Semaine 1 : Espaces affines

Références pour ce chapitre :

[Du] Antoine Ducros, Géométrie affine et euclidienne, Cours de L3 à l'UPMC 2009-2012 (sections 1 et 2), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~antoine.ducros

[It] Ilia Itenberg, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2013-2014 (chap. 1), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~ilia.itenberg

[Po] Patrick Polo, Algèbre et géométrie, Cours de L2 à l'UPMC 2009-2013 (chap. 7), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/L2

En complément du polycopié 2013-2014 d'Ilia Itenberg, on pourra aussi consulter les polycopiés faits par les enseignants précédents :

[Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013, disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand

[Ne] Jan Nekovar, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2005-2009, disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~jan.nekovar

---

Par ailleurs, pour la définition axiomatique des « plans affines arguésiens », on signale les ouvrages ci-dessous. Mais attention, ceci n'est pas facile et n'entre pas dans le cadre du cours, donc ces références sont réservées aux étudiants qui seraient vraiment intéressés par cette axiomatique.

[Ar] Emil Artin, Algèbre géométrique (Gauthier-Villars, 1978), Chap. II, §§1-7.

[LF] Jaqueline Lelong-Ferrand, Les fondements de la géométrie (P.U.F., 1985), Chap. V, §§2-8.

[Sa] Pierre Samuel, Géométrie projective (P.U.F., 1986), Chap. I, §D.

1. Définition algébrique et exemples

Définition 1.1. — Soient k un corps et E un k-espace vectoriel. Un *espace affine de direction* E est un ensemble non vide $\mathscr{E}$ muni d'une application $\phi : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E$, $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$(1) \qquad \boxed{\text{Relation de Chasles : } \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}} \qquad \forall A, B, C \in \mathscr{E}.$$

$$(2) \qquad \text{Pour tout } A \in \mathscr{E}, \text{ l'application } \phi_A : \mathscr{E} \to E, \quad B \mapsto \overrightarrow{AB} \quad \text{est } \textbf{bijective}.$$

On notera $\overrightarrow{u} \mapsto A + \overrightarrow{u}$ la **bijection inverse**, c.-à-d., pour tout $A \in \mathscr{E}$ et $\overrightarrow{u} \in E$, $A + \overrightarrow{u}$ désigne l'unique $B \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

<u>Vocabulaire</u> : les éléments de $\mathscr{E}$ sont appelés « points », ceux de E sont appelés « vecteurs ». Si E est de dimension finie n, ce que nous supposerons par la suite, on pose $\dim \mathscr{E} = \dim E$. Si $\dim \mathscr{E} = 1$, resp. 2, on dira que $\mathscr{E}$ est une droite affine, resp. un plan affine.

<u>Notation</u> : pour abréger, on dira : « $(\mathscr{E}, E)$ est un espace affine ».

Remarque 1.2. — Appliquant la relation de Chasles d'abord à $A = B = C$, on obtient $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA}$ d'où $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ pour tout A ; en l'appliquant ensuite à A, B arbitraires et $C = A$, on obtient $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Remarque 1.3. — Si l'on sait que la relation de Chasles est vérifiée alors, pour montrer (2), il suffit de montrer qu'il existe $A_0 \in \mathscr{E}$ tel que ϕ_{A_0} est bijective. En effet, supposons que ce soit le cas et soit A un autre point, arbitraire mais fixé. Alors, pour B variant dans $\mathscr{E}$, on a $\phi_A(B) = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_0B} - \overrightarrow{A_0A} = \phi_{A_0}(B) - u_0$, où l'on a noté u_0 le vecteur $\overrightarrow{A_0A}$. Ceci montre que $\phi_A : \mathscr{E} \to E$ est la composée de ϕ_{A_0} et de l'application $E \to E$, $u \mapsto u - u_0$. Or cette dernière est bijective, car elle admet comme réciproque l'application $E \to E$, $v \mapsto v + u_0$. Comme on a supposé ϕ_{A_0} bijective, il en résulte que ϕ_A l'est aussi.

Exemples 1.4. — Soit E un k-espace vectoriel.

