Corrigé de l'examen du 18 décembre 2014 (3h) (noté sur 70)

Exercice 1. — (20 pts) Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine euclidien. Pour $u, v \in E$, leur produit scalaire est noté $u \cdot v$, la norme euclidienne de u est $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$, et pour $P, Q \in \mathscr{E}$ on pose $PQ = \|\overrightarrow{PQ}\|$.

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On définit $L : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ par $L(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i M^2$ et pour tout $k \in \mathbb{R}$, on pose $\mathscr{L}_k = \{M \in \mathscr{E} \mid L(M) = k\}$.

(1) Pour $A, P, Q \in \mathscr{E}$, exprimer $AP^2 - AQ^2$ comme le produit scalaire de deux vecteurs.

Solution : $AP^2 - AQ^2 = (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}) \cdot (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ}) = (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}) \cdot \overrightarrow{QP}$.

On pose $s = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Pour les questions 1 à 3, on suppose $s \neq 0$; alors, quitte à changer chaque λ_i en $-\lambda_i$, on peut supposer que $s > 0$.

(2) $(s > 0)$ Montrer qu'il existe $G \in \mathscr{E}$ tel que $L(M) - L(G) = s\, GM^2$ pour tout $M \in \mathscr{E}$.

Solution : Soit G le barycentre des points $(A_i, \lambda_i/s)$ i.e. $G = \dfrac{1}{s} \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$. D'après la question précédente, on a :

$$L(M) - L(G) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overrightarrow{A_iM} + \overrightarrow{A_iG}) \cdot \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GM} \cdot \big(\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_iM}\big) + \overrightarrow{GM} \cdot \big(\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_iG}\big)$$

et comme $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_iM} = s\overrightarrow{GM}$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_iG} = 0$, ceci égale $s\, \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GM} = s\, GM^2$.

(3) $(s > 0)$ Décrire l'image $L(\mathscr{E}) \subset \mathbb{R}$ en fonction de G, puis en déduire l'unicité de G.

Solution : On a $L(\mathscr{E}) = [L(G), +\infty[$ et de plus $L(M) > L(G)$ pour tout $M \neq G$, donc G est l'unique point en lequel la fonction L a un minimum.

(4) $(s > 0)$ Donner la nature géométrique de l'ensemble $\mathscr{L}_k$ en fonction de G et k.

Solution : On a $\mathscr{L}_k = \big\{M \in \mathscr{E} \mid GM^2 = \dfrac{k - L(G)}{s}\big\}$. Cet ensemble est vide si $k < L(G)$ et si $k \geq L(G)$ c'est la sphère de centre G et de rayon r, où $r^2 = (k - L(G))/s$.

(5) $(s > 0)$ Lorsque $n = 2$, exprimer $L(G)$ en fonction de λ_1, λ_2 et $(A_1A_2)^2$.

Solution : Comme $G = \dfrac{\lambda_1}{s} A_1 + \dfrac{\lambda_2}{s} A_2$ on a $\overrightarrow{A_1G} = \dfrac{\lambda_2}{s} \overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{A_2G} = \dfrac{\lambda_1}{s} \overrightarrow{A_2A_1}$ et donc

$$L(G) = \lambda_1 \frac{\lambda_2^2}{s^2} (A_1A_2)^2 + \lambda_2 \frac{\lambda_1^2}{s^2} (A_1A_2)^2 = \frac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda)^2} (A_1A_2)^2 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (A_1A_2)^2.$$

Dans les questions 6 à 8 on suppose que $s = 0$.

(6) $(s = 0)$ Montrer qu'il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que pour tout $M, P \in \mathscr{E}$, on ait $L(M) - L(P) = 2v \cdot \overrightarrow{PM}$.

Solution : Comme $s = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ est nul, alors le vecteur $f(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_iM}$ est un vecteur constant v ne dépendant pas de M (car $f(M) - f(P) = s\, \overrightarrow{PM} = 0$). D'après la question 1, on a

$$L(M) - L(P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overrightarrow{A_iM} + \overrightarrow{A_iP}) \cdot \overrightarrow{PM} = 2v \cdot \overrightarrow{PM}.$$

Si w est un second vecteur vérifiant la même égalité, alors $(v-w)\cdot\overrightarrow{PM}$ pour tout $P, M \in \mathscr{E}$, donc $(v-w)\cdot u$ pour tout $u \in E$, d'où $v = w$.

(7) $(s = 0)$ Décrire l'image $L(\mathscr{E}) \subset \mathbb{R}$, selon la valeur de v.

