

Semaines 11-12 : Géométrie affine euclidienne II. Convexité et polyèdres réguliers

Références pour ce chapitre :

[Be] Marcel Berger, Géométrie, tome 2 (Nathan, 1990), §§12.5 & 12.6.

[Che] Jean-Yves Chemin, Topologie et calcul différentiel, Cours de L3 à l'UPMC 2012-2013 (LM360), disponible sur le site de la Licence de Mathématiques : www.licence.math.upmc.fr/UE/LM360 et sur la page de l'auteur : www.ljll.math.upmc.fr/~chemin

[Po] Patrick Polo, Algèbre et géométrie, Cours de L2 à l'UPMC 2009-2013 (Chap. 6 et 7), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/L2

[RWM] J.-P. Ramis, A. Warusfel, F. Moulin, Cours de mathématiques pures et appliquées, Vol. 1 Algèbre et géométrie (De Boeck, 2010), Partie II, Chap. 2.

Le §18.2, ainsi que le th. 18.12, n'ont pas été traités en cours. Dans ce chapitre, ne sont au programme de l'examen que les §§18.1 (sauf 18.11-12), 18.3 et le §19.1 sur les polygones réguliers.

18. Parties convexes de \mathbb{R}^n

Dans toute cette section, (\mathcal{E}, E) désigne un espace affine réel de dimension d muni d'une *structure euclidienne*, i.e. E est muni d'un produit scalaire (de sorte qu'on a la notion de distance entre deux points de \mathcal{E}).⁽¹⁾

18.1. Généralités. —

Terminologie. — Soient $A, B \in \mathcal{E}$. Le **segment** $[A, B] = [B, A]$ est l'ensemble des points $(1-t)A + tB = A + t\overrightarrow{AB} = B + (1-t)\overrightarrow{BA}$, avec $t \in [0, 1]$.

Définition 18.1. — Une partie \mathcal{C} de \mathcal{E} est dite **convexe** si elle contient le segment qui joint deux quelconques de ses points, c.-à-d. si pour tout $A, B \in \mathcal{C}$ on a $[A, B] \subset \mathcal{C}$.⁽²⁾ Au lieu de dire « une partie convexe » on dira aussi « un convexe ».

Exemples 18.2. — (a) Dans un plan euclidien \mathcal{P} , les points intérieurs (bord inclus) à un triangle, un carré ou une ellipse forment une partie convexe, de même que les points d'un disque.

(b) Dans un espace euclidien \mathcal{E} de dimension 3, les points intérieurs (bord inclus) à un tétraèdre ou un cube forment une partie convexe, de même que les points d'une *boule* (ouverte ou fermée) de centre A et de rayon r (voir plus bas).

Proposition 18.3. — *Tout convexe C de \mathcal{E} est stable par combinaisons barycentriques à coefficients ≥ 0 , c.-à-d. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in C$ et $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, le point $p = t_1x_1 + \dots + t_nx_n$ appartient à C .*

Démonstration. — Si $n = 1$ c'est évident et si $n = 2$ ceci est la définition de la convexité. Supposons donc $n > 2$ et le résultat établi pour $n - 1$. Avec les notations de l'énoncé, montrons que $p = t_1x_1 + \dots + t_nx_n$ appartient à C . Si $t_n = 1$ alors $p = x_n$ et c'est ok, donc on peut supposer $t_n < 1$. Alors $t = t_1 + \dots + t_{n-1} = 1 - t_n$ est > 0 de sorte qu'on peut poser

⁽¹⁾La structure euclidienne n'est pas nécessaire pour définir et étudier la notion de convexité, mais cela facilite l'exposition (et certaines démonstrations).

⁽²⁾On voit donc que la notion de convexité est valable dans tout espace affine réel et ne nécessite pas l'existence d'une structure euclidienne.

$\lambda_i = t_i/t$ pour $i = 1, \dots, n-1$. Les λ_i sont ≥ 0 et de somme égale à 1 donc, par hypothèse de récurrence, le point

$$q = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i$$

appartient à C . De plus, on a $p = tq + (1-t)x_n$ donc $p \in C$. \square

Remarque 18.4. — Si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille de parties convexes de \mathcal{E} , leur intersection C est convexe. En effet, si $x, y \in C$ alors le segment $[x, y]$ est contenu dans C_i pour tout $i \in I$, donc dans C .

Définition 18.5. — Soit X une partie non vide de \mathcal{E} . Son **enveloppe convexe** $\text{Conv}(X)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients ≥ 0 de points de X , i.e. un point p de \mathcal{E} appartient à $\text{Conv}(X)$ ssi il existe un entier $n \geq 1$, des points x_1, \dots, x_n de X et des réels $t_i \in [0, 1]$ de somme 1 tels que $p = t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$. C'est la plus petite partie convexe contenant X .

Notation. Il est commode, même si X est un ensemble infini, de représenter un élément de $\text{Conv}(X)$ par une somme $\sum_{x \in X} t_x x$, avec la convention que les t_x sont ≥ 0 , de somme égale à 1 (donc tous dans $[0, 1]$) et nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Démonstration. — D'après la proposition 18.3, toute partie convexe contenant X contient aussi $\text{Conv}(X)$, donc il suffit de vérifier que $\text{Conv}(X)$ est convexe. Or, si $p = \sum_{x \in X} s_x x$ et $q = \sum_{x \in X} t_x x$ en sont deux éléments et si $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$\lambda p + (1-\lambda)q = \sum_{x \in X} (\lambda s_x + (1-\lambda)t_x) x,$$

et les coefficients $\lambda s_x + (1-\lambda)t_x$ sont bien dans $[0, 1]$ (car le segment $[0, 1]$ est convexe!) et nuls sauf si $s_x \neq 0$ ou $t_x \neq 0$, ce qui n'est le cas que pour un nombre fini de x . \square

Pour pouvoir parler de parties « ouvertes » ou « fermées », faisons quelques rappels de topologie.

Rappels 18.6. — (1) Pour tout $A \in \mathcal{E}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, la *boule ouverte* (resp. *fermée*) de centre A et de rayon r est :

$$B(A, r) = \{M \in \mathcal{E} \mid AM < r\} \quad \text{resp.} \quad \overline{B}(A, r) = \{M \in \mathcal{E} \mid AM \leq r\}.$$

(2) On dit qu'une partie U de \mathcal{E} est **ouverte** si pour tout $a \in U$ il existe une boule ouverte (de rayon suffisamment petit) centrée en a et contenue dans U , i.e. s'il existe $r = r_a > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Alors :

- a) \mathcal{E} et \emptyset sont des parties ouvertes (\emptyset ne contient aucun point a donc la condition est vérifiée).
- b) Toute réunion (finie ou infinie) de parties ouvertes est ouverte.
- c) Toute intersection finie de parties ouvertes U_1, \dots, U_N est ouverte : en effet, si a appartient à l'intersection U des U_i alors pour $i = 1, \dots, N$ il existe un réel $r_i > 0$ tel que $B(a, r_i) \subset U_i$; alors posant $r = \min(r_1, \dots, r_N)$ on a $B(a, r) \subset U$.

(3) On dit qu'une partie F de \mathcal{E} est **fermée** si son complémentaire est ouvert. Il résulte de (b) que toute intersection de parties fermées est fermée.

(4) On dit qu'une suite $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de points de \mathcal{E} converge vers une limite $q \in \mathcal{E}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq i_0$ on ait $qp_i < \varepsilon$, i.e. $p_i \in B(q, \varepsilon)$.

(5) On montre sans difficulté le résultat suivant :

Une partie F de \mathcal{E} est fermée ssi la propriété suivante est vérifiée : pour toute suite $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de points de \mathcal{E} qui converge vers une limite $q \in \mathcal{E}$, on a $q \in F$.