(a) D'abord, E lui-même est un espace affine $\mathscr{E}$ de direction E : on définit $\phi = \phi^{\mathscr{E}} : E\times E \to E$ par $(x,y) \mapsto y-x$. Alors (1) est vérifiée car $\phi(x,z) = z-x = (z-y)+(y-x) = \phi(x,y) + \phi(y,z)$ et (2) est vérifiée car pour tout x fixé dans E, l'application $y \mapsto y - x$ est une bijection de E sur lui-même dont la réciproque est l'application $u \mapsto u + x$.

(b) Fixons $x_0 \in E$ et un sous-espace vectoriel F de E. Alors l'ensemble

$$\mathscr{F} = x_0 + F = \{x_0 + u \mid u \in F\}$$

est un espace affine, de direction F. En effet, $\mathscr{F}$ est non vide car il contient x_0. Notons $\psi = \phi^{\mathscr{F}}$ la restriction à $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ de l'application $\phi^{\mathscr{E}}$ précédente, i.e. $\psi : \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to E$, $(x,y) \mapsto y - x$. Alors, ψ vérifie (1). De plus, elle est à valeurs dans F, car si $x,y \in \mathscr{F}$ et si l'on écrit $x = x_0 + u$ et $y = x_0 + v$ avec $u,v \in F$, alors $y - x = v - u$ appartient à F. Enfin, l'application $F \to \mathscr{F}$, $u \mapsto x_0 + u$ est bien définie et c'est l'application réciproque de l'application $\psi_{x_0} : \mathscr{F} \to F$, $x \mapsto x - x_0$: celle-ci est donc bijective. Compte tenu de la remarque 1.3, ceci prouve (2).

Afin de donner plus d'exemples, et afin de répondre à une question naturelle posée en cours : « Pour vérifier qu'un $\mathscr{E}$ donné est un espace affine, comment trouver l'application ϕ ? Nous sera-t-elle donnée ? », donnons une autre définition, équivalente, de la notion d'espace affine. Commençons par la définition suivante :

***Définition 1.5* (Action d'un groupe abélien sur un ensemble)**
Soit E un groupe abélien (i.e. commutatif).

(1) On dit que E *agit* à droite sur un ensemble X si l'on s'est donné une application $X \times E \to X$, $(x,u) \mapsto x + u$, vérifiant les deux propriétés suivantes : (a) $x + 0 = x$, (b) $(x + u) + v = x + (u + v)$, pour tout $x \in X$, $u,v \in E$.

(2) On dit que l'action est *transitive* s'il existe $x_0 \in X$ tel que $x_0 + E = \{x_0 + v \mid v \in E\}$ soit égal à E tout entier. C'est alors le cas pour n'importe quel x fixé : en effet, on a $x = x_0 + u$ pour un certain u, donc $x + E$ contient $x_0 = x - u$ donc aussi $x_0 + E$, d'où $x + E = X$.

(3) On dit que l'action est *simplement transitive* s'il existe $x_0 \in X$ tel que l'application $\theta_{x_0} : E \to X$, $v \mapsto x_0+v$ soit bijective. C'est alors le cas pour n'importe quel x fixé : en effet, il existe $u \in E$ (unique) tel que $x = x_0+u$, d'où $\theta_x(v) = (x_0+u)+v = x_0+(u+v) = \theta_{x_0}(u+v)$ pour tout $v \in E$. Donc θ_x est la composée de l'application $E \to E$, $v \mapsto u + v$ et de θ_{x_0}. La première application est bijective (sa réciproque étant $w \mapsto w - u$) et par hypothèse θ_{x_0} est bijective, donc θ_x l'est aussi.

Remarque 1.6. — Soit E un groupe abélien agissant à droite sur un ensemble X et soit F un sous-groupe de E. Alors on peut « restreindre » l'action à F, i.e. considérer l'application $X \times F \to X$, $(x,u) \mapsto x + u$: elle vérifie évidemment les propriétés voulues. De plus, si l'action de E est simplement transitive, alors pour tout $x \in X$ l'application $\theta_x^F : F \to X$, $u \mapsto x + u$ est *injective*.

