Corrigé de l'examen du 15 décembre 2016 (3h) (noté sur 70)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les exercices sont indépendants. Dans chacun on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes. Le sujet est volontairement long et le total des points est > 70 : les notes > 70 seront comptées comme 70. Le barème donné est indicatif et pourra être modifié légèrement.

On fixe un corps k de caractéristique $\neq 2$. Pour tout k-espace vectoriel (en abrégé : k-ev) V on note $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif associé.

***Exercice 1* (Plans hyperboliques).** — (environ 18 pts) Soient V un k-ev de dimension finie n, Q une forme quadratique non dégénérée sur V et ϕ sa forme polaire. Si E est un sous-espace vectoriel (en abrégé : sev) de V, $E^\perp$ désigne son orthogonal pour ϕ et l'on note Q_E (resp. $Q_{E^\perp}$) la restriction de Q à E (resp. $E^\perp$).

(1) (2 pts) Si $\dim(E) = d$, quelle est la dimension de $E^\perp$? Et que peut-on dire de $(E^\perp)^\perp$?

Solution : Comme Q est non dégénérée, on a $\dim(E^\perp) = n - \dim(E)$ et donc $\dim(E^\perp)^\perp = \dim(E)$. Par conséquent, l'inclusion $E \subset (E^\perp)^\perp$ entraîne l'égalité $E = (E^\perp)^\perp$.

(2) (2 pts) Montrer que le noyau $N(Q_E)$ est égal à $E \cap E^\perp$.

Solution : Soit $x \in N(Q_E)$. Alors $\phi(x, y) = 0$ pour tout $y \in E$ donc $x \in E^\perp$ et donc $x \in E^\perp \cap E$. Réciproquement, si $x \in E^\perp \cap E$ alors $x \in E$ et pour tout $y \in E$ on a $\phi(x, y) = 0$, ce qui montre que $x \in N(Q_E)$.

(3) (3 pts) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes : (a) Q_E est non dégénérée; (b) $V = E \oplus E^\perp$. De plus, sous ces conditions, montrer que $Q_{E^\perp}$ est non dégénérée.

Solution : Si (b) est vérifié alors $\{0\} = E \cap E^\perp = N(Q_E)$ donc Q_E est non dégénérée. Réciproquement, si (a) est vérifié alors $E \cap E^\perp = \{0\}$ donc E et $E^\perp$ sont en somme directe; comme de plus $\dim(E) + \dim(E^\perp) = \dim(V)$ on a alors $E \oplus E^\perp = V$.

Sous ces conditions, comme $E = (E^\perp)^\perp$, l'égalité $E \cap E^\perp = \{0\}$ montre que $Q_{E^\perp}$ est non dégénérée.

On pouvait aussi dire que si B (resp. C) désigne la matrice de Q_E (resp. $Q_{E^\perp}$) dans une base $\mathscr{B}$ de E (resp. $\mathscr{C}$ de $E^\perp$), alors $\mathscr{B} \cup \mathscr{C}$ est une base de V (puisque $V = E \oplus E^\perp$) et la matrice de Q dans cette base est $A = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ et comme A est inversible alors B et C le sont aussi, donc $Q_{E^\perp}$ est non dégénérée.

Un sev F de V est dit **anisotrope** s'il ne contient aucun vecteur isotrope non nul.

(4) (2 pts) Supposons V *non* anisotrope et soit u un vecteur isotrope non nul. Montrer qu'il existe un vecteur isotrope v tel que $\phi(u, v) = 1$.

Solution : Comme Q est non dégénérée, il existe $v' \in V$ tel que $\phi(u, v') \neq 0$ et quitte à multiplier v' par un scalaire on peut supposer que $\phi(u, v') = 1$. Posons $\lambda = Q(v')/2$, alors $Q(v' - \lambda u) = Q(v') - 2\lambda\phi(u, v') = 0$ donc $v = v' - \lambda u$ est un vecteur isotrope tel que $\phi(u, v) = 1$. En particulier, v n'est pas colinéaire à u, donc u et v engendrent un plan vectoriel.

(5) (1 pt) Soit P le plan vectoriel engendré par u et v. Montrer que Q_P est non dégénérée. On dira que P est un plan **hyperbolique** et que (u,v) en est une base hyperbolique.

Solution : La matrice de Q_P dans la base (u,v) est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de déterminant -1, donc Q_P est non dégénérée. Donc, d'après la question (3), V est la somme directe orthogonale de P et de $E = P^\perp$, et Q_E est non dégénérée.

(6) (2 pts) Montrer que V est somme directe orthogonale de plans hyperboliques $P_1, \ldots, P_r$ (pour un entier $r \geq 0$) et d'un sous-espace anisotrope (éventuellement nul) F. (On pourra procéder par récurrence sur $\dim(V)$.)