Solution : Si $v = 0$ alors L est constante, et si $v \neq 0$ alors $L(\mathscr{E}) = \mathbb{R}$.

(8) $(s = 0)$ On suppose $\|v\| = 1$ et l'on fixe un point $I \in \mathscr{E}$ tel que $L(I) = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, décrire géométriquement l'ensemble $\mathscr{L}_k$.

Solution : On a $\mathscr{L}_k = \{M \in \mathscr{E} \mid 2v \cdot \overrightarrow{IM} = k\}$. C'est donc l'hyperplan orthogonal à $\mathbb{R}v$ passant par n'importe quel point J tel que $v \cdot \overrightarrow{IJ} = k/2$, par exemple $J = I + \dfrac{k}{2}v$.

(9) Soient $A \neq B$ dans $\mathscr{E}$ et $q \in]0, 1]$. Décrire géométriquement, selon la valeur de q, l'ensemble $\mathscr{L} = \{M \in \mathscr{E} \mid \dfrac{AM}{BM} = q\}$.

Solution : Si $q = 1$, c'est l'hyperplan médiateur de A et B. Supposons donc $q < 1$. Alors $\mathscr{L} = \{M \in \mathscr{E} \mid AM^2 - q^2BM^2 = 0\}$ est l'ensemble $\mathscr{L}_0$ pour $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -q^2$ et l'on a $s = 1 - q^2 > 0$. Soit G le barycentre de $(A, 1/s)$ et $(B, -q^2/s)$. D'après les questions 4 et 5, on a $L(G) = \dfrac{-q^2}{1-q^2}AB^2$ et $\mathscr{L}$ est la sphère de centre G et de rayon $r = \dfrac{q}{1-q^2}AB$.

On suppose que $\dim(\mathscr{E}) = 2$. Soit (ABC) un triangle dans $\mathscr{E}$, rectangle en A. On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.

(10) Montrer que l'ensemble $\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{E} \mid \dfrac{AM}{BM} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{b}{a}\}$ est un cercle, dont on précisera le rayon r. Donner également les coordonnées du centre I dans le repère $(B, \vec{i}, \vec{j})$, où $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de E telle que $\overrightarrow{BA} = c\ \vec{i}$

Solution : Comme (ABC) est rectangle en A alors $a^2 = b^2 + c^2$ donc $q = \dfrac{b}{a}$ est < 1. Posons $s = 1 - q^2$ et soit I le barycentre des points $(A, 1/s)$ et $(B, -q^2/s)$. D'après la question précédente, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I et de rayon

$$r = \frac{b}{a}\,\frac{a^2}{a^2-b^2}\,c = \frac{ab}{c}.$$

De plus, on a $I = \dfrac{1}{s}A + \dfrac{-q^2}{s}B$ donc $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{s}\overrightarrow{BA} = \dfrac{a^2}{a^2-b^2}\,c\,\vec{i} = \dfrac{a^2}{c}\,\vec{i}$ et donc les coordonnées de I sont $\big(\dfrac{a^2}{c}, 0\big)$.

Exercice 2. — (7 pts) Soit $\mathbb{K}$ un corps. Pour $i = 1, \dots, 4$, soient $q_i = [x_i, y_i]$ des éléments de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. On suppose q_1, q_2, q_3 deux à deux distincts.

(1) Exprimer le birapport $[q_1, q_2, q_3, q_4] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ en fonction des x_i et y_i.

Solution : $[q_1, q_2, q_3, q_4]$ est le point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ suivant :

$$\left[\frac{\begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ y_4 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ y_3 & y_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}}\right] = \left[\frac{x_4y_2 - y_4x_2}{x_3y_2 - y_3x_2}, \frac{x_1y_4 - y_1x_4}{x_1y_3 - y_1x_3}\right] = \left[\frac{x_4y_2 - y_4x_2}{x_3y_2 - y_3x_2}, \frac{x_4y_1 - y_4x_1}{x_3y_1 - y_3x_1}\right].$$

(2) Vérifier la formule en donnant successivement à q_4 les valeurs q_1, q_2 et q_3.

Solution : Identifions $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ via $[s, 1] = s$ pour tout $s \in \mathbb{K}$ et $[1, 0] = \infty$. Si q_4 égale q_1 (resp. q_2, resp. q_3) le birapport précédent vaut $[1, 0] = \infty$ (resp. $[0, 1] = 0$, resp. $[1, 1] = 1$), ce qui est en accord avec le fait que $[\infty, 0, 1, p]$ vaut ∞ (resp. 0, resp. 1) si $p = \infty$ (resp. $p = 0$, resp. $p = 1$).