Proposition 1.7. — *Soient E un k-espace vectoriel et $\mathscr{E}$ un ensemble non vide. Alors $\mathscr{E}$ est un espace affine de direction E si et seulement si $\mathscr{E}$ est muni d'une action simplement transitive de E (ce dernier étant considéré juste comme groupe abélien).*

Démonstration. — Supposons que $(\mathscr{E}, E)$ soit un espace affine au sens de la définition 1.1. Alors, pour tout $A \in \mathscr{E}$ et $u,v \in E$, $A + u$ désigne l'unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = u$ (en particulier $A + 0 = A$), et $B + v$ désigne l'unique point C tel que $\overrightarrow{BC} = v$. D'autre part, on a $C = A + \overrightarrow{AC}$ et d'après la relation de Chasles on a $\overrightarrow{AC} = u + v$. On a donc $(A + u) + v = B + v = C = A + (u + v)$ et ceci, joint à l'égalité $A + 0 = A$, montre que l'application $\mathscr{E} \times E \to \mathscr{E}$, $(A, u) \mapsto A + u$, définit une action à droite de E sur $\mathscr{E}$ et d'après l'axiome (2) de 1.1, cette action est simplement transitive.

Réciproquement, supposons donnée une telle action $(A, u) \mapsto A + u$. Alors l'axiome (2) de 1.1 est vérifié et il ne reste qu'à vérifier la relation de Chasles. Soit $A, B, C \in \mathscr{E}$ et soient u, v les éléments de E (uniques) tels que $B = A + u$ et $C = B + v$. Alors $C = (A + u) + v = A + (u + v)$ et donc $\overrightarrow{AC} = u + v = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. □

Définition 1.8. — Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E. Soit $A_0 \in \mathscr{E}$ et soit F un sous-espace vectoriel (en abrégé, sev) de E. On pose

$$\mathscr{F} = A_0 + F = \{A_0 + u \mid u \in F\}.$$

Alors $\mathscr{F}$ est un espace affine de direction F. On dira que c'est un *sous-espace affine* (en abrégé, sea) de $\mathscr{E}$. (Ceci généralise l'exemple 1.4 (b).)

Démonstration. — [1] Par hypothèse, $\mathscr{E}$ est muni d'une action à droite de E, donc a fortiori de F, d'après la remarque 1.6. Cette action laisse stable $\mathscr{F}$, donc induit une action de F sur $\mathscr{F}$, donnée par $(A, u) \mapsto A + u$. Comme l'application $\theta_{A_0} : E \to \mathscr{E}$, $v \mapsto A_0 + v$ est bijective, alors l'application $\theta_{A_0}^F : F \to \mathscr{F}$, $u \mapsto A_0 + u$ est injective, et elle est surjective d'après la définition de $\mathscr{F} = A_0 + F$. Donc $\theta_{A_0}^F$ est bijective. Ceci prouve que $\mathscr{F}$ est un espace affine de direction F. □

***Exemples 1.9* (suite)**. — (c) Considérons une matrice $A \in M_{p,n}(k)$, un vecteur fixé $Y \in k^p$ et le système linéaire d'inconnue $X \in k^n$ donné par $AX = Y$ (c'est un système linéaire de p équations à n inconnues, avec second membre Y). Si l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de ce système est *non vide*, alors $\mathscr{S}$ est un espace affine de direction le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(A)$ de k^n (= l'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$). En effet, si X_0 est une solution arbitraire, on sait que $\mathscr{S} = X_0 + \mathrm{Ker}(A)$.

(d) Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $t \mapsto Y(t)$ une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞. Considérons l'équation différentielle linéaire : $(*)$ $X'(t) - AX(t) = Y(t)$ et l'équation homogène associée $U'(t) - AU(t) = 0$. D'après la théorie des équations différentielles linéaires, l'ensemble F des solutions de l'équation homogène est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension n) de l'espace vectoriel E des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞, et l'ensemble $\mathscr{F}$ des solutions de $(*)$ est non vide et si l'on fixe (arbitrairement) un élément $X_0 \in \mathscr{F}$ alors l'application $\mathscr{F} = X_0 + F$. Donc $\mathscr{F}$ est un espace affine de direction F.

