Contrôle du 19 novembre 2015 (1h30) (noté sur 30)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Ce contrôle comporte 2 exercices indépendants.

Exercice 1. — Soit $V = \mathbb{C}^2$ et soit $G = \mathrm{PGL}(V)$ le groupe des homographies de $\mathbb{P}(V)$. Soit h un élément de G *distinct de l'identité* et soit g un élément de $\mathrm{GL}(V)$ dont l'image $\overline{g}$ dans G égale h. Pour tout $v \in V - \{0\}$ on note $[v]$ son image dans $\mathbb{P}(V)$.

(1) À quelle condition un élément $[v]$ de $\mathbb{P}(V)$ est-il un point fixe de h ?

(2) Montrer que l'ensemble $\mathrm{Fix}(h)$ des points fixes de h est de cardinal 1 ou 2, en précisant sous quelle hypothèse sur g ce cardinal vaut 1 ou 2. Donner un exemple de g pour lequel $|\mathrm{Fix}(h)| = 1$.

(3) On suppose que $|\mathrm{Fix}(h)| = 1$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de V telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ est triangulaire supérieure. Écrire une telle matrice A et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puis, pour tout $a \in \mathbb{C}$, calculer $A^n \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$.

Désormais, on suppose que $|\mathrm{Fix}(h)| = 2$ et que $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base de V telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ est diagonale, de coefficients diagonaux μ_1 et μ_2.

(4) Montrer que le rapport μ_1/μ_2 ne dépend que de h. On le notera $\rho(h)$.

(5) Montrer que h est une involution (distincte de l'identité) si et seulement si $\rho(h) = -1$.

(6) On pose $p_1 = [e_1]$ et $p_2 = [e_2]$. Pour tout $q \in \mathbb{P}(V)$ distinct de p_1 et p_2, montrer que le birapport $[p_1, p_2, q, h(q)]$ est le point $[\rho(h), 1]$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Exercice 2. — On note ∞ le point $[1, 0]$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et l'on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{\infty\}$ par la bijection $z \mapsto [z, 1]$. Soit $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ le groupe des homographies de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et soit $G_\infty = \{h \in G \mid h(\infty) = \infty\}$.

(1) Démontrer, en refaisant une démonstration du cours, que G_∞ s'identifie au groupe des bijections affines de $\mathbb{C}$.

(2) Démontrer que G est engendré par G_∞ et par l'homographie $\tau : z \mapsto 1/z$.

Dans la suite, on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|z\| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

(3) Montrer que les éléments de G_∞ sont des bijections affines de $\mathbb{R}^2$ dont on précisera la nature géométrique. En déduire, en le justifiant brièvement, que G_∞ agit transitivement sur l'ensemble des droites (resp. des cercles de rayon non nul) de $\mathbb{R}^2$.

(4) Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$, d'équation $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{C}^\times$, que l'on précisera, tel que $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \beta z + \overline{\beta z} + c = 0\}$. Réciproquement, montrer que tout sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par une telle équation est une droite de $\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera.

Soit $\mathscr{S} = \{(A, c, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mid \beta\overline{\beta} - Ac > 0\}$.

(5) Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C}$ le cercle de centre p et de rayon r. Montrer qu'il existe $(A, c, \beta) \in \mathscr{S}$, que l'on précisera, tels que $\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid Az\overline{z} + \beta z + \overline{\beta z} + c = 0\}$. Réciproquement, montrer que tout sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par une telle équation, avec $(A, c, \beta) \in \mathscr{S}$, est un cercle que l'on déterminera.

T.S.V.P →

(6) Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$, soit τ l'homographie $z \mapsto 1/z$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et soit $E = \tau(D \cup \{\infty\})$. Montrer que si $0 \in D$ alors $E \cap \mathbb{C}$ est une droite de $\mathbb{R}^2$ contenant 0, et si $0 \notin D$ alors $E \cap \mathbb{C}$ est un cercle de $\mathbb{R}^2$ de rayon non nul et contenant 0.

(7) Soient $z_1, \ldots, z_4 \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Le birapport $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ est réel.

(b) $z_1, \ldots, z_4$, considérés comme points de $\mathbb{R}^2$, sont cocycliques ou alignés.

Indications. Pour (a) $\Rightarrow$ (b), remplacer $z_1, \ldots, z_4$ par $\infty, 0, 1$ et un certain réel x, puis utiliser les questions (2), (3) et (6). Pour (b) $\Rightarrow$ (a), utiliser les questions (6) et (3) pour placer les quatre points dans $\mathbb{R}$ puis utiliser la formule explicite du birapport.