Exercice 3. — (19 pts) Soient $\mathscr{P}$ un plan affine réel, (B, C, A) un repère affine, (x, y, z) les coordonnées barycentriques dans ce repère, G l'isobarycentre des points B, C, A.

(1) Écrire les coordonnées barycentriques de B, C, A et G, puis du milieu I de G et A.

Solution : $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, $A = (0, 0, 1)$, $G = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $I = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3})$.

Soit $\mathscr{C}$ la conique affine donnée par l'équation en coordonnées barycentriques suivante :

$$(*) \qquad 2xy - xz - yz = 0.$$

(2) Vérifier que B, C, A et G appartiennent à $\mathscr{C}$ mais que I n'y appartient pas.

Solution : L'équation est vérifiée si $x = y = 0$ ou si $x = z = 0$ ou si $y = z = 0$, donc A, B, C appartiennent à $\mathscr{C}$. De plus, $\frac{1}{9}(2-1-1) = 0$ donc G y appartient aussi. Par contre, $\frac{2}{36} - 2\frac{1}{6}\frac{2}{3} = \frac{-3}{18} = \frac{-1}{6} \neq 0$ donc $I \notin \mathscr{C}$.

(3) Exprimer les coordonnées affines dans le repère $\mathscr{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en fonction de x, y, z.

Solution : Si M a pour coordonnées barycentriques (x, y, z) alors pour tout $P \in \mathscr{P}$ on a $\overrightarrow{PM} = x\overrightarrow{PB} + y\overrightarrow{PC} + z\overrightarrow{PA}$. Prenant $P = A$ on obtient :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

Ceci montre que les coordonnées affines de M dans le repère $\mathscr{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont (x, y).

(4) En utilisant l'égalité $z = 1 - x - y$, écrire l'équation $F(u, v) = 0$ de $\mathscr{C}$ dans les coordonnées affines (u, v) trouvées, puis calculer les dérivées partielles $\partial_u F$ et $\partial_v F$.

Solution : Remplaçant z par $1 - x - y$, l'équation de $\mathscr{C}$ s'écrit $F(x, y) = 0$ où $F(x, y) = x^2 - x + 4xy + y^2 - y$. On a alors $\partial_x F = 2x - 1 + 4y$ et $\partial_y F = 4x + 2y - 1$.

(5) Déterminer l'unique point Ω en lequel les deux dérivées partielles s'annulent. On admet que Ω est le **centre** de la conique $\mathscr{C}$.

Solution : Résolvons le système $2x - 1 + 4y = 0 = 4x + 2y - 1$, c.-à-d. $\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 4x + 2y = 1. \end{cases}$

Faisant la différence on trouve $x = y$, d'où $x = y = 1/6$ et donc $\Omega = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.

Démontrons aussi la :

Proposition. — *Soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une conique $\mathscr{C}$ d'un plan affine euclidien $(\mathscr{E}, E)$. On suppose que $\mathscr{C}$ contient trois points B, C, A non alignés. S'il existe un* unique *point $\Omega = (x_0, y_0)$ tel que $d_\Omega F = 0$, alors Ω est centre de symétrie de $\mathscr{C}$ (i.e. $\mathscr{C}$ est invariante par la symétrie centrale de centre Ω) et $\mathscr{C}$ est une ellipse ou une hyperbole de centre Ω, ou bien la réunion de deux droites concourantes en Ω (ce dernier cas étant exclu si $\Omega \notin \mathscr{C}$).*

Démonstration. — On a vu en cours que la différentielle d_qF de F en un point q est une forme linéaire sur E qui ne dépend *pas* du choix des coordonnées. D'autre part, comme $\mathscr{C}$ contient trois points non alignés, elle n'est ni vide, ni réduite à un point, ni égale à une droite double ; les possibilités sont donc : une parabole, ellipse ou hyperbole, ou la réunion de deux droites distinctes, sécantes ou parallèles. Alors, dans des coordonnées (X,Y) appropriées (orthonormées dans les cas (a), (b), (d) mais pas nécessairement dans le cas (c)) l'équation de $\mathscr{C}$ est : (a) $2pX - Y^2 = 0$ avec $p > 0$, (b) $\dfrac{X^2}{a^2} \pm \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$, (c) $XY = 0$, (d) $Y^2 - \alpha Y = 0$ avec $\alpha \neq 0$.