(6) Soit A une partie arbitraire de \mathcal{E} . Il existe un plus petit fermé contenant A (c'est l'intersection des fermés contenant A); il est noté \overline{A} et appelé **l'adhérence** de A . On dit que ses éléments sont *adhérents* à A . C'est l'ensemble des points de \mathcal{E} qui sont limite d'une suite d'éléments de A .

D'autre part, un point $x \in A$ est dit *intérieur* à A s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que A contienne la boule $B(x, r)$; on note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble de ces points et on l'appelle **l'intérieur** de A . Enfin, l'ensemble $\overline{A} - \overset{\circ}{A}$ est appelé la **frontière** (ou le **bord**) de A ; on le notera $\text{Fr}(A)$ ou ∂A . C'est l'ensemble des points qui sont à la fois adhérents à A et à son complémentaire $\mathcal{E} - A$. (En effet, si $x \in \partial A$ alors pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ la boule $B(x, 1/r)$ contient un élément x_r de $\mathcal{E} - A$ (car $x \notin \overset{\circ}{A}$) et ceci fournit une suite $(x_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{E} - A$ convergeant vers x .)

Exemples 18.7. — (a) L'intérieur d'une boule fermée $\overline{B}(x, r)$ est la boule ouverte $B(x, r)$; sa frontière est la sphère $\Sigma(x, r)$.

(b) Si C est le « carré fermé »⁽³⁾ $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ son intérieur est le carré ouvert, défini par les inégalités strictes $-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$, et sa frontière est formée des quatre côtés du carré.

Terminologie 18.8 (Demi-espaces). — Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de \mathcal{E} . Il définit deux demi-espaces ouverts (ou fermés) dont il est la frontière commune. Par exemple, dans le plan \mathbb{R}^2 la droite \mathcal{D} d'équation $y = 0$ définit les deux demi-plans ouverts (resp. fermés) :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} & \text{et} & & \mathcal{D}^- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\} \\ \text{resp. } \overline{\mathcal{D}}^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} & \text{et} & & \overline{\mathcal{D}}^- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}. \end{aligned}$$

Il en est de même en général. Notons H la direction de \mathcal{H} , choisissons une origine $O \in \mathcal{E}$ et une forme linéaire f telle que $\text{Ker}(f) = H$ et soit M_0 un point arbitraire de \mathcal{H} . Posons $c = f(\overrightarrow{OM_0})$. Alors $\mathcal{H} = M_0 + H$ est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $f(\overrightarrow{OM}) = c$ et l'on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^+ &= \{M \in \mathcal{E} \mid f(\overrightarrow{OM}) > c\} & \text{et} & & \mathcal{H}^- &= \{M \in \mathcal{E} \mid f(\overrightarrow{OM}) < c\} \\ \text{resp. } \overline{\mathcal{H}}^+ &= \{M \in \mathcal{E} \mid f(\overrightarrow{OM}) \geq c\} & \text{et} & & \overline{\mathcal{H}}^- &= \{M \in \mathcal{E} \mid f(\overrightarrow{OM}) \leq c\}. \end{aligned}$$

(Ces demi-espaces ne dépendent pas du choix de l'origine O , car si I est une autre origine alors \mathcal{H} (resp. \mathcal{H}^+) est l'ensemble des points M tels que $f(\overrightarrow{IM})$ soit égal (resp. strictement supérieur) à $c - f(\overrightarrow{OI})$. Et si l'on remplace f par un multiple λf , alors les demi-espaces « positif » et « négatif » sont inchangés si $\lambda > 0$, et ils sont intervertis si $\lambda < 0$.) Comme on s'est placé dans un cadre euclidien, on peut aussi considérer un vecteur unitaire u orthogonal à H (il y a deux tels vecteurs : u et $-u$), alors \mathcal{H} est donné par l'équation $u \cdot \overrightarrow{OM} = c$, où $c = u \cdot \overrightarrow{OM_0}$, et l'on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^+ &= \{M \in \mathcal{E} \mid u \cdot \overrightarrow{OM} > c\} & \text{et} & & \mathcal{H}^- &= \{M \in \mathcal{E} \mid u \cdot \overrightarrow{OM} < c\} \\ \text{resp. } \overline{\mathcal{H}}^+ &= \{M \in \mathcal{E} \mid u \cdot \overrightarrow{OM} \geq c\} & \text{et} & & \overline{\mathcal{H}}^- &= \{M \in \mathcal{E} \mid u \cdot \overrightarrow{OM} \leq c\}. \end{aligned}$$

Les demi-espaces fermés jouent un rôle important dans l'étude des parties convexes (voir plus bas).

Pour la suite, on aura besoin d'autres rappels de topologie.

Rappels 18.9. — (1) Une partie X de \mathcal{E} est dite **bornée** si la distance entre deux quelconques de ses points est bornée par une constante $c \in \mathbb{R}_+$, i.e. s'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $AB \leq c$ pour tous $A, B \in X$. Fixant un point $A_0 \in X$, ceci entraîne que $X \subset B(A_0, c)$ et réciproquement si l'on a cette inclusion, alors pour tout $A, B \in X$ on a $AB \leq 2c$.

⁽³⁾Ici et dans la suite, on dira « carré » (resp. « rectangle, triangle », etc.) pour désigner l'ensemble des points qui sont sur le bord du carré (resp. rectangle, triangle, etc.) et à l'intérieur.

(1') Remarquons que toute suite $(P_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de points de \mathcal{E} convergeant vers une limite A est bornée. En effet, il existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P_r \in B(A, 1)$ pour tout $r \geq r_0$; notant alors R le sup de 1 et des distances AP_i pour $i < r_0$, on a $P_r \in B(A, R)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

(2) Une partie X de \mathcal{E} est dite **compacte** si de toute suite $(P_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de points de X on peut extraire une sous-suite $(P_{\varphi(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point A de X .

Proposition 18.10. — *Une partie X de \mathcal{E} est compacte ssi elle est fermée et bornée.*

Démonstration. — (i) Supposons X compacte. Soit $(P_r)_{r \in \mathbb{N}}$ une suite de points de X convergeant vers une limite $A \in \mathcal{E}$. Alors toute sous-suite converge vers A , donc l'hypothèse de compacité entraîne que $A \in X$. Ceci montre que X est fermé. Montrons que X est borné. Soit $A_0 \in X$, il suffit de montrer qu'il existe un réel $R > 0$ tel que $X \subset B(A_0, R)$. Or si ceci était faux alors pour tout entier $r \geq 0$ il existerait un point P_r de X n'appartenant pas à la boule $B(A_0, r)$ et l'on obtiendrait ainsi une suite $(P_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de points de X pour laquelle toute sous-suite est non bornée donc non convergente (cf. (1') plus haut), contredisant la compacité.

(ii) Supposons X fermé et borné (et non vide). Soit (O, \mathcal{B}) un repère orthonormé de \mathcal{E} tel que $O \in X$. Il existe un réel $R > 0$ tel que X soit contenu dans la boule fermée :

$$B(O, R) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq R\}$$

qui elle-même est contenue dans l'hypercube fermé : $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid -R \leq x_i \leq R\}$.

