D}$ de centre R, on a :

$$AECF \xrightarrow{Q} PSCK \xrightarrow{R} BDCF$$

donc $h = p_2 \circ p_1$ vérifie $h(A) = B$, $h(E) = D$, $h(C) = C$ et $h(F) = F$. Comme A, E, C sont deux à deux distincts, les trois premières égalités déterminent h. Montrons que la dernière détermine F.

Supposons que $M \in \mathbf{D} - \{C\}$ soit un point fixe de h et posons $M' = p_1(M)$, alors M, Q, M' sont alignés, ainsi que M', R, M (puisque $M = p_2(M')$). Donc $M' \in (MQ) \cap (MR)$ et comme $M' \neq M$ (car $M \neq C$), les droites (MQ) et (MR) ont en commun les deux points M et M', donc sont égales, donc M, R, Q sont alignés et donc $M = \mathbf{D} \cap (QR) = F$. Ceci montre que F est uniquement déterminé : si $\mathbf{D}$ et (QR) se coupent en C, alors C est l'unique point fixe de h et $F = C$. Si $\mathbf{D}$ et (QR) se coupent en un point $F \neq C$, alors C et F sont les deux seuls points fixes de h (car une homographie de $\mathbf{D}$ ayant 3 points fixes est l'identité ; or $h \neq \mathrm{id}$ car $h(A) = B \neq A$.)

Proposition 11.21. — *Soient $\{A, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, F\}$ trois paires disjointes de points de $\mathbf{D}$, dont l'une au moins est non dégénérée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Ce sont les paires de points d'intersection de $\mathbf{D}$ avec les paires de côtés opposés d'un quadrangle complet.*

(ii) *Il existe une homographie h_3 de $\mathbf{D}$ telle que $h_3 : AECF \longrightarrow BDCF$.*

(iii) *Il existe une homographie h_2 de $\mathbf{D}$ telle que $h_2 : AFBE \longrightarrow CDBE$.*

(iv) *Il existe une homographie h_1 de $\mathbf{D}$ telle que $h_1 : BFAD \longrightarrow CEAD$.*

(v) *Il existe une homographie s de $\mathbf{D}$ qui échange A, D ainsi que B, E et C, F, et s est une involution.*

Démonstration. — Comme A, E, C sont deux à deux distincts, il existe une unique homographie h de $\mathbf{D}$ telle que $h : AEC \to BDC$.

D'autre part, dans ce qui précède, on a construit à partir de A, B, C, D, E un quadrangle complet $PQRS$ dont les paires de côtés opposés coupent $\mathbf{D}$ en les paires de points $\{A, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, F\}$ et l'on a montré que F est caractérisé par la propriété que $h(F) = F$. L'équivalence de (i) et (ii) en découle. D'autre part, comme les trois paires $\{A, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, F\}$ jouent des rôles symétriques, on a l'équivalence de (ii), (iii) et (iv).

Montrons que l'existence de s équivaut à celle d'une des h_i. Supposons par exemple que $C \neq F$. D'après le théorème 11.18, il existe une involution g de $\mathbf{D}$ qui échange B, D et C, F. Donc, si $h_3 : AECF \longrightarrow BDCF$ est donnée, alors $s = g \circ h_3$ vérifie

$$s : AECF \longrightarrow DBFC$$

et comme s échange C, F qui sont distincts, c'est une involution, d'après le corollaire 11.19, donc elle échange aussi A, D et E, B.

Réciproquement, si s est donnée, c'est une involution, d'après le corollaire 11.19, et $h_3 = g^{-1} \circ s = g \circ s$ vérifie $h_3 : AECF \longrightarrow BDCF$. La proposition est démontrée. $\square$

Remarques 11.22. — (1) Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$ et $[v] \in \mathbb{P}(V)$. Alors : $[v]$ est un point fixe de $\overline{g} \Leftrightarrow [g(v)] = [v] \Leftrightarrow v$ est un vecteur propre de g.

(2) Donc, si $\dim(V) = 2$ alors $\overline{g}$ a deux points fixes p_1 et $p_2 \Leftrightarrow g$ est diagonalisable.

Dans la suite, on suppose que $\dim(V) = 2$ et l'on note $\mathbf{D}$ la droite projective $\mathbb{P}(V)$.