Soit q un point arbitraire de coordonnées (X_0, Y_0). Dans le cas (a), $d_qF = 2p\,dX - 2Y_0dY$ ne s'annule jamais (i.e. n'est jamais la forme linéaire nulle) puisque le coefficient de dX est $p \neq 0$. Au contraire, dans le cas (d), $d_qF = (2Y_0 - \alpha)dY$ s'annule en tous les points $(X_0, \alpha/2)$. Dans les cas (b) et (c), d_qF égale, respectivement, $\dfrac{2X_0}{a^2}dX \pm \dfrac{2Y_0}{b^2}dY$ et $Y_0dX + X_0dY$, et ceci est nul si et seulement si $X_0 = 0 = Y_0$ et dans ce cas $q = (X_0, Y_0)$ est le centre de l'ellipse ou de l'hyperbole, ou le point de concours des deux droites.

Dans ces deux cas, l'équation est invariante par la symétrie centrale de centre q, qui change (X,Y) en $(-X,-Y)$. Bien sûr, l'équation est même invariante par les symétries axiales qui changent (X,Y) en $(-X,Y)$ ou $(X,-Y)$ mais ceci est propre aux coordonnées (X,Y) choisies. Par contre, l'invariance par la symétrie centrale de centre q implique que, pour *tout* système de coordonnées (x,y) centré en q, l'équation de $\mathscr{C}$ est de la forme $\alpha\, x^2 + \beta\, xy + \gamma\, y^2 = f$, i.e. sans termes de degré 1. En effet, l'équation est a priori de la forme

$$\alpha\, x^2 + \beta\, xy + \gamma\, y^2 + ux + vy = f,$$

et comme cette équation est invariante par le changement de (x,y) en $(-x,-y)$ on obtient aussi, par soustraction, l'égalité $ux + vy = 0$ pour tout $(x,y) \in \mathscr{C}$. Comme $\mathscr{C}$ contient trois points non alignés, ceci entraîne que $u = v = 0$. Enfin, si $q = (0,0)$ n'appartient pas à $\mathscr{C}$ alors, d'une part, $\mathscr{C}$ est une ellipse ou une hyperbole de centre q et, d'autre part, dans l'équation ci-dessus on a $f \neq 0$ donc en divisant par f on peut se ramener au cas où $f = 1$. □

(6) Écrire les coordonnées barycentriques de Ω et identifier géométriquement le point Ω.

Solution : Un point de coordonnées (x,y) dans le repère $\mathscr{R}$ a pour coordonnées barycentriques $(x, y, 1-x-y)$, donc Ω a pour coordonnées barycentriques $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3})$. C'est donc le point I introduit dans la question 1, i.e. le milieu de G et A.

On munit $\mathscr{P}$ d'une structure euclidienne et l'on suppose que le triangle BCA est isocèle en A, i.e. que $AB = AC$. Soit alors $\mathbf{R}_G = (G, \vec{i}, \vec{j})$ un repère **orthonormé** centré en G et tel que $\overrightarrow{GA} = 2a\,\vec{i}$ pour un certain réel $a > 0$.

Comme le triangle ABC est isocèle en A, la médiane (AG) est aussi la médiatrice du segment $[B,C]$, donc B, C sont échangés par la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(GA) = G + \mathbb{R}\vec{i}$, donc il existe $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b \neq 0$ et $B = (c, b)$ et $C = (c, -b)$. Comme l'isobarycentre de A, B, C est $G = (0,0)$, on obtient $c = -a$.

(7) Écrire les coordonnées dans $\mathbf{R}_G$ du centre Ω de la conique $\mathscr{C}$.

Solution : $\Omega = I$ est le milieu de G et A donc il a pour coordonnées $(a, 0)$.

On note (X,Y) les coordonnées dans le repère orthonormé $\mathbf{R}_\Omega = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Comme $\Omega = I$ est le centre de $\mathscr{C}$, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que l'équation de $\mathscr{C}$ soit de la forme

$$(\star) \qquad \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 = 1.$$

(Ceci découle de la démonstration de la proposition donnée après la question 5.)

(8) Écrire les coordoonnées dans $\mathbf{R}_\Omega$ des points A, B, C et G puis, en utilisant que $\mathscr{C}$ passe par ces points, déterminer les réels α, β, γ.

Solution : Dans $\mathbf{R}_\Omega$, on a $A = (a, 0)$, $G = (-a, 0)$, $B = (-2a, b)$ et $C = (-2a, -b)$. Comme $\mathscr{C}$ passe par A et G, on a $\alpha a^2 = 1$ d'où $\alpha = 1/a^2$, et comme elle passe par B et C

on a $4 \pm 2\beta ab + \gamma b^2 = 1$. En faisant la différence des deux équations, on trouve $4ab\beta = 0$ d'où $\beta = 0$, puis $\gamma b^2 = -3$ donne $\gamma = -3/b^2$.