Soit alors $(P_r)_{r \in \mathbb{N}}$ une suite de points de X ; écrivons $P_r = (x_1^r, \dots, x_n^r)$. Alors la suite réelle $(x_1^r)_{r \in \mathbb{N}}$ est bornée (elle est à valeurs dans $[-R, R]$) donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(r)}^1)_{r \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un réel a_1 . Puis, la suite $(x_{\varphi(r)}^2)_{r \in \mathbb{N}}$ étant bornée, on peut de même en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(\psi(r))}^2)_{r \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un réel a_2 . En extrayant ainsi n fois une sous-suite, on obtient une sous-suite $(P_{\theta(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ de la suite initiale, qui converge vers un point $A = (a_1, \dots, a_n)$ de \mathcal{E} . De plus, comme X est fermé on a $A \in X$. Ceci montre que X est compact. \square

Lemme 18.11. — *Soit $A \in \mathcal{E}$. L'application $d_A : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $P \mapsto d(A, P) = AP$ est continue; elle est même 1-lipschitzienne⁽⁴⁾ i.e. pour tout $P, Q \in \mathcal{E}$ on a :*

$$(*) \quad |AP - AQ| \leq PQ.$$

Démonstration. — D'après l'inégalité triangulaire, on a $AP \leq AQ + QP$ d'où $AP - AQ \leq QP$ et de même $AQ - AP \leq PQ$, d'où (*). Par conséquent, pour tout $P \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $r = r_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $d_A(B(P, r)) \subset]AP - \varepsilon, AP + \varepsilon[$ (ceci est la définition de la continuité) : en effet, la condition $d_A(B(P, r)) \subset]AP - \varepsilon, AP + \varepsilon[$ équivaut à dire que pour tout $Q \in \mathcal{E}$ tel que $PQ < r$, on doit avoir $|AQ - AP| < \varepsilon$ et compte tenu de (*) on voit que ceci est vérifié si l'on prend $r = \varepsilon$. \square

Théorème 18.12. — *Soit $A \in \mathcal{E}$ et soit X une partie fermée non vide de \mathcal{E} .*

(i) *La fonction $X \rightarrow \mathbb{R}_+$, $M \mapsto AM$ atteint son minimum en un point P de X .*

(ii) *Si de plus X est convexe alors P est unique et l'on a $(\overrightarrow{PA} \mid \overrightarrow{PM}) \leq 0$ pour tout $M \in X$. Le point P est appelé la projection de A sur le convexe fermé X .*

Démonstration. — (i) L'ensemble des distances AM , pour $M \in X$, est une partie non vide de \mathbb{R} minorée par 0 donc admet une borne inférieure r . Par définition de la borne inférieure, il existe une suite $(M_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de points de X (éventuellement constante) telle que $r \leq AM_i < r + (1/i)$ pour tout i . Cette suite est contenue dans l'ensemble $X \cap \overline{B}(A, AM_1)$ qui est fermé et borné, donc **compact**. On peut donc extraire une sous-suite $(M_{\varphi(i)})_{i \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers un point P de X . Comme la fonction $d_A : M \mapsto AM$ est continue (et même 1-lipschitzienne) alors AP est la limite de la suite réelle $AM_{\varphi(i)}$, qui est r . Ceci prouve (i).

⁽⁴⁾Rudolf Lipschitz, mathématicien allemand (1832-1903), qui a introduit la « condition de Lipschitz » pour démontrer un fameux théorème sur les équations différentielles [obtenu dans certains cas particuliers par Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)], le « théorème de Cauchy-Lipschitz ».

(ii) Supposons de plus X convexe. Soit P comme ci-dessus et soit $M \in X$ arbitraire. Pour tout $t \in [0, 1]$, le point $M_t = P + t\overrightarrow{PM}$ appartient à X et l'on a donc $AM_t \geq AP$ d'où :

$$0 \leq AM_t^2 - AP^2 = t^2 PM^2 + t(\overrightarrow{PM} | \overrightarrow{AP})$$

et donc, pour tout $t \in]0, 1]$, $(\overrightarrow{PM} | \overrightarrow{AP}) \geq -tPM^2$. Comme la limite du membre de droite lorsque t tend vers 0 est 0, on en déduit que $(\overrightarrow{PM} | \overrightarrow{AP}) \geq 0$, d'où $(\overrightarrow{PA} | \overrightarrow{PM}) \leq 0$. Ceci entraîne l'unicité de P car si Q est un second point de X tel que AQ soit minimum, on a :

$$0 \geq (\overrightarrow{PA} | \overrightarrow{PQ}) \quad \text{et} \quad 0 \geq (\overrightarrow{QA} | \overrightarrow{QP}) = (\overrightarrow{AQ} | \overrightarrow{PQ})$$

et donc $PQ^2 = (\overrightarrow{PA} | \overrightarrow{PQ}) + (\overrightarrow{AQ} | \overrightarrow{PQ}) \leq 0$ d'où $Q = P$. \square

Terminons cette section avec le résultat suivant :

Définition et proposition 18.13. — Soient $A \neq B$ deux points de \mathcal{E} . L'ensemble des points M tels que $AM = BM$ est l'hyperplan orthogonal à \overrightarrow{AB} passant par le milieu I du segment $[A, B]$. Il est appelé **hyperplan médiateur** de A et B .

Démonstration. — Comme $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ on a :

$$MB^2 - MA^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} | \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = 2(\overrightarrow{MI} | \overrightarrow{AB})$$

donc l'égalité $MB = MA$ équivaut à ce que \overrightarrow{IM} soit orthogonal à \overrightarrow{AB} . \square

18.2. Théorèmes de Hahn-Banach et de Minkowski. —

Définition 18.14. — Soit C un convexe fermé non vide de \mathcal{E} . On dit qu'un hyperplan \mathcal{H} est un **hyperplan d'appui** de C si $C \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ et si C est contenu dans l'un des deux demi-espaces fermés définis par \mathcal{H} .

Exemples 18.15. — (a) Pour le rectangle $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$, les droites d'appui sont les quatre droites d'équations $x = \pm a$, $y = \pm b$ et aussi toutes les droites qui passent par un sommet du rectangle et ne le rencontrent qu'en ce point. (Par exemple, pour le sommet (a, b) ce sont les droites D_λ d'équation $y - b = \lambda(x - a)$, pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}^*$.)

(b) Pour une boule fermée $\overline{B}(x, r)$, les hyperplans d'appui sont les hyperplans tangents à la sphère $\Sigma(x, r)$.

Théorème 18.16. — Tout convexe fermé C est l'intersection des demi-espaces fermés le contenant et définis par un hyperplan d'appui. (C'est-à-dire, notant $\mathcal{A}(C)$ l'ensemble des hyperplans d'appui de C et, pour tout $\mathcal{H} \in \mathcal{A}(C)$, notant $\overline{\mathcal{H}^+}$ le demi-espace fermé contenant C , on a : $\bigcap_{\mathcal{H} \in \mathcal{A}(C)} \overline{\mathcal{H}^+} = C$.)

Démonstration. — Notons C' l'intersection. Il est clair que $C \subset C'$. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{E}$ hors de C . D'après le théorème 18.12, si l'on note P le projeté de A sur C et \mathcal{H} l'hyperplan orthogonal à \overrightarrow{AP} passant par P , alors C est contenu dans le demi-espace fermé

$$\overline{\mathcal{H}^+} = \{M \in \mathcal{E} \mid (\overrightarrow{PM} | \overrightarrow{PA}) \leq 0\},$$

donc \mathcal{H} est un hyperplan d'appui. Comme $A \notin \overline{\mathcal{H}^+}$, on a donc $A \notin C'$. Ceci montre que $C' \subset C$, d'où l'égalité $C = C'$. \square

Nous admettrons le théorème suivant (pour une démonstration, voir [Be, 11.4.1]).

Théorème 18.17 (de Hahn-Banach géométrique). — ⁽⁵⁾ Soit C un convexe fermé de \mathcal{E} . Par tout point p de la frontière de C , il passe au moins un hyperplan d'appui.

Définitions 18.18. — Soit C une partie convexe de \mathcal{E} et p un point de \mathcal{E} .

(i) On dit que p est un **point extrémal** de C s'il n'est pas intérieur à un segment de points de C , i.e. si les conditions $a, b \in C$ et $p \in [a, b]$ entraînent que $p = a$ ou $p = b$.

(ii) On dit que p est un **sommet** de C si l'intersection des hyperplans d'appui passant par p est égale à $\{p\}$.

(iii) Tout sommet est un point extrémal, mais la réciproque est fautive, cf. les exemples ci-dessous.