Proposition 11.23. — *Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$ tel que $h = \overline{g}$ soit $\neq \mathrm{id}_{\mathbf{D}}$ et ait deux points fixes $p_1 = [v_1]$ et $p_2 = [v_2]$. Notons μ_1 et μ_2 les valeurs propres correspondantes de g. Alors :*

(i) *Le rapport μ_1/μ_2 ne dépend que de h, on le notera $\rho(h)$.*

(ii) *h est une involution (distincte de $\mathrm{id}_{\mathbf{D}}$) ssi $\rho(h) = -1$.*

(iii) *Pour tout $m \in \mathbf{D}$ distinct de p_1 et p_2, le birapport $[p_1, p_2, m, h(m)]$ est égal à $\rho(h)$.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que comme g est inversible, ses valeurs propres sont $\neq 0$, donc on peut former le quotient μ_1/μ_2. De plus, pour tout $\lambda \in k^\times$, les valeurs propres de λg sont $\lambda\mu_1$ et $\lambda\mu_2$, donc le rapport est inchangé. Ceci prouve (i).

Prenons $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$ comme base de V. Alors g s'identifie à la matrice $\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$. (Notons que $\mu_1 \neq \mu_2$ car l'hypothèse $h \neq \mathrm{id}_{\mathbf{D}}$ équivaut à dire que g n'est pas une homothétie.) On a donc $g^2 = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 \end{pmatrix}$, d'où les équivalences : h est une involution $\Leftrightarrow g^2$ est une homothétie $\Leftrightarrow \mu_1^2 = \mu_2^2 \Leftrightarrow \mu_1 = -\mu_2$ (la dernière équivalence résultant du fait que $\mu_1 = \mu_2$ est exclu). Ceci montre que h est une involution (distincte de $\mathrm{id}_{\mathbf{D}}$) ssi $\rho(h) = -1$, d'où (ii).

Prouvons (iii). Rappelons que l'on prend $[1, 0]$ comme point à l'infini ∞ et que la droite affine $\mathscr{D} = \mathbf{D} - \{\infty\} = \{[x, 1] \in \mathbf{D} \mid x \in k\}$ s'identifie au corps k via l'identification de $[x, 1]$ avec x. Comme m est distinct de p_1 et p_2, on a $m = [av_1 + bv_2]$, avec $ab \neq 0$, et $h(m) = [a\mu_1 v_1 + b\mu_2 v_2]$. Par définition du birapport, on a :

$$[p_1, p_2, m, h(m)] = \left[\frac{\begin{vmatrix} a\mu_1 & 0 \\ b\mu_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & a\mu_1 \\ 0 & b\mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{vmatrix}} \right] = \left[\frac{a\mu_1}{a}, \frac{b\mu_2}{b} \right] = [\mu_1, \mu_2] = \left[\frac{\mu_1}{\mu_2}, 1 \right] = \rho(m).$$

$\square$

***Théorème 11.24* (Division harmonique)**. — *Soit (p_1, p_2, p_3, p_4) quatre points distincts d'une droite projective $\mathbf{D}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le birapport $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ égale -1.*

(ii) *Il existe une involution h de $\mathbf{D}$ qui fixe p_1 et p_2 et échange p_3 et p_4.*

(iii) *Si l'on prend p_1 (resp. p_2) comme point à l'infini ∞, alors dans la droite affine $\mathbf{D} - \{\infty\}$, le point p_2 (resp. p_1) est le milieu de p_3 et p_4.*

(iv) *Si l'on plonge $\mathbf{D}$ dans un plan projectif, il existe un quadrangle complet $PQRS$ tel que p_1, p_2 soient des points diagonaux et p_3, p_4 soient les points d'intersection avec $\mathbf{D}$ de la dernière paire de côtés opposés.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que (p_1, p_2, p_3, p_4) sont en divison harmonique.

Démonstration. — L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) découle immédiatement de la proposition 11.23. Réciproquement, supposons (i) vérifié et soit h l'unique homographie qui fixe p_1 et p_2 et envoie p_3 sur p_4. Alors on a :

$$\rho(h) = [p_1, p_2, p_3, h(p_3)] = [p_1, p_2, p_3, p_4] = -1,$$

donc h est une involution (d'après la proposition 11.23) et donc, comme $h(p_3) = p_4$ on a aussi $h(p_4) = p_3$, i.e. h échange p_3 et p_4. Ceci prouve l'équivalence de (i) et (ii).