(9) Déterminer la nature géométrique de $\mathscr{C}$ et préciser ses sommets et, s'il y a lieu, ses asymptotes.

Solution : L'équation de $\mathscr{C}$ est $\dfrac{X^2}{a^2} - 3\dfrac{Y^2}{b^2} = 1$. C'est donc une hyperbole, de centre $\Omega = I$ et d'axe focal (IA). Ses sommets sont les points de coordonnées $(\pm a, 0)$, i.e. ce sont G et A. Les asymptotes sont données par l'équation $X^2 = \dfrac{3a^2}{b^2}Y^2$, i.e. ce sont les deux droites d'équations $X = \dfrac{\sqrt{3}a}{b}Y$ et $X = \dfrac{-\sqrt{3}a}{b}Y$.

Exercice 4. — (20 pts) Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de V, (x, y, z) les coordonnées sur V et $[x, y, z]$ les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}(V)$ correspondant à $\mathscr{B}$. Soit P_i l'image de e_i dans $\mathbb{P}(V)$, pour $i = 1, 2, 3$ et soit P_4 l'image de $e_1 + e_2 + e_3$.

On note E le plan vectoriel d'équation $z = 0$ et $\mathbf{D} = \mathbb{P}(E) = (P_1P_2)$ la droite projective correspondante. Soit $M = [a, b, c]$ un point variable de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, distinct des P_i et n'appartenant à aucune des droites (P_iP_j) pour $1 \leq i < j \leq 3$.

(1) Pour $i = 1, \ldots, 4$, donner une équation $f_i \in V^*$ de la droite (MP_i).

Solution : $f_1 = cy - bz$, $f_2 = cx - az$, $f_3 = bx - ay$, et f_4 égale

$$\begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 1 & b & y \\ 1 & c & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 0 & b-a & y-x \\ 0 & c-a & z-x \end{vmatrix} = (b-a)(z-x) - (c-a)(y-x) = (c-b)x + (a-c)y + (b-a)z.$$

(2) Pour $i = 1, \ldots, 4$, déterminer le point d'intersection q_i de (MP_i) avec $\mathbf{D}$.

Solution : $q_1 = P_1 = [1, 0, 0]$, $q_2 = P_2 = [0, 1, 0]$, $q_3 = [a, b, 0]$, et $q_4 = [a - c, b - c, 0]$.

(3) Calculer explicitement le birapport des points q_1, q_2, q_3, q_4 de $\mathbf{D}$.

Solution : $[q_1, q_2, q_3, q_4]$ est égal à :

$$\left[\frac{\operatorname{dét}(q_4, q_2)}{\operatorname{dét}(q_3, q_2)}, \frac{\operatorname{dét}(q_1, q_4)}{\operatorname{dét}(q_1, q_3)}\right] = \left[\frac{\begin{vmatrix} a-c & 0 \\ b-c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-c \\ 0 & b-c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{vmatrix}}\right] = \left[\frac{a-c}{a}, \frac{b-c}{b}\right].$$

(4) Soit $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Exprimer l'égalité $[q_1, q_2, q_3, q_4] = [\lambda, \mu]$ sous la forme d'une équation $\boxed{\gamma\, ab + \beta\, ca + \alpha\, bc = 0}$ pour des scalaires α, β, γ que l'on déterminera en fonction de λ et μ.

Solution : $\left[\dfrac{a-c}{a}, \dfrac{b-c}{b}\right] = [\lambda, \mu]$ ssi $\mu b(a-c) = \lambda a(b-c)$ i.e. ssi a, b, c vérifient l'équation :

$$(\star) \qquad (\mu - \lambda)ab + \lambda ac - \mu bc = 0.$$

Soit Q la forme quadratique sur V définie par $Q(x, y, z) = \gamma xy + \beta zx + \alpha yz$.

(5) Vérifier que $P_1, \ldots, P_4$ appartiennent à la conique projective $\mathscr{V}(Q) \subset \mathbb{P}(V)$.

Solution : $Q(x,y,z) = (\mu-\lambda)xy + \lambda xz - \mu yz$ s'annule si $x = y = 0$ ou si $x = z = 0$ ou si $y = z = 0$, donc $\mathscr{V}(Q)$ contient P_1, P_2 et P_3. Et l'on a $Q(1,1,1) = \mu - \lambda + \lambda - \mu = 0$ donc $\mathscr{V}(Q)$ contient aussi P_4.

(6) Écrire la matrice A de Q dans la base $\mathscr{B}$, puis déterminer les points $[\lambda, \mu]$ pour lesquels Q est dégénérée.