Solution : Si $\dim(V) = 1$ alors V est nécessairement anisotrope. Donc on peut supposer $n \geq 2$ et le résultat établi pour tout espace de dimension $< n$. Si V est anisotrope, on prend $F = V$. Sinon, d'après ce qui précède, V contient un plan hyperbolique $P = P_1$. Alors, comme $E = P^\perp$ est de dimension $n-2$, il est somme directe orthogonale de plans hyperboliques $P_2, \ldots, P_r$ et d'un sous-espace anisotrope (éventuellement nul) F, et donc V s'écrit comme somme directe orthogonale :

$$V = P_1 \oplus E = P_1 \oplus \cdots \oplus P_r \oplus F.$$

(7) (2 pts) Soit E un sev de V de dimension 2. Montrer que E est un plan hyperbolique si et seulement si il possède une base orthogonale (e_1, e_2) telle que $Q(e_1) = 1 = -Q(e_2)$. (Pour une base hyperbolique (u,v), chercher e_1, e_2 sous la forme $u + tv$ et $u - tv$, et pour une base (e_1, e_2) chercher u, v sous la forme $e_1 + e_2$ et $t(e_1 - e_2)$, avec $t \in k$.)

Solution : Supposons que (u,v) soit une base hyperbolique de E. Alors $Q(u \pm tv) = \pm 2t\phi(u,v) = \pm 2t$ et $\phi(u+tv, u-tv) = Q(u) - t^2 Q(v) = 0$. Donc en prenant $t = 1/2$ on obtient une base orthogonale (e_1, e_2) telle que $Q(e_1) = 1 = -Q(e_2)$.

Réciproquement, soit (e_1, e_2) une telle base. Alors $Q(e_1 \pm e_2) = Q(e_1) + Q(e_2) = 1 - 1 = 0$ et $\phi(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = Q(e_1) - Q(e_2) = 2$. Donc en posant $u = e_1 + e_2$ et $v = (1/2)(e_1 - e_2)$ on obtient une base hyperbolique de E.

On suppose que $k = \mathbb{R}$. Si F est un sev de V, on rappelle que Q_F est dite définie positive (resp. définie négative) si pour tout $x \in F - \{0\}$ on a $Q_F(x) > 0$ (resp. $Q_F(x) < 0$).

(8) (2 pts) Supposons que V soit somme directe orthogonale de r plans hyperboliques $P_1, \ldots, P_r$ et d'un sous-espace F de dimension f tel que ϕ_F soit définie positive. Déterminer alors, en le justifiant, la signature (p,q) de Q.

Solution : D'après la question (7), chaque plan P_i possède une base orthogonale (e_{2i-1}, e_{2i}) telle que $Q(e_{2i-1}) = 1 = -Q(e_{2i})$. D'autre part, F possède une base orthonormée $(e'_1, \ldots, e'_f)$. Alors $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_{2r}, e'_1, \ldots, e'_f)$ est une base orthogonale de V et la matrice de Q dans cette base est diagonale, avec sur la diagonale $r + f$ fois 1 et r fois -1, donc la signature de Q est $(r+f, r)$.

(9) (2 pts) Réciproquement, si Q est de signature (p,q), avec $p \geq q > 0$, montrer que V est la somme directe orthogonale de r plans hyperboliques et d'un sous-espace F de dimension f tel que ϕ_F soit définie positive, pour des entiers $r > 0$ et $f \geq 0$ que l'on exprimera en fonction de p et q.

Solution : Q étant de signature (p,q) il existe une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_p, e'_1, \ldots, e'_q)$ de V telle que $Q(e_i) = 1$ et $Q(e'_j) = -1$ pour $i = 1, \ldots, p$ et $j = 1, \ldots, q$.

Pour $j = 1, \ldots, q$, notons P_j le plan engendré par e_j et e'_j, alors V est la somme directe orthogonale de $P_1, \ldots, P_q$ et du sev F de dimension $p-q$ engendré par les e_i pour $q < i \leq p$.

Alors Q_F est définie positive tandis que, d'après la question (7), chaque P_j est un plan hyperbolique. On a donc $r = q$ et $f = p - q$.

***Exercice 2* (Conique de Steiner).** — (environ 40 pts) Cet exercice comporte deux parties. À l'exception de la dernière question, la partie II est indépendante de la partie I. Soit V un k-ev de dimension 3.