Supposons (ii) vérifié et prenons p_1 comme point à l'infini ∞. Notons $\mathscr{D}$ la droite affine $\mathbf{D} - \{\infty\}$. Comme $h(\infty) = \infty$ alors, d'après le théorème 11.9, la restriction de h à $\mathscr{D}$ est une bijection *affine*, qu'on notera h'. Comme h' est affine elle préserve les barycentres. Notons m le milieu de p_3 et p_4. Comme h' échange p_3 et p_4 alors $h'(m) = m$. Donc $m \in \mathscr{D}$ est un second point fixe de h, distinct de ∞, et comme h a exactement deux points fixes : $p_1 = \infty$ et p_2, ceci entraîne que $m = p_2$. Ceci prouve que (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Réciproquement, supposons (iii) vérifié. Alors, dans la droite affine $\mathscr{D} = \mathbf{D} - \{\infty\}$, la symétrie de centre p_2 fixe p_2 et échange p_3 et p_4. D'après le théorème 11.9, s se prolonge de façon unique en une homographie h de $\mathbf{D}$ telle que $h(\infty) = \infty$. Comme h échange les points distincts p_3 et p_4, c'est une involution, d'après le corollaire 11.19. Ceci prouve l'équivalence de (ii) et (iii).

Donnons une démonstration directe élémentaire de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii). On choisit des coordonnées homogènes $[x, y]$ telles que $p_1 = \infty = [1, 0]$, $p_2 = [0, 1]$ et $p_3 = [1, 1]$. Via l'identification de $\mathscr{D} = \mathbf{D} - \{\infty\}$ à k, p_2 et p_3 correspondent à 0 et 1, et comme p_2 est le milieu de p_3 et p_4 on a alors $p_4 = [-1, 1]$. Dans $\mathscr{D}$, la symétrie s de centre p_2 est donnée par $x \mapsto -x$, elle se prolonge en une homographie h de $\mathbf{D}$ donnée par $h([x, y]) = [-x, y]$, qui vérifie bien $h(\infty) = \infty$. De plus, il est clair que $h \circ h = \mathrm{id}_{\mathbf{D}}$, i.e. h est une involution.

Enfin, l'équivalence de (ii) et (iv) est un cas particulier de la proposition 11.21 (prendre $A = D = p_1$, $B = E = p_2$ et $\{C, F\} = \{p_3, p_4\}$). $\square$

11.7. Action de S_3 et S_4 sur les birapports. — Rappelons que S_n désigne le groupe symétrique « à n lettres » : c'est le groupe des permutations de l'ensemble $X = \{1, \ldots, n\}$. Pour $i \neq j$ dans X, la *transposition* (ij) est la permutation qui échange i et j et laisse fixe tout autre élément de X. D'autre part, pour tout r-uplet $(i_1, \ldots, i_r)$ d'éléments distincts de X, on note $(i_1 i_2 \cdots i_r)$ la permutation qui envoie i_1 sur i_2, i_2 sur i_3, ..., i_{r-1} sur i_r et i_r sur i_1, et l'on dit que c'est un r-cycle. (Si $r = 2$, on retrouve la transposition $(i_1 i_2)$.) À l'intention des futurs agrégatifs, on rappelle sans démonstration la proposition suivante. [18]

Proposition 11.25. — *S_n est engendré par les transpositions $s_i = (i, i+1)$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.*

Dans S_3, le produit (composition) (23)(12) est le 3-cycle $c = (132)$ tandis que le produit (12)(23) est le 3-cycle $c' = (312) = c^{-1}$. Enfin, $(12)(23)(12) = (13) = (23)(12)(23)$ et l'on a obtenu ainsi tous les éléments de S_3 autres que $\mathrm{id}, (12)$ et (23). Il est commode de représenter les 6 éléments de S_3 par l'hexagone suivant : [19]

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{id} \arrow[dl, "(12)"'] \arrow[dr, "(23)"] & \\
(12) \arrow[d, "(23)"'] & & (23) \arrow[d, "(12)"] \\
(12)(23) = (312) \arrow[dr, "(12)"'] & & (23)(12) = (132) \arrow[dl, "(23)"] \\
& (13) &
\end{tikzcd}$$

Pour ce qui suit, on fixe une droite projective $\mathbf{D}$.

---

[18] Nous n'en aurons besoin que pour $n = 3$, auquel cas la vérification est immédiate.

[19] Dans cet hexagone, les flèches représentent des multiplications *à droite*, i.e. deux éléments g et gs_i sont reliés par une flèche $\xrightarrow{s_i}$.