(e) Plus généralement, soient E, V des k-espaces vectoriels, $f : E \to V$ une application linéaire et v un élément de V appartenant à $\mathrm{Im}(f)$. Alors

$$\mathscr{F} = f^{-1}(v) = \{x \in E \mid f(x) = v\}$$

est un espace affine de direction $F = \mathrm{Ker}(f)$. En effet, $\mathscr{F}$ est non vide par hypothèse, puisque $v \in \mathrm{Im}(f)$. Si $x, y \in \mathscr{F}$, alors $f(x) = v = f(y)$ donc $f(y - x) = 0$ i.e. $y - x \in \mathrm{Ker}(f) = F$. Donc l'application $\phi : \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to F$, $(x, y) \mapsto y - x$ est bien définie et vérifie la relation de Chasles (c'est clair !). De plus, pour $x \in \mathscr{F}$ fixé, l'application $\phi_x : \mathscr{F} \to F$, $y \mapsto y - x$ est une bijection dont la bijection réciproque est l'application $F \to \mathscr{F}$, $u \mapsto u + x$. Noter que les exemples (c) et (d) sont des *cas particuliers* de ceci : dans (c), on prend pour f l'application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ définie par $X \mapsto AX$, et l'hypothèse que le système a des solutions équivaut à dire que $Y \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(A)$. Dans (d), on prend $E = V =$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ et f l'endomorphisme de E défini par $f(X) = X' - AX$. D'après la théorie des équations différentielles, pour tout $Y \in E$ l'ensemble des X tels que $f(X) = Y$ est non vide ; c'est donc un espace affine de direction $\mathrm{Ker}(f) =$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

(f) Autre formulation de (c), où l'on voit (enfin !) apparaître la géométrie : soient $f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur k^n et $c_1, \dots, c_p \in k$. On suppose que le sous-ensemble

$$\mathscr{F} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n \mid f_1(x) = c_1, \dots, f_p(x) = c_p\}$$

[1] On pourrait reprendre, en la généralisant, la démonstration de 1.4 (b), mais il est plus intéressant d'utiliser la nouvelle définition en termes d'actions.

est *non vide.* Alors c'est un espace affine de direction le sous-espace vectoriel de k^n suivant :

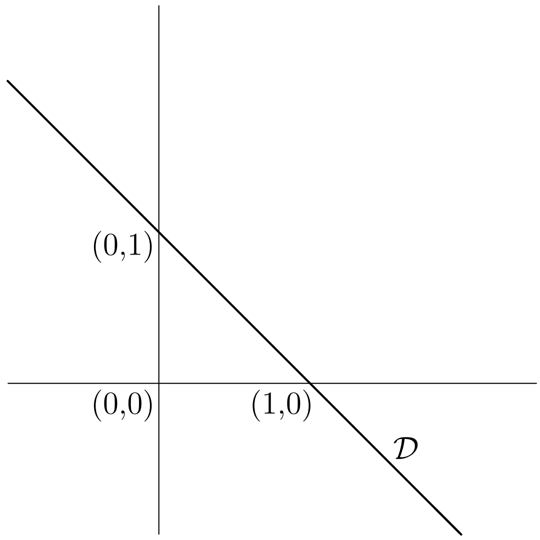
$$F = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n \mid f_1(x) = 0, \dots, f_p(x) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(f_i).$$

En effet, si pour $i = 1, \dots, p$ on écrit $f_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$ et qu'on forme la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}}$ alors $\mathscr{F}$ n'est autre que l'ensemble des solutions $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ du système $AX = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$.

(g) En particulier, prenons $k = \mathbb{R}$ et f la forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Alors

$$\mathscr{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1\}$$

est une droite affine de direction la droite vectorielle D d'équation $x_1 + x_2 = 0$; celle-ci est engendrée, par exemple, par le vecteur $u = (1, -1)$ et l'on a $\mathscr{D} = (0, 1) + \mathbb{R}u = (0, 1) + \mathbb{R}u$:



2. Approche « historique » de la droite et du plan affines réels

Dans toute cette section, le corps de base est le corps $\mathbb{R}$ des réels. Historiquement, les notions de droite affine, de plan affine et d'espace affine ont été introduites dans l'Antiquité grecque, sur des bases axiomatiques suggérées par l'observation physique du monde dans lequel nous vivons. On peut donc dire que la notion d'espace affine réel (de dimension 2 ou 3) est l'objet premier de la géométrie, à partir duquel a été distillée (après l'introduction des coordonnées par Descartes en 1637) la notion d'espace vectoriel.