Solution : $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mu-\lambda & \lambda \\ \mu-\lambda & 0 & -\mu \\ \lambda & -\mu & 0 \end{pmatrix}$ d'où dét$(A) = \dfrac{1}{8} \times 2\lambda\mu(\lambda-\mu) = \lambda\mu(\lambda-\mu)/4$.

Donc Q est dégénérée ssi $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$ ou $\lambda = \mu$, c.-à-d. pour les points $[0,1]$, $[1,0]$ et $[1,1]$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

(7) Dans chaque cas où Q est dégénérée, exprimer en fonction de $P_1, \ldots, P_4$ les droites qui forment la conique $\mathscr{V}(Q)$.

Solution : Si $[\lambda,\mu] = [1,1]$ on a $Q(x,y,z) = (x-y)z$ donc $\mathscr{V}(Q)$ est la réunion des droites d'équations $x = y$ et $z = 0$, i.e. les droites (P_3P_4) et (P_1P_2).

Si $[\lambda,\mu] = [0,1]$, on a $Q(x,y,z) = (x-z)y$ donc $\mathscr{V}(Q)$ est la réunion des droites d'équations $x = z$ et $y = 0$, i.e. les droites (P_2P_4) et (P_1P_3).

Si $[\lambda,\mu] = [1,0]$, on a $Q(x,y,z) = (z-y)x$ donc $\mathscr{V}(Q)$ est la réunion des droites d'équations $y = z$ et $x = 0$, i.e. les droites (P_1P_4) et (P_2P_3).

On note $\mathscr{D}_\infty$ la droite projective d'équation $x + y + z = 0$ et l'on identifie $\mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$ au plan affine $\mathscr{P}$ de V d'équation $z = 1 - x - y$.

(8) On suppose que $[\lambda,\mu] = [-1,1]$. Écrire le polynôme $F(x,y) = Q(x,y,1-x-y)$.

Solution : Comme $[\lambda,\mu] = [-1,1]$ on a $Q(x,y,z) = 2xy - xz - yz$. Faisant $z = 1-x-y$, on obtient $F(x,y) = Q(x,y,1-x-y) = x^2 - x + 4xy + y^2 - y$.

(9) Calculer les dérivées partielles $\partial_x F$ et $\partial_x F$, puis déterminer l'unique point $\Omega = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathscr{P}$ (i.e. $z_0 = 1 - x_0 - y_0$) vérifiant $(\partial_x F)(x_0,y_0) = 0 = (\partial_y F)(x_0,y_0)$.

Solution : $\partial_x F(x,y) = 2x - 1 + 4y$ et $\partial_y F(x,y) = 4x + 2y - 1$. Le système $(\partial_x F)(x_0,y_0) = 0 = (\partial_y F)(x_0,y_0)$ s'écrit alors :

$$\begin{cases} 2x_0 + 4y_0 = 1 \\ 4x_0 + 2y_0 = 1. \end{cases}$$

En faisant la différence on trouve $x_0 = y_0$, et donc $x_0 = y_0 = 1/6$ puis $w = 1 - (1/3) = 2/3$, donc $\Omega = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$.

On admet que Ω est le **centre** de la conique affine $\mathscr{C} = \mathscr{P} \cap \mathscr{V}(Q)$ et l'on rappelle que la forme quadratique Q provient, depuis la question (4), de l'égalité $[q_1,q_2,q_3,q_4] = [-1,1]$.

(10) On identifie $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ via $[s,1] = s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Pouvez-vous dire, en justifiant brièvement votre réponse, quels sont les centres Ω' et Ω'' des coniques de $\mathscr{P}$ correspondants aux birapports 2 et 1/2 ?

Solution : Soit h l'unique homographie de $\mathbf{D}$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ qui envoie q_1, q_2, q_3 sur $\infty, 0, 1$ respectivement. Alors le birapport $t = [q_1,q_2,q_3,q_4]$ égale $h(q_4)$. D'autre part, (q_1,q_3,q_2,q_4) est envoyé par h sur $(\infty, 1, 0, t)$ donc en composant avec l'homographie $\tau : x \mapsto 1 - x$ (qui fixe ∞ et échange 0 et 1) on obtient $[q_1,q_3,q_2,q_4] = 1 - t$.

Alors (q_3,q_1,q_2,q_4) est envoyé par τh sur $(0, \infty, 1, 1-t)$ donc en composant avec l'homographie $\sigma : x \mapsto 1/x$ (qui fixe 1 et échange ∞ et 0) on obtient $[q_3,q_1,q_2,q_4] = 1/(1-t)$.