I) Dans $\mathbb{P}(V)$, soient $\mathbf{D}_1 \neq \mathbf{D}_2$ deux droites projectives, sécantes en un point C'. Soient $A \in \mathbf{D}_1$ et $B \in \mathbf{D}_2$, tous deux distincts de C', et soit C un point hors de $\mathbf{D}_1 \cup \mathbf{D}_2 \cup (AB)$. Comme A, B, C, C' forment un repère projectif, il existe des coordonnées (x, y, z) sur V telles que ces points aient pour coordonnées homogènes :

$$A = [1:0:0], \qquad B = [0:1:0], \qquad C = [0:0:1], \qquad C' = [1:1:-1].$$

(On ne demande pas de démontrer ceci.) Soient $\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma \in k$, Q la forme quadratique sur V suivante :

$$Q(x,y,z) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + \alpha yz + \beta zx + \gamma xy$$

et $\mathscr{C} = \mathscr{V}(Q)$ la conique projective correspondante.

(1) (1 pt) Écrire à quelles conditions $\mathscr{C}$ passe par A, B, C. Désormais on suppose ces conditions vérifiées.

<u>Solution</u> : Remarquons d'abord que, comme A, B, C, C' forment un repère projectif, il existe une base (e_1, e_2, e_3) de V telle que $A = [e_1]$, $B = [e_2]$, $C = [e_3]$ et $C' = [e_1 + e_2 + e_3]$. En remplaçant e_3 par $-e_3$ on obtient les coordonnées homogènes indiquées.

Ceci étant dit, on a $Q(1,0,0) = \lambda$, $Q(0,1,0) = \mu$ et $Q(0,0,1) = \nu$ donc $\mathscr{C}$ passe par A, B, C ssi $\lambda = 0 = \mu = \nu$.

(2) (2 pts) Déterminer, en le justifiant brièvement, l'équation des droites projectives $\mathbf{D}_1 = (C'A)$ et $\mathbf{D}_2 = (C'B)$.

<u>Solution</u> : L'équation $y + z = 0$ est vérifiée par C' et A donc c'est l'équation de $\mathbf{D}_1$. De même, l'équation de $\mathbf{D}_2$ est $x + z = 0$.

(3) (4 pts) Écrire les dérivées partielles $\partial_x Q, \partial_y Q, \partial_z Q$ puis déterminer les formes linéaires d_pQ pour $p = A$ et $p = B$.[(1)] Puis écrire les conditions sur α, β, γ pour que la tangente à $\mathscr{C}$ en A, resp. B, soit $\mathbf{D}_1$, resp. $\mathbf{D}_2$.

<u>Solution</u> : Comme $Q = \alpha yz + \beta zx + \gamma xy$, on a pour tout $p = (x, y, z)$:

$$d_pQ = (\beta z + \gamma y)dx + (\alpha z + \gamma x)dy + (\alpha y + \beta x)dz$$

donc, en particulier, $d_AQ = \gamma dy + \beta dz$ et $d_BQ = \gamma dx + \alpha dz$. Ces formes linéaires sont non nulles et proportionnelles à $y + z$, resp. $x + z$, si et seulement si $\gamma = \beta = \alpha \neq 0$.

On suppose ces conditions vérifiées pour le reste de la partie I, et l'on prend désormais $\alpha = 1$.

(4) (2 pts) Écrire la matrice de Q dans la base $\mathscr{B}$ de V correspondant aux coordonnées (x, y, z) et montrer que Q est non dégénérée.

<u>Solution</u> : D'après ce qui précède, on a $Q(x,y,z) = xy + yz + zx$. On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut $(1/8)(1+1) = 1/4 \neq 0$ donc Q est non dégénérée.

---

(1) Pour $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{C}$, on rappelle que d_pQ est la forme linéaire $(x,y,z) \mapsto (\partial_x Q)(p)x + (\partial_y Q)(p)y + (\partial_z Q)(p)z$ et que si $d_pQ \neq 0$ alors $\mathbb{P}(\mathrm{Ker}(d_pQ))$ est la tangente à $\mathscr{C}$ en p.

(5) (3 pts) En utilisant la question (3), écrire l'équation de la tangente $\mathbf{D}_3$ à $\mathscr{C}$ en C, puis déterminer les points d'intersection B' et A' de $\mathbf{D}_3$ avec $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ respectivement. (Donc $A \in (B'C')$, $B \in (C'A')$ et $C \in (A'B')$.)

<u>Solution</u> : D'après la question (3), on a $d_C Q = \beta dx + \alpha dy = dx + dy$ (puisque $\beta = \alpha = 1$), i.e. la tangente $\mathbf{D}_3$ à $\mathscr{C}$ en C a pour équation $x + y = 0$. Le point de concours B' de $\mathbf{D}_3$ avec $\mathbf{D}_1$ est donc déterminé par les équations $y = -z = -x$ d'où $B' = [1 : -1 : 1]$. On obtient de même que le point de concours de $\mathbf{D}_3$ et $\mathbf{D}_2$ est $A' = [-1 : 1 : 1]$.