Celle-ci, plus maniable, est maintenant prise comme point de départ de sorte qu'on définit maintenant un espace affine $\mathscr{E}$ comme un « espace principal homogène » sous l'action d'un espace vectoriel E (ce sont les définitions équivalentes 1.1 et 1.7). Au prime abord, cette définition peut sembler rébarbative, aussi allons-nous reprendre le processus qui conduit de la notion intuitive de droite ou de plan affine sur $\mathbb{R}$ à celle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1 ou 2.

La présentation « intuitive » donnée en cours le 9/9 n'étant pas tout-à-fait satisfaisante, on complétera cette section ultérieurement.

3. Applications affines

Définition 3.1. — Soient $(\mathscr{E}, E)$ et $(\mathscr{E}', E')$ deux espaces affines. Une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est *affine* s'il existe une application linéaire $\phi : E \to E'$ telle que, pour tout $A, B \in \mathscr{E}$ on ait :

$$(*) \qquad \boxed{\overrightarrow{f(A)f(B)} = \phi(\overrightarrow{AB})} \text{ ce qui s'écrit aussi : } \boxed{f(B) = f(A) + \phi(\overrightarrow{AB}).}$$

Remarques 3.2. — (1) Si elle existe, ϕ est entièrement déterminée par cette condition : en effet, si on fixe $A_0 \in \mathscr{E}$ alors pour tout $u \in E$, posant $A_u = A_0 + u$, on doit avoir $\phi(u) = \overrightarrow{f(A_0)f(A_u)}$.

(2) Pour montrer qu'une application f est affine, il suffit de vérifier la condition $(*)$ pour un A_0 fixé (et B arbitraire). En effet, supposons que pour un certain A_0 fixé, l'application $\phi : E \to E'$ définie par $\phi(\overrightarrow{A_0B}) = \overrightarrow{f(A_0)f(B)}$ soit linéaire. Alors, pour tout A, B on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f(A)f(B)} &= \overrightarrow{f(A_0)f(B)} - \overrightarrow{f(A_0)f(A)} \quad \text{(d'après la relation de Chasles dans } \mathscr{E}')\\
&= \phi(\overrightarrow{A_0B}) - \phi(\overrightarrow{AB}) \qquad \text{(par définition de } \phi)\\
&= \phi(\overrightarrow{A_0B} - \overrightarrow{AB}) \quad \text{(d'après l'hypothèse que } \phi \text{ est linéaire)}\\
&= \phi(\overrightarrow{AB}) \qquad \text{(d'après la relation de Chasles dans } \mathscr{E}).
\end{aligned}$$

Proposition 3.3. — *Soient $(\mathscr{E}, E)$, $(\mathscr{E}', E')$, $(\mathscr{E}'', E'')$ trois espaces affines, $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ et $g : \mathscr{E}' \to \mathscr{E}''$ des applications affines. Alors l'application $g \circ f$ est affine, de partie linéaire $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.*

Démonstration. — Soient $A, B \in \mathscr{E}$, posons $A' = f(A)$ et $A'' = g(A') = (g \circ f)(A)$ et définissons de même B' et B''. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A''B''} &= \overrightarrow{g}(\overrightarrow{A'B'}) \qquad \text{(car } g \text{ est affine)}\\
&= \overrightarrow{g}\big(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})\big) \qquad \text{(car } f \text{ est affine)}\\
&= (\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f})(\overrightarrow{AB}).
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $g \circ f$ est affine, de partie linéaire égale à $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$. $\square$

Donnons ci-dessous des exemples d'applications affines $\mathscr{E} \to \mathscr{E}$.