Démonstration de (iii). — Supposons que p soit intérieur à un segment $[a, b]$, avec $a, b \in C$ et que \mathcal{H} soit un hyperplan d'appui en p , donné par une équation $f(x) = \lambda$. Comme C est contenu dans l'un des demi-espaces définis par \mathcal{H} on peut supposer, quitte à changer f en $-f$, que $f(a)$ et $f(b)$ sont tous deux $\leq \lambda$. Par hypothèse, on a $p = ta + (1-t)b$, avec $0 < t < 1$, et comme $p \in \mathcal{H}$ on a :

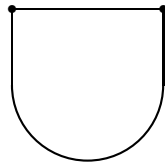
$$\lambda = f(p) = tf(a) + (1-t)f(b) \leq t\lambda + (1-t)\lambda = \lambda.$$

On en déduit que $f(a) = \lambda = f(b)$, et donc \mathcal{H} contient le segment $[a, b]$. Il en résulte que l'intersection des hyperplans d'appui en p contient le segment $[a, b]$, donc p n'est pas un sommet de C . Ceci prouve (iii). \square

Exemples 18.19. — (a) Pour le rectangle $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$, les points extrémaux sont les quatre points $(\pm a, \pm b)$. Ce sont aussi des sommets car par chacun de ces points p il passe plus d'une droite d'appui, de sorte que l'intersection des droites d'appui en p égale $\{p\}$.

(b) Si C est une boule fermée $\overline{B}(x, r)$, tous les points de la sphère $\Sigma = \Sigma(x, r)$ sont des points extrémaux. Aucun n'est un sommet, car par chacun de ces points p il ne passe qu'un seul hyperplan d'appui, qui est l'hyperplan tangent $T_p\Sigma$.

(c) Pour le convexe $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} y \leq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \text{ou } 0 \leq y \leq 1 \text{ et } -1 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$ ci-dessous :



les sommets sont les points $(-1, 1)$ et $(1, 1)$. Les autres points extrémaux sont les points de l'arc de cercle ; ce ne sont pas des sommets.

(d) Par contre, si C n'est pas compact il peut ne pas avoir de points extrémaux, par exemple si C est un demi-espace.

Théorème 18.20 (de Minkowski-Krein-Milman). — ⁽⁶⁾ Soit C un convexe compact de \mathcal{E} . Alors C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Démonstration. — On procède par récurrence sur $d = \dim(\mathcal{E})$. Si $d = 1$, alors C est un intervalle $[a, b]$ et c'est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux a et b . Supposons donc le résultat démontré en dimension $< d$. Notons $\text{Extr}(C)$ l'ensemble des points extrémaux de C et \mathcal{C} son enveloppe convexe. Il est clair que $\mathcal{C} \subset C$ et nous allons montrer l'inclusion réciproque.

⁽⁵⁾Hans Hahn (1879-1934), mathématicien autrichien et Stefan Banach (1892-1945), mathématicien polonais.

⁽⁶⁾Ce théorème est dû à Hermann Minkowski (mathématicien allemand, 1864 -1909) dans le cas d'un espace affine de dimension finie, mais il est souvent appelé « théorème de Krein-Milman » en raison d'une généralisation en dimension infinie obtenue en 1940 par les mathématiciens soviétiques Mark Krein (1907-1989) et David Milman (1912-1982).

Remarquons que si \mathcal{H} est un hyperplan d'appui de C et si l'on note C' le convexe $C \cap \mathcal{H}$ de \mathcal{H} , alors on a $\text{Extr}(C') \subset \text{Extr}(C)$. En effet, supposons que $p \in C'$ ne soit pas un point extrémal de C , i.e. soit intérieur à un segment $[a, b]$, avec $a, b \in C$. Alors, comme dans la preuve de 18.18 (iii), on voit que $[a, b]$ est contenu dans \mathcal{H} , et donc p n'est pas un point extrémal de C' . Ceci prouve que $\boxed{\text{Extr}(C') \subset \text{Extr}(C)}$.

Compte tenu du théorème de Hahn-Banach 18.17 et de l'hypothèse de récurrence, ceci montre déjà que tout point de la frontière de C est dans l'enveloppe convexe des points extrémaux de C .

Il reste à traiter le cas où p est un point intérieur à C . Dans ce cas, soit \mathcal{D} une droite quelconque passant par p . Comme C est un convexe compact, $\mathcal{D} \cap C$ est un segment $[a, b]$ de \mathcal{D} , avec a, b dans C . De plus, a et b appartiennent à la frontière de C . (Sinon il existerait un réel $r > 0$ tel que les boules fermées $\overline{B}(b, r)$ et $\overline{B}(a, r)$ soient contenues dans C et, notant \vec{u} le vecteur unitaire $(1/\|\vec{ab}\|)\vec{ab}$, on aurait $[a - r\vec{u}, b + r\vec{u}] \subset \mathcal{D} \cap C$, contredisant la définition de a et b .)

D'après ce qui précède, a, b appartiennent à \mathcal{C} et donc il en est de même de p , puisque $p \in [a, b]$. Le théorème est démontré. \square

18.3. Polyèdres compacts et polytopes convexes. —

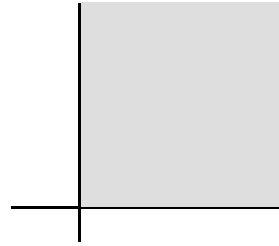
Définition 18.21. — Un **polyèdre convexe** C est une intersection *finie* de demi-espaces fermés.

Exemples 18.22. — Plaçons-nous dans un plan.

a) Un demi-espace fermé est un polyèdre convexe, ainsi que l'intersection de deux demi-espaces fermés :

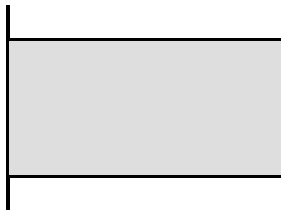


$$C_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

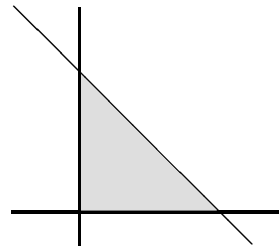


$$C_2 = \{(x, y) \mid x, y \geq 0\}$$

b) Et pour trois demi-espaces fermés, on peut obtenir :



$$C_3 = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 1, x \geq 0\}$$



$$C_4 = \{(x, y) \mid x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

Terminologie 18.23. — Soient $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_N$ des hyperplans. Une écriture $C = \bigcap_{i=1}^N \overline{\mathcal{H}_i}^+$ est dite *non redondante* si l'on ne peut pas supprimer l'un des \mathcal{H}_i sans augmenter strictement C (i.e. si pour tout sous-ensemble I strictement contenu dans $\{1, \dots, N\}$ on a $C \neq \bigcap_{i \in I} \overline{\mathcal{H}_i}^+$). Dans les exemples ci-dessus les écritures sont non redondantes. Par contre, on aurait pu définir C_4 comme l'intersection des cinq demi-espaces : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$, $x \leq 1$, $y \leq 1$, et dans ce cas les deux derniers s'avèrent être superflus, i.e. C_4 est l'intersection des trois premiers.

On peut montrer que tout polyèdre convexe possède une *unique* écriture $C = \bigcap_{i=1}^N \overline{\mathcal{H}_i}^+$ non redondante. (Pour une démonstration, voir [Be, 12.1.5] ou [RWM, Partie II, Chap. 5, Th. 82].)

Définition 18.24. — Un **polytope convexe** est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points.

Exemples 18.25. — (a) Dans le plan, tout polygone convexe à n côtés est l'enveloppe convexe de ses n sommets.

(b) Dans l'espace de dimension 3, un tétraèdre (resp. un cube, resp. un octaèdre) est l'enveloppe convexe de ses 4 (resp. 8, resp. 6) sommets.