(6) (3 pts) Déterminer l'équations des droites (AA'), (BB') et (CC') et montrer qu'elles sont concourantes en un point I qu'on précisera.

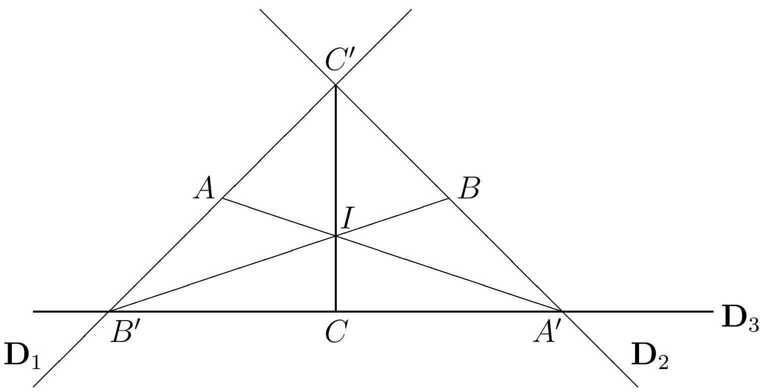
<u>Solution</u> : La droite (AA') a pour équation $y = z$. De même (BB'), resp. (CC'), a pour équation $x = z$, resp. $x = y$. Par conséquent, ces trois droites sont concourantes au point $I = [1 : 1 : 1]$.

(7) (3 pts) Déterminer le point de concours P, resp. Q, resp. R, des droites (BC) et $(B'C')$, resp. (AC) et $(A'C')$, resp. (AB) et $(A'B')$. Montrer que P, Q, R sont alignés.

<u>Solution</u> : (BC) a pour équation $x = 0$. D'autre part, comme $B' = [1 : -1 : 1]$ et $C' = [1 : 1 : -1]$, on voit que l'équation de $(B'C')$ est $y + z = 0$. On en déduit que $P = [0 : 1 : -1]$. On obtient de même que $Q = [-1 : 0 : 1]$ et $R = [1 : -1 : 0]$. Donc P, Q, R appartiennent à la droite d'équation $x + y + z = 0$.

(8) (2 pts) Faire une figure représentant, dans un plan affine, les points et droites précédents, en précisant si des points se trouvent à l'infini.

<u>Solution</u> : Dans la figure suivante, les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles, ainsi que (AC) et $(A'C')$, resp. (AB) et $(A'B')$. Par conséquent, les points P, Q, R se trouvent sur la droite à l'infini.



II) Réciproquement, on se donne dans $\mathbb{P}(V)$ trois points non alignés A', B', C' et des points $A \in \mathbf{D}_1 = (B'C')$, $B \in \mathbf{D}_2 = (C'A')$ et $C \in \mathbf{D}_3 = (A'B')$, tous distincts de $A,', B', C'$. On suppose les droites (AA'), (BB') et (CC') concourantes en un point I.

Dans les questions (9) **à** (11)**, on utilise provisoirement** des coordonnées homogènes $[u : v : w]$ telles que $A' = [1 : 0 : 0]$, $B' = [0 : 1 : 0]$ et $C' = [0 : 0 : 1]$; on a alors $A = [0 : a : 1]$, $B = [1 : 0 : b]$ et $C = [c : 1 : 0]$ pour certains $a, b, c \in k^\times$.

(9) (2 pts) Donner, en le justifiant, la condition sur a, b, c pour que A, B, C soient alignés.

<u>Solution</u> : Ces trois points sont alignés ssi $0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & c \\ a & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{vmatrix} = abc + 1$, i.e. ssi $abc = -1$.

(10) (3 pts) Écrire les équations des droites (AA'), (BB') et (CC'), puis la condition sur a, b, c pour que ces droites soient concourantes en I. Donner également les coordonnées homogènes $[u : v : w]$ de I.

Solution : Une équation de (AA'), resp. (BB'), resp. (CC'), est $v = aw$, resp. $w = bu$, resp. $u = cv$. Par dualité projective, ces trois droites sont concourantes ssi les formes linéaires $v - aw$, $w - bu$ et $u - cv$ sont liées, c.-à-d. ssi

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & -b & 1 \\ 1 & 0 & -c \\ -a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - abc$$

i.e. $abc = 1$. On peut aussi dire que le point de concours I de (AA') et (BB') vérifie $w = bu$ et $v = aw$, d'où $I = [1 : ab : b]$; il appartient à (CC') ssi on a $1 = u = cv = abc$.