On en déduit que le birapport $2 = 1-(-1)$ correspond aux points (P_1, P_3, P_2, P_4) dans cet ordre, tandis que le birapport $1/2$ correspond à (P_3, P_1, P_2, P_4). On peut aussi voir cela directement sur l'équation $(\star)$ de la question 4 : pour $\mu = 1$ et $\lambda = -1$, resp. 2, resp. 1/2, elle s'écrit :

$$2xy - xz - yz = 0, \qquad \text{resp.} \quad -xy + 2xz - yz = 0, \qquad \text{resp.} \quad 0 = \frac{1}{2}(xy + xz - 2yz).$$

Comme le centre Ω correspondant à -1 est $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3})$ on en déduit que les centres Ω' et Ω'' correspondant respectivement à 2 et 1/2 sont : $\Omega' = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$ et $\Omega'' = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

Exercice 5. — (18 pts) Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$, V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, Q une forme quadratique non dégénérée sur V et ϕ sa forme polaire. Si E est un sous-espace vectoriel de V, $E^\perp$ désigne son orthogonal pour ϕ et l'on note Q_E (resp. $Q_{E^\perp}$) la restriction de Q à E (resp. $E^\perp$).

(1) Si $\dim(E) = d$, quelle est la dimension de $E^\perp$? Et que peut-on dire de $(E^\perp)^\perp$?

Solution : Comme Q est non dégénérée, on a $\dim(E^\perp) = n - \dim(E)$ et donc $\dim(E^\perp)^\perp = \dim(E)$. Par conséquent, l'inclusion $E \subset (E^\perp)^\perp$ entraîne l'égalité $E = (E^\perp)^\perp$.

(2) Montrer que le noyau $N(Q_E)$ est égal à $E \cap E^\perp$.

Solution : Soit $x \in N(Q_E)$. Alors $\phi(x, y) = 0$ pour tout $y \in E$ donc $x \in E^\perp$ et donc $x \in E^\perp \cap E$. Réciproquement, si $x \in E^\perp \cap E$ alors $x \in E$ et pour tout $y \in E$ on a $\phi(x, y) = 0$, ce qui montre que $x \in N(Q_E)$.

(3) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes : (a) Q_E est non dégénérée ; (b) $V = E \oplus E^\perp$. De plus, sous ces conditions, montrer que $Q_{E^\perp}$ est non dégénérée.

Solution : Si (b) est vérifié alors $\{0\} = E \cap E^\perp = N(Q_E)$ donc Q_E est non dégénérée. Réciproquement, si (a) est vérifié alors $E \cap E^\perp = \{0\}$ donc E et $E^\perp$ sont en somme directe ; comme de plus $\dim(E) + \dim(E^\perp) = \dim(V)$ on a alors $E \oplus E^\perp = V$.

Sous ces conditions, comme $E = (E^\perp)^\perp$, l'égalité $E \cap E^\perp = \{0\}$ montre que $Q_{E^\perp}$ est non dégénérée.

On pouvait aussi dire que si B (resp. C) désigne la matrice de Q_E (resp. $Q_{E^\perp}$) dans une base $\mathscr{B}$ de E (resp. $\mathscr{C}$ de $E^\perp$), alors $\mathscr{B} \cup \mathscr{C}$ est une base de V (puisque $V = E \oplus E^\perp$) et la matrice de Q dans cette base est $A = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ et comme A est inversible alors B et C le sont aussi, donc $Q_{E^\perp}$ est non dégénérée.

Un sous-espace vectoriel F de V est dit **anisotrope** s'il ne contient aucun vecteur isotrope non nul.

(4) Supposons V *non* anisotrope et soit u un vecteur isotrope non nul. Montrer qu'il existe un vecteur isotrope v tel que $\phi(u, v) = 1$.

Solution : Comme Q est non dégénérée, il existe un vecteur v' tel que $\phi(u, v') \neq 0$ et quitte à multiplier v' par un scalaire on peut supposer que $\phi(u, v') = 1$. Posons $\lambda = Q(v')$, alors $Q(v' - \lambda u) = \lambda - \lambda\phi(u, v') = 0$ donc $v = v' - \lambda u$ est un vecteur isotrope tel que $\phi(u, v) = 1$. Noter que v n'est pas colinéaire à u, donc ils engendrent un plan vectoriel.

(5) Soit P le plan vectoriel engendré par u et v. Montrer que Q_P est non dégénérée. On dira que P est un plan **hyperbolique** et que (u, v) en est une base hyperbolique.