***Définition 3.4* (Translations)**. — Pour tout $u \in E$, on note t_u la « translation de vecteur u », définie par $t_u(A) = A + u$ pour tout $A \in \mathscr{E}$. Posant $A' = t_u(A)$ et $B' = t_u(B)$, on a $\overrightarrow{AA'} = u = \overrightarrow{BB'}$ et donc :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = -u + \overrightarrow{AB} + u = \overrightarrow{AB}.$$

Ceci prouve que t_u est affine, de partie vectorielle id_E, l'application identique de E. Par ailleurs, on notera que la translation de vecteur nul t_0 est $\mathrm{id}_{\mathscr{E}}$, l'application identique de $\mathscr{E}$.

Exercice 3.5. — Réciproquement, montrer que si $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est affine et vérifie $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$ alors $f = t_u$ pour un certain $u \in E$.

Proposition 3.6. — *Pour tout $u, v \in \mathscr{E}$, on a $\boxed{t_v \circ t_u = t_{u+v} = t_u \circ t_v}$. Par conséquent, l'ensemble T des translations forme un groupe commutatif (isomorphe à E) : l'élément neutre est $t_0 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ et l'inverse de t_u est t_{-u}.*

Démonstration. — Soit $A \in \mathscr{E}$, posons $B = t_u(A)$ et $C = t_v(B) = (t_v \circ t_u)(A)$. Alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = u + v$ d'où l'égalité $t_{u+v}(A) = C = (t_v \circ t_u)(A)$. Ceci prouve que $t_v \circ t_u = t_{u+v}$, et comme $u + v = v + u$, ceci égale aussi $t_u \circ t_v$. Il est clair que $t_0 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ est élément neutre, et l'égalité $t_u \circ t_{-u} = t_0$ montre que t_{-u} est l'inverse de t_u (ce qui est aussi évident géométriquement).

L'application $E \to T$, $u \mapsto t_u$ est donc un morphisme de groupes, surjectif par définition. Il est injectif car si $t_u = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ alors $u = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. Donc c'est un isomorphisme de E, considéré comme groupe abélien, sur le groupe des translations. □

***Définition 3.7* (Homothéties).** — Soit $\lambda \in k^\times = k - \{0\}$. Pour A fixé dans $\mathscr{E}$, on note $h = h(A, \lambda)$ l'application qui à tout M de $\mathscr{E}$ associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$. Remarquons que :

a) Pour $M = A$, on a $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{0}$ d'où $h(A) = A$, donc A est un *point fixe* de h.

b) Pour tout M, on a donc : $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$. Ceci montre que h est affine, de partie linéaire l'homothétie vectorielle $h_\lambda = \lambda\,\mathrm{id}_E$ (définie par $h_\lambda(u) = \lambda u$ pour tout $u \in E$).

c) Si $\lambda = 1$ alors h est l'application identique $\mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ de $\mathscr{E}$.

d) Si $\lambda \neq 1$ alors A est l'unique point fixe de h. En effet si $M = h(M)$ alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{Ah(M)} = \lambda\overrightarrow{AM}$ d'où $(1-\lambda)\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$ et si $\lambda \neq 1$ ceci entraîne $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$ d'où $M = A$. Donc, si $\lambda \neq 1$, on dira que $h(A, \lambda)$ est « *l'homothétie de rapport* λ *et de centre* A ».

e) On voit facilement que $h(A, \lambda) \circ h(A, \mu) = h(A, \lambda\mu)$ donc les homothéties de centre A forment un groupe isomorphe au groupe multiplicatif $k^\times$.

Proposition 3.8. — *Soit $h : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine telle que $\overrightarrow{h} = \lambda\,\mathrm{id}_E$ avec $\lambda \neq 1$. Alors h possède un unique point fixe A, et si $\lambda \neq 0$ alors $h = h(A, \lambda)$.*

Démonstration. — Fixons un point $O \in \mathscr{E}$. Alors, un point $A \in \mathscr{E}$ arbitraire vérifie $h(A) = A$ si et seulement si l'on a $\overrightarrow{Oh(A)} = \overrightarrow{OA}$. Or on a

$$\overrightarrow{Oh(A)} = \overrightarrow{Oh(O)} + \overrightarrow{h(O)h(A)} = \overrightarrow{Oh(O)} + \overrightarrow{h}(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{Oh(O)} + \lambda\overrightarrow{OA}$$

donc on voit que $h(A) = A$ équivaut à $(1-\lambda)\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{Oh(O)}$ et comme $\lambda \neq 1$ ceci détermine A de façon unique, i.e. on a $\overrightarrow{OA} = (1-\lambda)^{-1}\,\overrightarrow{Oh(O)}$.