(11) (4 pts) En utilisant les questions précédentes, montrer que A, B, C, I forment un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$.

Solution : On a $abc = 1$ puisque (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en I, et $1 \neq -1$ puisque $\mathrm{car}(k) \neq 2$, donc A, B, C ne sont pas alignés. Comme A, B, C jouent des rôles symétriques, pour montrer que A, B, C, I forment un repère projectif il suffit de montrer, par exemple, que A, B, I ne sont pas alignés. Or on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & ab \\ 1 & b & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & ab \\ 1 & b & 0 \end{vmatrix} = ab \neq 0.$$

Il existe donc des coordonnées (x, y, z) sur V telles que ces points aient pour coordonnées homogènes :

$$A = [1 : 0 : 0], \qquad B = [0 : 1 : 0], \qquad C = [0 : 0 : 1], \qquad I = [1 : 1 : 1].$$

(12) (3 pts) Déterminer, en le justifiant brièvement, l'équation des droites (AI), (BI) et (CI), puis montrer que $A' = [a : 1 : 1]$, $B' = [1 : b : 1]$ et $C' = [1 : 1 : c]$ pour certains $a, b, c \in k$.

Solution : L'équation $y = z$ est vérifiée par $A = [1 : 0 : 0]$ et $I = [1 : 1 : 1]$, donc c'est l'équation de (AI). De même, l'équation de (BI), resp. (CI), est $x = z$, resp. $x = y$. Donc les coordonnées homogènes de A' sont de la forme $[x : y : y]$, et comme $A' \neq A$ on a $y \neq 0$. On peut donc prendre $y = 1$ d'où $A = [a : 1 : 1]$ pour un certain $a \in k$. On obtient de même que $B' = [1 : b : 1]$ et $C' = [1 : 1 : c]$ pour certains $b, c \in k$.

(13) (3 pts) En utilisant que A, B', C' sont alignés, montrer que $bc = 1$. Montrer de même que $ac = 1 = ab$.

Solution : Comme A, B', C' sont alignés, on a $0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 1 - bc$, d'où $bc = 1$. De même, comme A', B, C' (resp. A', B', C) sont alignés, on a

$$0 = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} = ac - 1, \qquad 0 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ab - 1,$$

d'où $ac = 1 = ab$.

(14) (2 pts) Montrer que $a^2 = 1$ puis que $a = -1 = b = c$.

Solution : On a : $1 = (ab)(ac) = a^2(bc) = a^2$ donc $a = \pm 1$. Or $a \neq 1$ car $A \neq I$, donc $a = -1$. Alors $ac = 1 = ab$ donne $c = -1 = b$.

(15) (3 pts) En utilisant les résultats de la partie I, montrer qu'il existe une unique conique $\mathscr{C}$ tangente à $\mathbf{D}_1$ en A, à $\mathbf{D}_2$ en B et à $\mathbf{D}_3$ en C.

Solution : On a donc obtenu les même points A', B', C' qu'à la partie I, où l'on a vu que la conique $\mathscr{C}$ d'équation $xy + xz + yz = 0$ est l'unique conique tangente à $\mathbf{D}_1$ en A, à $\mathbf{D}_2$ en B et passant par C. De plus sa tangente en C en $\mathbf{D}_3$. Donc $\mathscr{C}$ est l'unique conique ayant la propriété requise.

***Exercice 3* (Birapport sur un pinceau de coniques)**. — (environ 13 pts) Dans le plan projectif $\mathbb{P}(V)$, soit (A, B, C, I) un repère projectif. Dans des coordonnées homogènes $[x : y : z]$ appropriées, on a

$$A = [1 : 0 : 0], \qquad B = [0 : 1 : 0], \qquad C = [0 : 0 : 1], \qquad I = [1 : 1 : 1].$$

À tout point $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ de k^3 on associe la forme quadratique Q_ω sur V suivante :

$$Q_\omega(x, y, z) = \alpha yz + \beta zx + \gamma xy$$

et l'on note $\mathscr{C}_\omega = \mathscr{V}(Q_\omega)$ la conique projective de $\mathbb{P}(V)$ correspondante. On pose

$$\Delta = \{[\omega] = [\alpha : \beta : \gamma] \in \mathbb{P}^2(k) \mid \mathscr{C}_\omega \text{ contient } A, B, C, I\}.$$

(1) (4 pts) Montrer que $\Delta = \mathbb{P}(H)$ pour un certain plan H de k^3 dont on donnera une équation. Montrer que la projection $\pi : (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\alpha, \beta)$ est un isomorphisme de H sur k^2, et expliciter son inverse θ.