Lemme 11.26. — *Soient* (p_1, p_2, p_3) *trois points distincts de* $\mathbf{D}$ *et* q *un quatrième point. Posons* $[p_1, p_2, p_3, q] = \lambda \in k \cup \{\infty\}$. *Alors :*

$$\boxed{[p_2, p_1, p_3, q] = \frac{1}{\lambda}} \qquad \textit{et} \qquad \boxed{[p_1, p_3, p_2, q] = 1 - \lambda}$$

(*avec* $1/0 = \infty$ *et* $1/\infty = 0$ *et* $1 - \infty = \infty$).

Démonstration. — Soit $h : \mathbf{D} \to \mathbb{P}^1$ l'unique homographie envoyant le triplet (p_1, p_2, p_3) sur le triplet standard $(\infty, 0, 1) = \big([1, 0], [0, 1], [1, 1]\big)$, alors $h(q) = \lambda$.

D'autre part, h envoie le triplet (p_2, p_1, p_3) sur le triplet $(0, \infty, 1)$; pour mettre celui-ci « dans le bon ordre », il faut composer avec l'homographie σ qui échange 0 et ∞ et fixe 1. Celle-ci est donnée par $\sigma([x, y]) = [y, x]$, i.e. σ échange 0 et ∞ et, pour tout $t \in k^*$, on a :

$$\sigma(t) = \sigma([t, 1]) = [1, t] = \Big[\frac{1}{t}, 1\Big] = \frac{1}{t}.$$

Ainsi, $\sigma \circ h$ envoie (p_2, p_1, p_3) sur $(\infty, 0, 1)$ et donc $[p_2, p_1, p_3, q] = \sigma(h(q)) = \sigma(\lambda)$. Ceci prouve la première égalité (y compris les cas particuliers $1/0 = \sigma(0) = \infty$ et $1/\infty = \sigma(\infty) = 0$).

La deuxième s'obtient de façon analogue : h envoie (p_1, p_3, p_2) sur le triplet $(\infty, 1, 0)$; pour mettre celui-ci « dans le bon ordre », il faut composer avec l'homographie τ qui échange 0 et 1 et fixe ∞. Celle-ci est donnée par $\tau([x, y]) = [y - x, y]$, i.e. $\tau(\infty) = \infty$ et, pour tout $t \in k$, on a :

$$\tau(t) = \tau([t, 1]) = [1 - t, 1] = 1 - t.$$

Ainsi, $\tau \circ h$ envoie (p_1, p_3, p_2) sur $(\infty, 0, 1)$ et donc $[p_1, p_3, p_2, q] = \tau(h(q)) = \tau(\lambda)$. Ceci prouve la seconde égalité (y compris le cas particulier $1 - \infty = \tau(\infty) = \infty$). $\square$

Compte tenu de la description « hexagonale » de S_3 donnée plus haut, on déduit du lemme la proposition suivante : [20]

Proposition 11.27. — *Soient* (p_1, p_2, p_3) *trois points distincts de* $\mathbf{D}$ *et* q *un quatrième point. Posons* $[p_1, p_2, p_3, q] = \lambda \in k \cup \{\infty\}$. *Alors on a l'hexagone suivant :*

$$\begin{tikzcd}
& {[p_1, p_2, p_3, q] = \lambda} \arrow[dl, "(12)"'] \arrow[dr, "(23)"] & \\
{[p_2, p_1, p_3, q] = \dfrac{1}{\lambda}} \arrow[d, "(23)"'] & & {[p_1, p_3, p_2, q] = 1 - \lambda} \arrow[d, "(12)"] \\
{[p_2, p_3, p_1, q] = 1 - \dfrac{1}{\lambda}} \arrow[dr, "(12)"'] & & {[p_3, p_1, p_2, q] = \dfrac{1}{1 - \lambda}} \arrow[dl, "(23)"] \\
& {[p_3, p_2, p_1, q] = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}} &
\end{tikzcd}$$

Si l'on impose au quatrième point $q = p_4$ d'être distinct de p_1, p_2 et p_3, alors dans le birapport $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ on peut permuter les places des quatre points. Mais on va voir que, d'après le théorème 11.18, on n'obtient rien de plus que dans la proposition précédente.

[20] **Attention !** À chaque étape ce sont les *places* $(1, 2$ ou $3)$ des p_i que l'on échange, et non leurs indices.

Commençons par donner des résultats sur la structure du groupe symétrique S_4. Identifions S_3 au sous-groupe de S_4 formé des permutations σ telles que $\sigma(4) = 4$.

Proposition 11.28. — (i) *Les trois permutations* $(12)(34)$, $(13)(24)$ *et* $(14)(23)$ *forment, avec l'identité, un sous-groupe distingué* V *de* S_4*, isomorphe à* $\{\pm 1\}^2$.