Proposition 18.26. — *Tout polyèdre convexe compact C est un polytope.*

Esquisse de démonstration. — D'après le théorème de Minkowski 18.20, C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Or on peut montrer, par récurrence sur la dimension de \mathcal{E} , qu'un polyèdre convexe n'a qu'un nombre fini de points extrémaux. (Pour une démonstration, voir [RWM, Partie II, Chap. 5, Prop. 83].) \square

Remarque 18.27. — Réciproquement, on peut montrer que tout polytope convexe est un polyèdre (convexe compact), i.e. est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés. Voir par exemple [RWM, Partie II, Chap. 5, Th. 87] (en prenant garde qu'ils appellent « \mathcal{V} -polytope » un polytope et « polytope » un polyèdre convexe compact).

19. Polyèdres réguliers de \mathbb{R}^3

Dans cette section, (\mathcal{E}, E) désigne un espace affine euclidien. On note $\text{Is}(E)$ le groupe des isométries vectorielles de E et $\text{Is}(\mathcal{E})$ celui des isométries affines de \mathcal{E} . On rappelle que :

(1) Tout élément de $\text{Is}(E)$ est de déterminant égal à 1 ou -1 ; ceux de déterminant 1 forment le sous-groupe $\text{Is}^+(E)$ des isométries *directes* ; les autres sont dites *indirectes* et leur ensemble est noté $\text{Is}^-(E)$ (ce n'est pas un sous-groupe : le produit de deux éléments de $\text{Is}^-(E)$ est dans $\text{Is}^+(E)$).

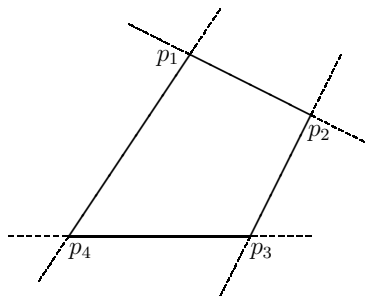
(2) Les éléments de $\text{Is}(\mathcal{E})$ dont la partie linéaire est dans $\text{Is}^+(E)$ forment un sous-groupe $\text{Is}^+(\mathcal{E})$, appelé le groupe des isométries directes (ou *déplacements*) ; les autres sont appelés isométries indirectes ou *anti-déplacements* et leur ensemble est noté $\text{Is}^-(\mathcal{E})$.

Notation. — Soit X une partie non vide de \mathcal{E} . On note $\text{Is}(X)$ le sous-groupe de $\text{Is}(\mathcal{E})$ formé des isométries f de \mathcal{E} qui vérifient $f(X) = X$, et l'on définit de même $\text{Is}^+(X)$.

19.1. Polygones réguliers de \mathbb{R}^2 . — Afin de justifier la définition que l'on va donner plus bas des polyèdres réguliers de \mathbb{R}^3 , commençons par les polygones réguliers d'un plan euclidien (\mathcal{E}, E) .

Définitions 19.1. — Soit n un entier ≥ 3 et soient p_1, \dots, p_n des points du plan euclidien, deux à deux distincts. On dit que ces points forment (dans cet ordre) un *n -gone convexe* si la condition suivante est vérifiée. (On pose $p_{n+1} = p_1$ et $p_0 = p_n$.)

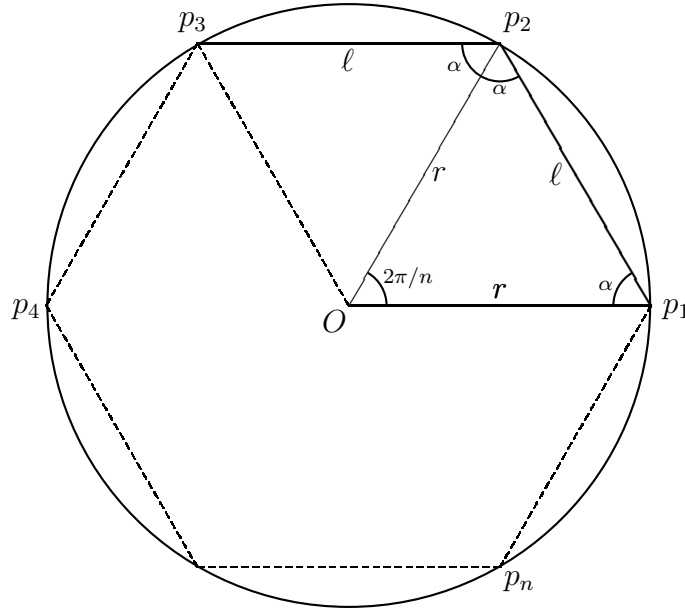
(*) Pour chaque $i = 1, \dots, n$, tous les points p_j avec $j \neq i, i+1$ sont contenus dans l'un des demi-plans ouverts définis par la droite $(p_i p_{i+1})$, cf. la figure ci-dessous :



Et l'on dit que ce n -gone convexe est **régulier** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) Les arêtes $[p_i, p_{i+1}]$ sont toutes d'une même longueur ℓ .
- (ii) Les angles $\widehat{p_{i-1}p_i p_{i+1}}$ sont tous égaux.

Sous ces conditions, la valeur commune des angles est $\theta = (n-2)\pi/n = \pi - \frac{2\pi}{n}$.⁽⁷⁾ Soit D_1 (resp. D_2) la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{p_0 p_1 p_2}$ (resp. $\widehat{p_1 p_2 p_3}$) et soit O leur point de concours. Posant $\alpha = \theta/2$ et $r = Op_1$, on a la figure suivante :



Notant R la rotation de centre O et d'angle $2\pi/n$ (qui envoie p_1 sur p_2), on voit alors que $R(p_2)$ égale p_3 . Et de même $R(p_i) = p_{i+1}$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Ceci montre que les p_i sont tous situés sur le cercle de centre O et de rayon r , où r est défini par $r \sin(\pi/n) = \ell/2$, et que les angles $\widehat{p_i O p_{i+1}}$ valent tous $2\pi/n$. De plus, O est le centre de gravité des p_i .

Notant P le n -gone régulier formé par les p_i , on en déduit que $\text{Is}^+(P)$ est un groupe cyclique d'ordre n , formé des rotations de centre O et d'angle $2k\pi/n$, pour $k = 1, \dots, n$. En effet, toute isométrie directe f du plan euclidien est une rotation ; si elle laisse stable P elle fixe son centre de gravité O , donc c'est une rotation de centre O ; enfin comme $p_0 = p_n$ est envoyé sur un certain p_k , avec $0 \leq k < n$, c'est la rotation R^k de centre O et d'angle $2k\pi/n$.

Pour décrire $\text{Is}(P)$, on peut identifier \mathcal{E} , muni de l'origine O , au « plan complexe » $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Quitte à faire tourner tous les p_i , on peut supposer que p_n est le nombre complexe 1 ; alors $p_k = \exp(2ik\pi/n) = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ pour $k = 0, \dots, n$.

On voit alors que la conjugaison complexe $\tau : z \mapsto \bar{z}$, i.e. la symétrie orthogonale par rapport à la droite (Ox) , est un élément de $\text{Is}(P)$. Si σ en est un autre élément, alors $\tau\sigma$ appartient à $\text{Is}^+(P)$ donc est une rotation $R^k : z \mapsto \exp(2ik\pi/n)z$ et donc on a :

$$\sigma(z) = (\tau \circ R^k)(z) \overline{\exp(2ik\pi/n)z} = \exp(-2ik\pi/n)\bar{z} = (R^{-k} \circ \tau)(z).$$

Ceci montre que les éléments de $\text{Is}(P)$ sont les rotations R^k et les symétries orthogonales $\tau_k = \tau R^k = R^{-k}\tau$, pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. De plus, on a la formule $\boxed{\tau R^k \tau^{-1} = R^{-k}}$.