Alors, pour tout $M \in \mathscr{E}$, on a $\overrightarrow{Ah(M)} = \overrightarrow{h(A)h(M)} = \lambda\overrightarrow{AM}$ donc, si $\lambda \neq 0$ alors h est bien l'homothétie $h(A, \lambda)$ de centre A et de rapport λ. (Si $\lambda = 0$ alors $\overrightarrow{Ah(M)} = \overrightarrow{0}$ donc $h(M) = A$ pour tout M i.e. h est l'application « constante » qui envoie tout M sur A). □

Exercice 3.9. — Soient $A, B \in \mathscr{E}$ et $\lambda, \mu \in k^\times$. Montrer que :

$$h(A,\lambda) \circ h(B,\mu) = \begin{cases} \text{une translation (à déterminer), si } \lambda\mu = 1, \\ h(C, \lambda\mu) \text{pour un point } C \text{ à déterminer, si } \lambda\mu \neq 1. \end{cases}$$

En utilisant le résultat de l'exercice précédent, on peut démontrer le

Théorème 3.10. — (a) *L'ensemble G des translations et des homothéties forme un groupe (non commutatif), appelé le groupes des homothéties et translations.*

(b) *Pour tout $A \in \mathscr{E}$, $\lambda \in k^\times$ et $u \in E$ on a :* $\boxed{h(A,\lambda) \circ t_u \circ h(A,\lambda)^{-1} = t_{\lambda u}.}$ *Par conséquent, le groupe T des translations est un sous-groupe* distingué *de G.*[2]

---

[2]Un sous-groupe H d'un groupe G est *distingué* si pour tout $h \in H$ et tout $g \in G$, on a $ghg^{-1} \in H$. Ceci s'écrit aussi : pour tout $g \in G$, on a $gHg^{-1} \subset H$. (Appliquant ceci à g^{-1} on a aussi $g^{-1}Hg \subset H$ d'où $H = g(g^{-1}Hg)g^{-1} \subset gHg^{-1}$, donc la condition s'écrit aussi : pour tout $g \in G$, on a $gHg^{-1} = H$.)

Avant d'introduire les projections et symétries, démontrons la proposition suivante.

Proposition 3.11. — *Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, $P, Q \in \mathscr{E}$, F, G deux sev de E. On considère les deux sous-espaces affines $\mathscr{F} = P + F$ et $\mathscr{G} = Q + G$.*

a) *Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est non vide, c'est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.*
b) *Ceci est le cas ssi $\overrightarrow{PQ}$ appartient au sev $F + G$.*
c) *Par conséquent, si $F \oplus G = E$ alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un singleton $\{I\}$.*

Démonstration. — (a) Supposons que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ contienne un point R. Pour un point $M \in \mathscr{E}$ arbitraire, on a les équivalences : $M \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G} \Leftrightarrow (M \in \mathscr{F}$ et $M \in \mathscr{G}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{RM} \in F$ et $\overrightarrow{RM} \in G) \Leftrightarrow \overrightarrow{RM} \in F \cap G \Leftrightarrow M \in R + (F \cap G)$. Ceci montre que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = R + (F \cap G)$.

(b) $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est non vide ssi il existe $u \in F$ et $v \in G$ tels que $P + u = R = Q + v$, ce qui équivaut à $Q = P + u - v$ ou encore à $\overrightarrow{PQ} = u - v$. Ceci équivaut à dire que $\overrightarrow{PQ}$ appartient au sous-espace vectoriel $F + G = \{u + w \mid u \in F,\, w \in G\} = \{u - v \mid u \in F,\, v \in G\}$.