Solution : Il est clair que $\mathscr{C}_\omega$ contient A, B, C pour tout $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$; elle contient I si et seulement si $0 = Q_\omega(1, 1, 1) = \alpha + \beta + \gamma$. Ceci est l'équation de H.

Il est clair que π induit un isomorphisme de H sur k^2, dont l'inverse θ est donné par $\theta(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta, -\alpha - \beta)$.

Pour tout $\mu \in k - \{0, 1\}$, on note $\mathbf{D}_\mu$ la droite projective de $\mathbb{P}(V)$ d'équation $z = \mu y$. Noter qu'elle passe par A mais pas par B, C ou I. Pour le moment, on fixe μ.

(2) (2 pts) Pour tout $[\omega] = [\alpha : \beta : \gamma] \in \Delta$, montrer que l'équation de $\mathbf{D}_\mu \cap \mathscr{C}_\omega$ est $yL(x, y) = 0$ pour une certaine forme linéaire L (dépendant de μ et ω) que l'on explicitera.

Solution : Un point $[x : y : \mu y]$ de $\mathbf{D}_\mu$ appartient à $\mathscr{C}_\omega$ ssi

$$0 = Q_\omega(x, y, \mu y) = \alpha\mu y^2 + \beta\mu yx + \gamma xy = y\big(\alpha\mu y + (\beta\mu + \gamma)x\big),$$

d'où

$$L(x, y) = (\mu\beta + \gamma)x + \mu\alpha y = \big(\beta(\mu - 1) - \alpha\big)x + \mu\alpha y,$$

en tenant compte de l'égalité $\gamma = -\alpha - \beta$.

(3) (3 pts) Pour $[\omega] = [\alpha : \beta : \gamma] \in \Delta$, on note $\phi([\omega])$ le point $[x : y : \mu y]$ de $\mathbf{D}_\mu$ défini par $L(x, y) = 0$. En tenant compte de l'équation obtenue à la question (1), écrire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

pour une matrice $A \in M_2(k)$ (unique à homothétie près) que l'on précisera. Montrer que A est inversible.

Solution : D'après la question précédente, on peut prendre (à homothétie près) : $y = \beta(\mu - 1) - \alpha$ et $x = -\mu\alpha$, i.e.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ -1 & \mu - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Comme $\mu \neq 0, 1$, la matrice A est bien inversible.

Remarque. D'après la question (1), l'application $[\alpha : \beta : \gamma] \mapsto [\alpha : \beta]$ est une homographie de Δ sur $\mathbb{P}^1(k)$, dont l'inverse est $p \mapsto [\theta(p)]$. De même, les applications $[x : y : \mu y] \mapsto [x : y]$ et $[x : y] \mapsto [x : y : \mu y]$ sont des homographies inverses l'une de l'autre.

(4) (2 pts) En utilisant la question (3) et la remarque précédente, montrer que l'application $\mathbb{P}^1(k) \to \mathbf{D}_\mu$ envoyant $p = [\alpha : \beta]$ sur $\phi([\theta(p)])$ est une homographie.

Solution : D'après la remarque précédente, il suffit de montrer que l'application $[\alpha : \beta] \mapsto [x : y]$, où $[x : y : \mu y] = \phi([\alpha : \beta : -\alpha - \beta])$, est une homographie. Or, c'est ce qu'on a établi à la question (3).

(5) (2 pts) Pour quatre points distincts $\delta_1, \ldots, \delta_4 \in \Delta$, on note $[\delta_1, \ldots, \delta_4]$ le birapport des points $q_i = \phi(\delta_i)$ de $\mathbf{D}_\mu$. Montrer que ce birapport ne dépend pas du choix de μ, mais seulement de $\delta_1, \ldots, \delta_4$.

Solution : Notons $[q_1, \ldots, q_4]_\mu$ le birapport des points $q_1, \ldots, q_4$ de $\mathbf{D}_\mu$. D'autre part, comme Δ est une droite projective, on peut définir le birapport $[\delta_1, \ldots, \delta_4]_\Delta$ des points δ_i de Δ. Comme l'application $\phi : \Delta \to \mathbf{D}_\mu$ est une homographie, on a

$$[q_1, \ldots, q_4]_\mu = [\delta_1, \ldots, \delta_4]_\Delta$$

donc ce birapport ne dépend pas du choix de μ, mais seulement de $\delta_1, \ldots, \delta_4 \in \Delta$.