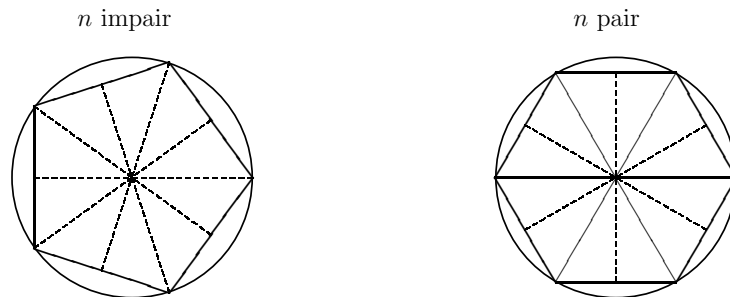
⁽⁷⁾Sachant que la somme des angles d'un triangle vaut π , on montre facilement par récurrence que, pour tout $n \geq 3$, la somme des angles d'un n -gone convexe vaut $(n-2)\pi$.

De plus τ_k laisse fixe le point $q_k = \exp(-ik\pi/n)$ donc c'est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D_k = (Oq_k)$. L'angle entre les droites D_k et D_{k+1} est π/n , donc la composée $\tau_{k+1}\tau_k$ est la rotation R de centre O et d'angle $2\pi/n$.

Remarque 19.2. — Remarquons que le point opposé $-q_k$ égale $\exp((n-k)i\pi/n)$ et donc :

a) si $n = 2m + 1$ alors l'un des entiers k et $n - k$ est pair et l'autre impair, donc les droites D_k sont toutes conjuguées sous $\text{Is}^+(P)$: ce sont les droites joignant chaque p_i au milieu du côté opposé.

b) si $n = 2m$ alors les droites D_k sont de deux types : si $k = 2r$ alors D_k joint les points opposés p_r et p_{r+m} , tandis que si $k = 2r + 1$ alors D_k joint le milieu du segment $[p_r, p_{r+1}]$ avec le milieu du segment opposé $[p_{r+m}, p_{r+m+1}]$:



On peut résumer ce qui précède en la :

Proposition 19.3. — Soit P un n -gone régulier du plan euclidien et soit O son centre de gravité (i.e. celui des sommets de P). Alors :

(i) $\text{Is}^+(P)$ est un groupe cyclique C_n d'ordre n , engendré par la rotation R de centre O et d'angle $2\pi/n$.

(ii) $\text{Is}^-(P)$ est formé des symétries orthogonales par rapport aux n droites D_k décrites plus haut.

(iii) $\text{Is}(P)$ a $2n$ éléments ; il est engendré par R et l'une quelconque des symétries précédentes, disons τ , et l'on a $\tau R^k \tau^{-1} = R^{-k}$. Par conséquent, $\text{Is}(P)$ est le produit semi-direct du groupe cyclique C_n et du groupe à deux éléments $\{1, \tau\}$.

(iv) $\text{Is}(P)$ est appelé le **groupe diédral** de cardinal $2n$.⁽⁸⁾ Il est aussi engendré par tout couple (s, t) de symétries « consécutives » (i.e. correspondant à deux droites D_k et D_{k+1}) puisqu'alors le produit st égale R .

Terminologie. — Appelons **drapeau** de P tout couple (s, A) où A est une arête de P et s un sommet de A .

Remarque 19.4. — (1) Le groupe $\text{Is}(P)$ agit **transitivement** sur l'ensemble des drapeaux de P .

En effet, fixons deux arêtes A et A' et notons s et t les deux sommets de A . Il existe un unique élément f de $\text{Is}^+(P)$ tel que $f(A) = A'$; posons $s' = f(s)$ et $t' = f(t)$. Soit D la droite passant par O et le milieu de A' , alors la symétrie orthogonale τ_D par rapport à D échange s' et t' , donc f (resp. $\tau_D \circ f$) envoie (s, A) sur (s', A') (resp. (t', A')). Ceci prouve que l'action est transitive.

(2) D'autre part, cette action est **libre**. En effet, si $f \in \text{Is}(P)$ fixe un drapeau (s, A) alors f fixe aussi le second sommet t de A , et comme tout élément de $\text{Is}(P)$ fixe O on obtient que f fixe les points O, s, t , qui forment un repère du plan, d'où $f = \text{id}$.

⁽⁸⁾Certains auteurs le notent D_{2n} et d'autres D_n , donc il vaut mieux préciser qu'il est « de cardinal » $2n$.

Réciproquement, on peut prendre la propriété (1) de la remarque précédente comme *définition* d'un polygone convexe régulier, i.e. :

Définition 19.5. — Soit C un n -gone convexe du plan euclidien, de sommets (consécutifs) p_1, \dots, p_n . On dit que C est **régulier** si le groupe $\text{Is}(P)$ agit transitivement sur les drapeaux de P . Dans ce cas, l'action est également libre.

En effet, on a vu qu'avec la définition antérieure l'action est libre et transitive. Réciproquement, si l'action est transitive sur les arêtes (resp. les sommets) alors toutes les longueurs (resp. tous les angles) sont égaux, donc C est régulier au sens de la définition antérieure.

19.2. Polyèdres réguliers de \mathbb{R}^3 . — Dans ce paragraphe, (\mathcal{E}, E) désigne un espace affine euclidien de dimension 3. Rappelons la classification des isométries de \mathcal{E} ayant un point fixe (cf. [Po, Chap. 6]).

(1) Tout élément f de $\text{Is}^+(\mathcal{E})$ ayant un point fixe p est une *rotation* et si $f \neq \text{id}_{\mathcal{E}}$ l'ensemble des points fixes est une droite \mathcal{D} passant par p , appelée l'axe de rotation.

Supposons maintenant que g soit un élément de $\text{Is}^-(\mathcal{E})$ ayant un point fixe p . Distinguons plusieurs cas :

(2) Si la partie linéaire \vec{g} de g est $-\text{id}_E$, alors g est la *symétrie centrale* de centre p , i.e. pour tout point m de \mathcal{E} on a $\overrightarrow{pg(m)} = -\overrightarrow{pm}$. Dans ce cas, p est l'unique point fixe.

Sinon $\text{Ker}(\vec{g} + \text{id}_E)$ est une droite vectorielle D , appelée la droite des *anti-invariants* (c'est l'ensemble des $u \in E$ tels que $\vec{g}(u) = -u$). Posons $\mathcal{D} = p + D$ et $\mathcal{P} = p + D^\perp$. On a alors les deux cas suivants :

(3) g est la *symétrie orthogonale* $\tau_{\mathcal{D}}$ par rapport à \mathcal{P} , auquel cas l'ensemble des points fixes est le plan \mathcal{P} .

(4) g est la composée de $\tau_{\mathcal{D}}$ et d'une rotation d'axe \mathcal{D} et d'angle $\theta \neq 0$. Dans ce cas, p est l'unique point fixe et l'on dit que g est une *rotation gauche* d'axe \mathcal{D} (on pourrait dire aussi « anti-axe »).

En particulier, tout $h \in \text{Is}(\mathcal{E})$ ayant au moins deux points fixes est soit une rotation, soit une symétrie orthogonale.

Terminologie. — Soit C un polyèdre convexe compact de \mathbb{R}^3 , de dimension 3 (i.e. qui n'est pas contenu dans un plan). Appelons **drapeau** de C tout triplet (p, A, F) où F est une face de C , A une arête de F et p un sommet de A .

Définition 19.6. — Soit C un polyèdre convexe compact de \mathbb{R}^3 , de dimension 3. On dit que C est **régulier** si $\text{Is}(C)$ agit transitivement l'ensemble des drapeaux de C .

Fixons un tel polyèdre régulier C et tirons des conséquences de la définition.

Notations. — (1) Notons s (resp. a, f) le nombre de sommets (resp. arêtes, faces) de C .