(ii) S_4 *est le produit semi-direct de* V *et de* S_3*. Par conséquent,* $S_4/V \simeq S_3$.

Démonstration. — (i) Notons a, b, c ces trois permutations. Elles sont involutives (i.e. $a^2 = \mathrm{id} = b^2 = c^2$) et l'on a $ab = (12)(34)(13)(24) = (23)(14) = c$ et donc $b = ac$ et $a = cb$.

De plus, comme $ab = c$ égale $c^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$, on obtient que $ab = ba = c$ (on aurait pu le voir par un calcul direct) et de même $ac = ca = b$ et $bc = cb = a$. On obtient ainsi que $V = \{\mathrm{id}, a, b, c\}$ est un sous-groupe commutatif d'ordre 4 isomorphe à $\{\pm 1\}^2$. Ce sous-groupe est distingué car pour tout $g \in S_n$ et $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$, on a $g(i_1 i_2)g^{-1} = (j_1 j_2)$, où l'on a posé $j_1 = g(i_1)$ et $j_2 = g(i_2)$. Appliquant ceci pour $n = 4$, on voit que pour tout élément $(i_1 i_2)(i_3 i_4)$ de V, l'élément

$$g(i_1 i_2)(i_3 i_4)g^{-1} = (j_1 j_2)(j_3 j_4)$$

est encore un élément de V. Ceci prouve (i).

Pour prouver (ii), remarquons que $S_3 \cap V = \{\mathrm{id}\}$ et que $|S_3| \times |V| = 6 \cdot 4 = 24 = |S_4|$. Par conséquent, (ii) résulte du lemme ci-dessous. □

Lemme 11.29. — *Soient* H *un groupe fini,* G *et* N *deux sous-groupes,* N *étant* distingué *dans* H*. On suppose que :*

a) $G \cap N = \{e\}$.

b) $|G| \times |N| = |H|$.

Alors H *est le produit semi-direct de* N *et* G.

Démonstration. — Il faut montrer que l'application $\phi : N \times G \to H$, $(n, g) \mapsto ng$ est bijective (voir la définition 11.10). Comme les deux ensembles ont même cardinal, il suffit de montrer que ϕ est *injective*.[21] Or, si $n_1 g_1 = n_2 g_2$ alors on a $n_2^{-1} n_1 = g_2 g_1^{-1}$ et cet élément appartient à $N \cap G$ donc égale e, d'où $n_1 = n_2$ et $g_1 = g_2$. Ceci prouve que ϕ est injective. Le lemme est démontré. □

Proposition 11.30. — *Soient* (p_1, p_2, p_3, p_4) *quatre points distincts de* $\mathbf{D}$*. Alors les permutations des* p_i *par les éléments de* V *ne changent pas le birapport, i.e. on a :*

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1].$$

Démonstration. — D'après le théorème 11.18, l'action sur le quadruplet (p_1, p_2, p_3, p_4) d'un élément quelconque $\tau \in V$ est « réalisée par une homographie » : c.-à-d., prenant par exemple $\tau = (12)(34)$, il existe une homographie h de $\mathbf{D}$ qui échange p_1, p_2 d'une part, et p_3, p_4 d'autre part. On a donc : $[p_2, p_1, p_4, p_3] = [h(p_1), h(p_2), h(p_3), h(p_4)] = [p_1, p_2, p_3, p_4]$, et de même pour les éléments $(13)(24)$ et $(14)(23)$. □

[22] On peut énoncer le résultat précédent en introduisant une action du groupe S_4.

Lemme 11.31. — *Soient* X, Y *deux ensembles et* $A(X, Y)$ *l'ensemble des applications de* X *dans* Y*. Si un groupe* G *agit à gauche (resp. à droite) sur* X*, il agit à droite (resp. à gauche) sur* $A(X, Y)$*, de la façon suivante : pour tout* $\phi : X \to Y$ *et* $g \in G$*, on pose, pour tout* $x \in X$*,*

$$(\phi \cdot g)(x) = \phi(gx) \qquad \text{resp.} \qquad (g \cdot \phi)(x) = \phi(xg).$$

[21] Attention, comme ϕ n'est pas en général un morphisme de groupes, on ne peut pas considérer son noyau.

[22] Ce qui suit est un complément, qui peut être omis.