Exercice 4 **(La sous-variété** $\mathrm{Gr}_2(k^5) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2(k^5))$**).** — (environ 14 pts) Soit V un k-ev de dimension $n \geq 2$. On rappelle qu'il existe une unique application bilinéaire $V^* \times \Lambda^2(V) \to V$, $(f, z) \mapsto f \dashv z$, telle que pour tous $f \in V^*$ et $u, v \in V$ on ait :

$$(*) \qquad f \dashv (u \wedge v) = f(u)v - f(v)u.$$

(1) (3 pts) Soit $z \in \Lambda^2(V)$ un 2-vecteur *pur*. Soit (e_1, e_2) une base du sev F de V associé à z, complétons-la en une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de V et soit $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de V^*. Calculer $e_i^* \dashv z$, pour $i = 1, \ldots, n$, puis en déduire que $\boxed{(f \dashv z) \wedge z = 0}$ pour tout $f \in V^*$.

Solution : Comme z est pur, il s'écrit $z = e_1 \wedge e_2$ pour deux vecteurs e_1, e_2 linéairement indépendants. Complétons (e_1, e_2) en une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de V et soit $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de V^*. Alors pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a

$$e_i^* \dashv z = \begin{cases} e_2 & \text{si } i = 1, \\ -e_1 & \text{si } i = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $e_2 \wedge e_1 \wedge e_2 = 0 = e_1 \wedge e_1 \wedge e_2$, on a dans tous les cas $(e_i^* \dashv z) \wedge z = 0$. Comme l'application $f \mapsto (f \dashv z) \wedge z$ est linéaire, il en résulte que $(f \dashv z) \wedge z = 0$ pour tout $f \in V^*$.

Désormais, on prend $n = 5$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_5)$ une base de V et $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_5^*)$ la base duale de V^*. Pour $d = 2$ ou 3, on note $\mathscr{P}_d(5)$ l'ensemble des sous-ensembles de $\{1, \ldots, 5\}$ de cardinal d. À tout $I \in \mathscr{P}_d(5)$, on associe l'élément $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}$ de

$\Lambda^d(V)$, où $i_1 < \cdots < i_d$ désignent les éléments de I rangés par ordre croissant. Alors tout $z \in \Lambda^2(V)$ s'écrit de façon unique

$$(\heartsuit) \qquad z = \sum_{I \in \mathscr{P}_2(5)} a_I\, e_I = \sum_{1 \le i < j \le 5} a_{\{i,j\}}\, e_i \wedge e_j$$

avec $a_{\{i,j\}} \in k$ et, d'après $(*)$, pour tout $h \in \{1, \dots, 5\}$ on a :

$$(\clubsuit) \qquad e_h^* \dashv z = \sum_{i \neq h} a_{\{h,i\}} \varepsilon(h,i)\, e_i,$$

où $\varepsilon(h,i) = 1$ si $h < i$ et $\varepsilon(h,i) = -1$ si $h > i$. D'autre part, pour tout $J \in \mathscr{P}_3(5)$ et tout $i \in J$, on a :

$$(\spadesuit) \qquad e_i \wedge e_{J-\{i\}} = \varepsilon(J,i) e_J,$$

où $\varepsilon(J,i)$ vaut 1 (resp. -1) si le nombre $N(J,i)$ de $j \in J$ tels que $j > i$ est pair (resp. impair).

(2) (1 pt) Quelle est la dimension de $\Lambda^2(V)$?

Solution : Sa dimension est $\binom{5}{2} = 10$.

(3) (4 pts) Fixons quatre éléments $h < j < p < q$ dans $\{1, \dots, 5\}$. On écrit a_{hj} au lieu de $a_{\{h,j\}}$, etc. En utilisant la question (1) et les égalités $(\heartsuit, \clubsuit)$ et $(\spadesuit)$ pour $J = \{j, p, q\}$, montrer que l'on a :

$$\pm a_{hj} a_{pq} \pm a_{hp} a_{jq} \pm a_{hq} a_{jp} = 0$$

pour des signes $\pm$ que l'on précisera.

Solution : Les e_K pour $K \in \mathscr{P}_3(5)$ forment une base de $\Lambda^3(V)$. Comme $(e_h^* \dashv z) \wedge z$ est nul, chacune de ses coordonnées x_K dans cette base est nulle. D'après $(\clubsuit)$ et $(\spadesuit)$, le vecteur e_K apparaît dans $(e_h^* \dashv z) \wedge z$ une fois pour chaque $i \in K$ tel que $i \neq h$, avec le coefficient $\varepsilon(h,i)\varepsilon(K,i) a_{\{h,i\}} a_{J-\{i\}}$.

Dans notre cas, avec $J = \{j, p, q\}$ et $h < j < p < q$, on a toujours $\varepsilon(h,i) = 1$ et $\varepsilon(J,i) = 1$ (resp. -1) si $i \neq p$ (resp. $i = p$). On obtient donc le coefficient suivant :

$$x_J = a_{hj} a_{pq} - a_{hp} a_{jq} + a_{hq} a_{jp}.$$

(4) (2 pts) Écrire explicitement les équations quadratiques $Q_1, \dots, Q_5$ ainsi obtenues.