(2) Soit O le centre de gravité des sommets. Tout élément h de $\text{Is}(C)$ permute les sommets, donc fixe le point O .

(3) Comme l'action de $\text{Is}(C)$ sur les faces (resp. les sommets, resp. les arêtes) est transitive, alors toutes les faces ont le même nombre $m \geq 3$ d'arêtes, par chaque sommet passe le même nombre $k \geq 3$ d'arêtes, et toutes les arêtes ont la même longueur. De plus, tous les sommets sont à égale distance de O .

(4) Pour toute face F et toute arête A , notons q_F le centre de gravité des sommets de F et q_A le milieu de A .

Lemme 19.7. — (i) $\text{Is}(C)$ agit librement sur les drapeaux et est de cardinal $2mf$.

(ii) Pour toute face F (resp. arête A , resp. sommet p), $\text{Is}^-(C)$ contient au moins une symétrie orthogonale qui fixe F (resp. A , resp. p).

(iii) $G = \text{Is}^+(C)$ est de cardinal mf et agit transitivement sur les faces (resp. les arêtes, resp. les sommets).

Démonstration. — Soit (p, A, F) un drapeau et soit $g \in \text{Is}(C)$ fixant ce drapeau. Alors g fixe les points O, p, q_A, q_F et comme ceux-ci forment un repère affine de \mathcal{E} (car p, q_A, q_F ne sont pas alignés et O n'est pas dans le plan engendré par F), il en résulte que g est l'identité. Ceci prouve que l'action de $\text{Is}(C)$ sur les drapeaux est libre. Comme elle est transitive, le cardinal de $\text{Is}(C)$ est le nombre de drapeaux. Comme chaque face a m arêtes et chaque arête deux sommets, ce nombre est $2mf$. Ceci prouve (i).

(ii) Notons t le second sommet de A et B la seconde arête passant par p . Par hypothèse, il existe un élément h (resp. h') de $\text{Is}(C)$ qui envoie le drapeau (p, A, F) sur le drapeau (t, A, F) (resp. (p, B, F)). Alors h fixe les points O, q_F, q_A donc laisse fixe tout point du plan affine \mathcal{P} qu'ils engendrent. Comme $h \neq \text{id}$ (puisque $h(p) = t$), il en résulte que h est la symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{P} (qui est donc le plan médiateur de p et t). Elle vérifie $h(F) = F$ et $h(A) = A$. De même, h' fixe les points O, p, q_F donc laisse fixe tout point du plan affine \mathcal{P}' qu'ils engendrent. Comme $h' \neq \text{id}$ (puisque $h'(A) = B$), il en résulte que h' est la symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{P}' ; elle vérifie $h'(F) = F$ et $h'(p) = p$. Ceci prouve (ii).

Prouvons (iii). D'après (ii), $\text{Is}(C)$ contient au moins une symétrie orthogonale h . Alors, l'application $G \rightarrow \text{Is}^-(C)$, $g \mapsto h \circ g$ est bijective (son inverse étant $\tau \mapsto h \circ \tau$) et comme $\text{Is}(C)$ est réunion disjointe de G et de $\text{Is}^-(C)$ on obtient que $|\text{Is}(C)| = 2|G|$ d'où $|G| = mf$.

D'autre part, soient F, F' (resp. A, A' , resp. p, p') deux faces (resp. arêtes, resp. sommets) quelconques de C . Par hypothèse, il existe $g \in \text{Is}(C)$ envoyant F sur F' (resp. A sur A' , resp. p sur p'). Si $g \in G$ c'est gagné, et si $g \notin G$ soit τ un élément de $\text{Is}^-(C)$ fixant F (resp. A , resp. p), alors $g\tau$ est dans G et envoie F sur F' (resp. A sur A' , resp. p sur p'). Ceci achève la preuve de (iii). \square

Proposition 19.8. — Soient F, A, p une face, une arête et un sommet de C .

(i) F est un m -gone régulier et son stabilisateur G_F dans G est un groupe cyclique d'ordre m , engendré par la rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{Oq_F}$ et d'angle $2\pi/m$. (On retrouve ainsi que $|G| = mf$).

(ii) Le stabilisateur G_p de p dans G est un groupe cyclique d'ordre k , engendré par la rotation d'axe orienté par \overrightarrow{Op} et d'angle $2\pi/k$. On a donc $|G| = ks$.

(iii) Le stabilisateur G_A de A dans G est un groupe cyclique d'ordre 2, engendré par le demi-tour d'axe (Oq_A) . On a donc $|G| = 2a$.

(iv) Les éléments de G sont de type (i), (ii) ou (iii) et les possibilités pour k, m, f, a, s sont données par le tableau suivant, où l'on a posé $n = |G|$:

k	m	n	f	a	s
3	3	12	4	6	4
3	4	24	6	12	8
4	3	24	8	12	6
3	5	60	12	30	20
5	3	60	20	30	12

Démonstration. — (i) Notons \mathcal{P} le plan affine engendré par F . Remarquons d'abord que si un élément g de $\text{Is}(C)$ vérifie $g(F) = F$ alors, d'une part, $g(q_F) = q_F$ donc la droite (Oq_F) est formée de points fixes de g et, d'autre part, g laisse stable le plan \mathcal{P} et sa restriction $g' = g_{\mathcal{P}}$ vérifie $g'(F) = F$, i.e. c'est un élément de $\text{Is}(F)$.

Par hypothèse, pour tout couple de drapeaux (s_1, A_1) et (s_2, A_2) de F , il existe un élément g de $\text{Is}(C)$ qui envoie (s_1, A_1, F) sur (s_2, A_2, F) et alors g' envoie (s_1, A_1) sur (s_2, A_2) . Ceci montre que $\text{Is}(F)$ agit transitivement sur les drapeaux de F , et donc F est un m -gone régulier.

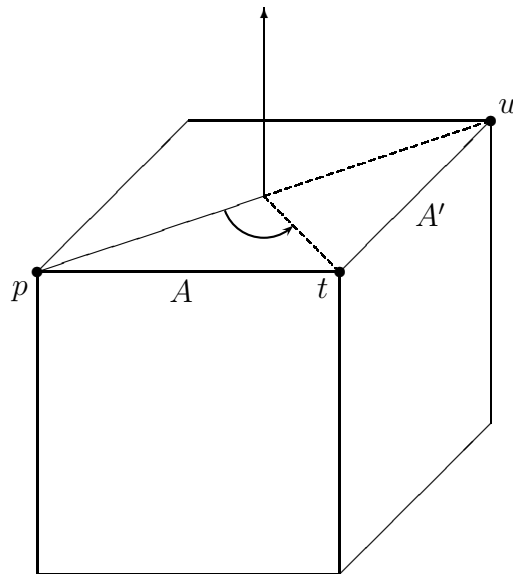
On en déduit que si un élément g de $\text{Is}(C)$ vérifie $g(F) = F$ alors on a les possibilités suivantes :

a) g est l'identité ou une rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{Oq_F}$. Dans le second cas, l'angle de g est $2r\pi/m$ pour un certain $r \in \{1, \dots, m-1\}$.

b) g est la symétrie orthogonale par rapport à un plan Π contenant la droite (Oq_F) . Dans ce cas, $g_{\mathcal{P}}$ est un élément de $\text{Is}^-(F)$ et d'après la proposition 19.3, on en déduit que le plan Π passe par un sommet de F ou le milieu d'une arête de F .

Montrons maintenant que la rotation R d'axe orienté par $\overrightarrow{Oq_F}$ et d'angle $2\pi/m$ appartient bien à $G = \text{Is}^+(C)$.⁽⁹⁾ Compte tenu de (a) ci-dessus, ceci prouvera que G_F est le groupe cyclique d'ordre m engendré par R .