Démonstration. — Notant e l'élément neutre de G, on a dans les deux cas $\phi \cdot e = \phi$ et $e \cdot \phi = \phi$. Supposons que G agisse à gauche sur X. Pour tout $g, h \in X$ on a :

$$\big((\phi \cdot g) \cdot h\big)(x) = (\phi \cdot g)(hx) = \phi(ghx) = \big(\phi \cdot (gh)\big)(x)$$

et donc $(\phi \cdot g) \cdot h = \phi \cdot (gh)$. De même, si G agit à droite sur X, on a :

$$\big(g \cdot (h \cdot \phi)\big)(x) = (h \cdot \phi)(xg) = \phi(xgh) = \big((gh) \cdot \phi\big)(x)$$

et donc $g \cdot (h \cdot \phi) = (gh) \cdot \phi$. □

Remarques 11.32. — Soit H un groupe agissant (disons à gauche) sur un ensemble E et soit $\mathscr{O}$ une orbite de G dans E.

a) Tout sous-groupe G de H agit aussi sur E.

b) H, ainsi que chacun de ses groupes, agit sur $\mathscr{O}$.

c) Supposons que pour un point $p \in \mathscr{O}$, le stabilisateur H_p de p dans H contienne un sous-groupe *distingué* N. Alors l'action de H sur $\mathscr{O}$ se factorise en une action de H/N sur $\mathscr{O}$.

En effet, pour tout $x = hp$ dans $\mathscr{O}$, on sait (semaine 4, Lemme 10.7) que le stabilisateur H_x de x est égal à $hH_p h^{-1}$, il contient hNh^{-1} qui égale N puisque N est distingué. Donc N agit trivialement sur $\mathscr{O}$ et donc l'action de H se factorise en une action de H/N sur $\mathscr{O}$, définie par $\overline{h} \cdot x = hx$, pour tout $x \in X$ et $h \in H$.

d) Sous les conditions précédentes, supposons de plus que H soit un produit semi-direct $N \rtimes G$. Alors l'action de H/N sur $\mathscr{O}$ coïncide avec celle de G : en effet, le morphisme de groupes $G \to H/N$, $g \mapsto \overline{g}$ est un isomorphisme et pour tout $x \in \mathscr{O}$ on a, par définition, $\overline{g} \cdot x = gx$.

Lemme 11.33. — *Soient E un ensemble et n un entier ≥ 2.*

(i) *Le groupe symétrique S_n agit à droite sur $E^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in E\}$ par la formule : $(x_1, \dots, x_n) \cdot \sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.*

(ii) *Cette action laisse stable le sous-ensemble Y_n de E^n formé des n-uplets d'éléments deux à deux distincts.*

Démonstration. — E^n s'identifie à l'ensemble des applications $x : \{1, \dots, n\} \to E$, en identifiant une telle application au n-uplet $(x(1), \dots, x(n))$, qu'on note aussi $(x_1, \dots, x_n)$. Donc, d'après le lemme 11.31, S_n agit à droite sur E^n par $x \cdot \sigma = x \circ \sigma$, i.e. $(x_1, \dots, x_n) \cdot \sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. Ceci prouve (i), et (ii) est clair. □

Appliquons ce qui précède en prenant $E =$ la droite projective $\mathbf{D}$. Alors S_4 agit à droite sur $\mathbf{D}^4$ et aussi sur le sous-ensemble Y_4 formé des quadruplets de points deux à deux distincts. Donc S_4 agit à gauche sur l'ensemble A de toutes les applications $Y_4 \to \mathbb{P}^1(k)$. Parmi ces applications se trouve le birapport b. Son orbite $\mathscr{O}$ est formée des applications « birapports permutés », i.e. des applications $(p_1, p_2, p_3, p_4) \mapsto [p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(4)}]$, pour $\sigma \in S_4$. D'après la proposition 11.30, le sous-groupe V est contenu dans le stabilisateur de b. Donc, d'après les remarques précédentes, on obtient le :

Théorème 11.34. — *Considérons l'action de S_4 sur l'ensemble $\mathscr{O}$ des applications « birapports permutés ». Alors :*

(i) *L'action du sous-groupe V est triviale, i.e. pour tout $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in Y_4$ on a :*

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1].$$

(ii) *Par conséquent, l'action de S_4 se factorise par le groupe quotient $S_4/V \simeq S_3$, dont l'action a été décrite dans la proposition* 11.27.

Remarque 11.35. — Une autre approche consiste à définir un morphisme de groupes $S_4 \to \mathrm{PGL}_2(k)$, de noyau V ; pour cela voir [Sa, Chap. II, §B].

INDEX