Solution : La matrice de Q_P dans la base (u, v) est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de déterminant -1, donc Q_P est non dégénérée. Donc, d'après la question 3, V est la somme directe orthogonale de P et de $E = P^\perp$, et Q_E est non dégénérée.

(6) Montrer que V est somme directe orthogonale de plans hyperboliques $P_1, \ldots, P_r$ (pour un entier $r \geq 0$) et d'un sous-espace anisotrope (éventuellement nul) F. (On pourra procéder par récurrence sur $\dim(V)$.)

Solution : Si $\dim(V) = 1$ alors V est nécessairement anisotrope. Donc on peut supposer $n \geq 2$ et le résultat établi pour tout espace de dimension $< n$. Si V est anisotrope, on prend $F = V$. Sinon, d'après ce qui précède, V contient un plan hyperbolique $P = P_1$. Alors, comme $E = P^{\perp}$ est de dimension $n - 2$, il est somme directe orthogonale de plans hyperboliques $P_2, \ldots, P_r$ et d'un sous-espace anisotrope (éventuellement nul) F, et donc V s'écrit comme somme directe orthogonale :

$$V = P_1 \oplus E = P_1 \oplus \cdots \oplus P_r \oplus F.$$

(7) Soit F un sev de V de dimension 2. Montrer que F est un plan hyperbolique si et seulement si il possède une base orthogonale (e_1, e_2) telle que $Q(e_1) = 1 = -Q(e_2)$. (Pour une base hyperbolique (u, v), chercher e_1, e_2 sous la forme $u+tv$ et $u-tv$, et pour une base (e_1, e_2) chercher u, v sous la forme $e_1 + e_2$ et $t(e_1 - e_2)$, avec $t \in \mathbb{K}$.)

Solution : Supposons que (u, v) soit une base hyperbolique de F. Alors $Q(u \pm tv) = \pm 2t\phi(u, v) = \pm 2t$ et $\phi(u + tv, u - tv) = Q(u) - t^2 Q(v) = 0$. Donc en prenant $t = 1/2$ on obtient une base orthogonale (e_1, e_2) telle que $Q(e_1) = 1 = -Q(e_2)$.

Réciproquement, soit (e_1, e_2) une telle base. Alors $Q(e_1 \pm e_2) = Q(e_1) + Q(e_2) = 1 - 1 = 0$ et $\phi(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = Q(e_1) - Q(e_2) = 2$. Donc en posant $u = e_1 + e_2$ et $v = (1/2)(e_1 - e_2)$ on obtient une base hyperbolique de F.

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si F est un sev de V, on rappelle que Q_F est dite définie positive (resp. définie négative) si pour tout $x \in F - \{0\}$ on a $Q_F(x) > 0$ (resp. $Q_F(x) < 0$).

(8) Supposons que V soit somme directe orthogonale de r plans hyperboliques $P_1, \ldots, P_r$ et d'un sous-espace F de dimension f tel que ϕ_F soit définie positive. Déterminer alors, en le justifiant, la signature (p, q) de Q.

Solution : D'après la question 7, chaque plan P_i possède une base orthogonale (e_{2i-1}, e_{2i}) telle que $Q(e_{2i-1}) = 1 = -Q(e_{2i})$. D'autre part, F possède une base orthonormée $(e'_1, \ldots, e'_f)$. Alors $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_{2r}, e'_1, \ldots, e'_f)$ est une base orthogonale de V et la matrice de Q dans cette base est diagonale, avec sur la diagonale $r + f$ fois 1 et r fois -1, donc la signature de Q est $(r + f, r)$.

(9) Réciproquement, si Q est de signature (p, q), avec $p \geq q > 0$, montrer que V est la somme directe orthogonale de r plans hyperboliques et d'un sous-espace F de dimension f tel que ϕ_F soit définie positive, pour des entiers $r > 0$ et $f \geq 0$ que l'on exprimera en fonction de p et q.

Solution : Q étant de signature (p, q) il existe une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_p, e'_1, \ldots, e'_q)$ de V telle que $Q(e_i) = 1$ et $Q(e'_j) = -1$ pour $i = 1, \ldots, p$ et $j = 1, \ldots, q$.

Pour $j = 1, \ldots, q$, notons P_j le plan engendré par e_j et e'_j, alors V est la somme directe orthogonale de $P_1, \ldots, P_q$ et du sev F de dimension $p - q$ engendré par les e_i pour $q < i \leq p$. Alors Q_F est définie positive tandis que, d'après la question 7, chaque P_j est un plan hyperbolique. On a donc $r = q$ et $f = p - q$.