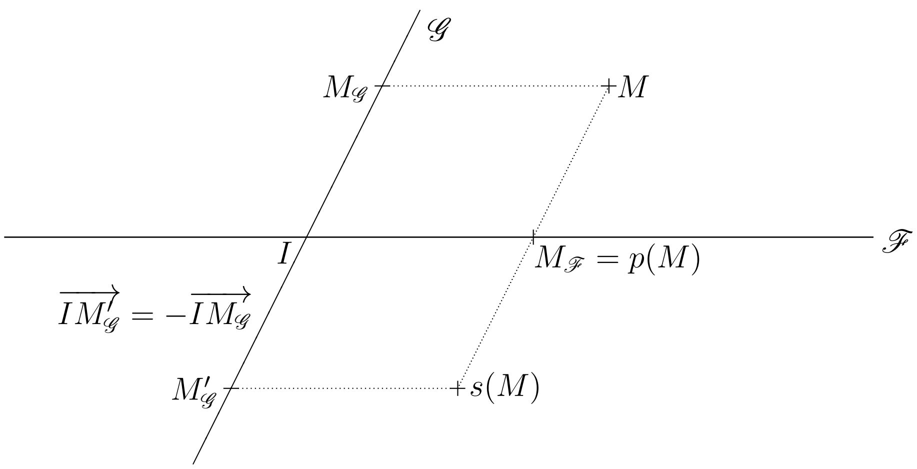
(c) Supposons que $F + G = E$. Alors $\overrightarrow{PQ}$ appartient à $F + G$ donc, d'après (b) et (a), $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un sous-espace affine $R + (F \cap G)$ de direction $(F \cap G)$. Si de plus F et G sont en somme directe, c.-à-d. si $F \cap G = \{0\}$ alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est le singleton $\{R\}$. (Noter ceci : pour tout point $I \in \mathscr{E}$, le sous-espace affine de direction $\{0\}$ passant par I est le singleton $\{I\}$.) $\square$

***Définitions 3.12* (Projections et symétries).** — Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G. On suppose que $F \oplus G = E$, de sorte que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un singleton $\{I\}$. Pour tout $M \in \mathscr{E}$, le vecteur $\overrightarrow{IM} \in E$ s'écrit donc de façon unique $\overrightarrow{IM} = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in G$, donc il existe d'uniques points $M_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}$ et $M_{\mathscr{G}} \in \mathscr{G}$ tels que : $\boxed{\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IM_{\mathscr{F}}} + \overrightarrow{IM_{\mathscr{G}}}.}$

(1) L'application $p : M \mapsto M_{\mathscr{F}}$ s'appelle la « *projection sur $\mathscr{F}$ parallèlement à $\mathscr{G}$* » (voir la figure plus bas). C'est une application affine, de partie linéaire la projection π de E sur F parallèlement à G.

(2) Notons $s(M)$ l'unique point de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{Is(M)} = \overrightarrow{IM_{\mathscr{F}}} - \overrightarrow{IM_{\mathscr{G}}}$, ce qui équivaut à $\overrightarrow{Ms(M)} = -2\overrightarrow{IM_{\mathscr{G}}}$. Alors l'application $s : M \mapsto s(M)$ s'appelle la « *symétrie par rapport à $\mathscr{F}$ parallèlement à $\mathscr{G}$* » (voir la figure plus bas). C'est une application affine, de partie linéaire la symétrie σ par rapport à F parallèlement à G.

En effet, on a $p(I) = I$ et l'égalité $\overrightarrow{p(I)p(M)} = \overrightarrow{Ip(M)} = \overrightarrow{IM_{\mathscr{F}}} = \pi(\overrightarrow{IM})$ montre que p est linéaire, de partie vectorielle π. De même, $s(I) = I$ et l'égalité $\overrightarrow{s(I)s(M)} = \overrightarrow{Is(M)} = \overrightarrow{IM_{\mathscr{F}}} - \overrightarrow{IM_{\mathscr{G}}} = \sigma(\overrightarrow{IM})$ montre que s est linéaire, de partie vectorielle σ.



Projection sur $\mathscr{F}$ et symétrie par rapport à $\mathscr{F}$, parallèlement à $\mathscr{G}$.