Solution : On obtient donc les équations ci-dessous, données par cinq formes quadratiques $Q_1, \dots, Q_5$:

$$\begin{aligned}
a_{12} a_{34} - a_{13} a_{24} + a_{14} a_{23} &= 0 \\
a_{12} a_{35} - a_{13} a_{25} + a_{15} a_{23} &= 0 \\
a_{12} a_{45} - a_{14} a_{25} + a_{15} a_{24} &= 0 \\
a_{13} a_{45} - a_{14} a_{35} + a_{15} a_{34} &= 0 \\
a_{23} a_{45} - a_{24} a_{35} + a_{25} a_{34} &= 0
\end{aligned}$$

On rappelle que la grassmannienne $\mathrm{Gr}_2(V)$ est la sous-variété de $\mathbb{P}(\Lambda^2(V))$ définie par ces équations, i.e.

$$\mathrm{Gr}_2(V) = \left\{ \left[\sum_{1 \le i < j \le 5} a_{ij}\, e_i \wedge e_j \right] \,\middle|\, Q_s(a_{12}, \dots, a_{45}) = 0 \text{ pour } s = 1, \dots, 5 \right\}.$$

Soit $\mathbb{P}(E)$ le sous-espace projectif de $\mathbb{P}(\Lambda^2(V))$ de dimension 4 défini par les cinq équations suivantes :

$$a_{12} = 0 = a_{13} = a_{35} = a_{45}, \qquad a_{24} = a_{14} - a_{25}.$$

On munit $\mathbb{P}(E)$ des coordonnées homogènes $[a_{14} : a_{34} : a_{15} : a_{23} : a_{25}]$ (dans cet ordre).

(5) (2 pts) Écrire, en fonction des coordonnées homogènes $[a_{14} : a_{34} : a_{15} : a_{23} : a_{25}]$ les équations de $\mathbb{P}(E) \cap \mathrm{Gr}_2(V)$.

Solution : En annulant $a_{12}, a_{13}, a_{35}, a_{45}$ et en remplaçant a_{24} par $a_{14} - a_{25}$, on obtient les cinq équations :

$$\begin{aligned} a_{14}a_{23} &= 0 \\ a_{15}a_{23} &= 0 \\ a_{14}a_{25} &= a_{15}(a_{14} - a_{25}) \\ a_{15}a_{34} &= 0 \\ a_{25}a_{34} &= 0 \end{aligned}$$

(6) (3 pts) Soit $\mathbb{P}(F)$ le sous-espace projectif de $\mathbb{P}(E)$ de dimension 3 défini par l'équation $a_{14} - a_{34} + a_{23} - a_{25} = 0$. Montrer que $\mathbb{P}(F) \cap \mathrm{Gr}_2(V)$ est formé de trois points simples que l'on déterminera, et du point double $p = [0 : 0 : 1 : 0 : 0]$. Indication : distinguer les cas selon que $a_{23}a_{34} \neq 0$, ou $a_{23} = 0 \neq a_{34}$, ou $a_{23} \neq 0 = a_{34}$, ou $a_{23} = 0 = a_{34}$, et utiliser ensuite l'équation de $\mathbb{P}(F)$.

Solution : En considérant les quatre équations du type $xy = 0$, on obtient les quatre cas suivants :

(i) $a_{23}a_{34} \neq 0$. Alors $a_{14} = 0 = a_{15} = a_{25}$ et l'équation de $\mathbb{P}(F)$ donne $a_{34} = a_{23}$. On obtient ainsi le point $p_1 = [0 : 1 : 0 : 1 : 0]$.

(ii) $a_{23} = 0$ mais $a_{34} \neq 0$. Alors $a_{15} = 0 = a_{25}$ et l'équation de $\mathbb{P}(F)$ donne $a_{34} = a_{14}$. On obtient ainsi le point $p_2 = [1 : 1 : 0 : 0 : 0]$.

(iii) $a_{34} = 0$ mais $a_{23} \neq 0$. Alors $a_{14} = 0 = a_{15}$ et l'équation de $\mathbb{P}(F)$ donne $a_{23} = a_{25}$. On obtient ainsi le point $p_3 = [0 : 0 : 0 : 1 : 1]$.

(iv) $a_{23} = 0 = a_{34}$. Alors l'équation de $\mathbb{P}(F)$ donne $a_{14} = a_{25}$ et la 5ème équation quadratique donne $a_{14}^2 = 0$. On obtient ainsi le « point double » $p_4 = [0 : 0 : 1 : 0 : 0]$.

FIN