Fixons une arête A de F et notons p le sommet de A n'appartenant pas à $A' = R(A)$, $t = R(p)$ son second sommet (qui est aussi un sommet de A') et u le second sommet de A' (cf. la figure ci-dessous).



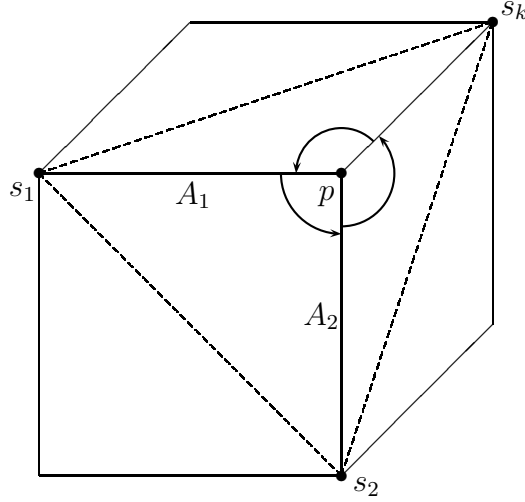
D'après l'hypothèse de transitivité, il existe $h \in \text{Is}(C)$ qui vérifie $h(F) = F$, $h(A) = A'$ et $h(p) = t$. Alors h envoie t (le second sommet de A) sur u , et fixe q_F . Par conséquent, h et R coïncident sur les points O, q_F, p, t , qui forment un repère affine de \mathcal{E} , d'où $h = R$. Donc R appartient à $\text{Is}(C)$, donc à $\text{Is}^+(C) = G$ puisque c'est une rotation. Ceci achève la preuve de (i).

Prouvons (ii). Nommons A_1, \dots, A_k les arêtes passant par p , de telle sorte que A_i et A_{i+1} appartiennent à une même face F_i , et notons s_i le second sommet de A_i . (On pose $A_{k+1} = A_1$ et $s_{k+1} = s_1$.) Comme $Os_1 = Os_i$ et $ps_1 = ps_i$, alors O et p appartiennent au plan

⁽⁹⁾Une autre démonstration est la suivante : on sait déjà que G_F est formé de rotations d'axe $\overrightarrow{Oq_F}$ et d'angle un multiple entier de $2\pi/m$; or d'après le point (iii) du lemme précédent, G_F est de cardinal m , donc il contient toutes ces rotations.

médiateur de s_1 et s_i , donc $\overrightarrow{s_1 s_i}$ est orthogonal à \overrightarrow{Op} , donc s_1, \dots, s_k appartiennent au plan $\Pi = s_1 + (\mathbb{R}\overrightarrow{Op})^\perp$.

Alors $C \cap \Pi$ est un polygone convexe Γ_p , dont chaque arête $[s_i, s_{i+1}]$ est l'intersection de Π avec la face F_i , cf. la figure ci-dessous :



Remarquons maintenant que si un élément g de $\text{Is}(C)$ vérifie $g(p) = p$ alors la droite (Op) est formée de points fixes de g et, d'autre part, g laisse stable le plan Π et sa restriction $g' = g_\Pi$ vérifie $g'(\Gamma_p) = \Gamma_p$, i.e. c'est un élément de $\text{Is}(\Gamma_p)$.

Donnons-nous deux drapeaux $\mathcal{D}_1 = (s_i, \alpha)$ et $\mathcal{D}_2 = (s_j, \beta)$ de Γ_p , où α (resp. β) est l'intersection de Γ_p avec une face F (resp. F') de C contenant l'arête A_i (resp. A_j). Ils correspondent aux deux drapeaux $\tilde{\mathcal{D}}_1 = (p, A_i, F)$ et $\tilde{\mathcal{D}}_2 = (p, A_j, F')$ de C . Par hypothèse, il existe un élément g de $\text{Is}(C)$ qui envoie $\tilde{\mathcal{D}}_1$ sur $\tilde{\mathcal{D}}_2$; alors g fixe p et sa restriction g' à Π envoie \mathcal{D}_1 sur \mathcal{D}_2 . Ceci montre que $\text{Is}(\Gamma_p)$ agit transitivement sur les drapeaux de Γ_p , et donc Γ_p est un k -gone régulier.

On en déduit que si un élément g de $\text{Is}(C)$ vérifie $g(p) = p$ alors on a les possibilités suivantes :

a) g est l'identité ou une rotation d'axe orienté par \overrightarrow{Op} . Dans le second cas, l'angle de g est $2r\pi/k$ pour un certain $r \in \{1, \dots, k-1\}$.

b) g est la symétrie orthogonale par rapport à un plan Ω contenant la droite (Op) . Dans ce cas, g_Π est un élément de $\text{Is}^-(\Gamma_p)$ et d'après la proposition 19.3, on en déduit que le plan Ω passe par un sommet s_i ou par le milieu d'une arête de Γ_p .

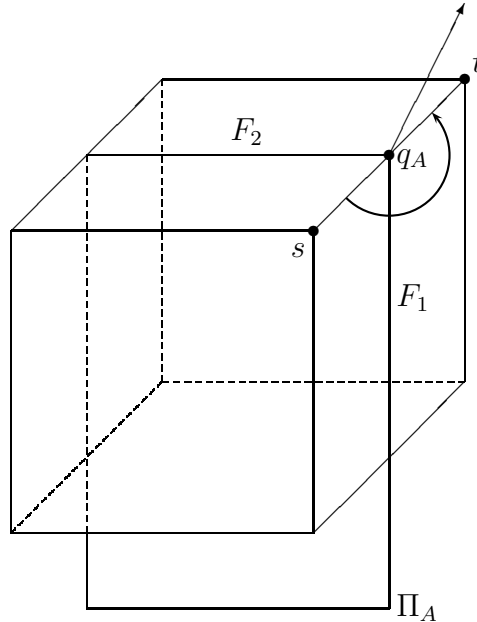
Montrons maintenant que la rotation R d'axe orienté par \overrightarrow{Op} et d'angle $2\pi/k$ appartient bien à $G = \text{Is}^+(C)$. Compte tenu de (a) ci-dessus, ceci prouvera que G_p est le groupe cyclique d'ordre k engendré par R .

Considérons les faces F_1 et F_2 , qui ont en commun l'arête A_2 . Par hypothèse, il existe $h \in \text{Is}(C)$ qui envoie le drapeau (p, A_1, F_1) sur (p, A_2, F_2) . Alors h envoie A_2 sur la seconde arête de F_2 passant par p , à savoir A_3 , donc h coïncide avec R sur les points O, p, s_1, s_2 , qui forment un repère affine de \mathcal{E} , donc $h = R$. Ceci achève la preuve de (ii).

Prouvons (iii). Soient A une arête, p, t ses deux sommets, et F_1 et F_2 les deux faces qui ont A comme arête commune.

Soit g un élément de $\text{Is}(C)$, distinct de l'identité, vérifiant $g(A) = A$; alors $g(q_A) = q_A$ et donc la droite (Oq_A) est formée de points fixes de g ; d'autre part ou bien g échange p et t , ou bien elle les laisse tous les deux fixes.

Dans le second cas, le plan engendré par O, p, t est formé de points fixes, et donc g est la symétrie orthogonale par rapport à ce plan. Si g échange p et t , alors g est ou bien la symétrie orthogonale par rapport au plan Π_A médiateur de p et t , auquel cas on a $g(F_1) = F_1$ et $g(F_2) = F_2$, ou bien le demi-tour d'axe (Oq_A) , qui échange les faces F_1 et F_2 , cf. la figure ci-dessous :



Pour prouver (iii), il suffit donc de montrer que le demi-tour R d'axe (Oq_A) appartient à $\text{Is}(C)$. Or, par hypothèse, il existe un élément $h \in \text{Is}(C)$ qui envoie (s, A, F_1) sur (t, A, F_2) . Comme $h(s) \neq s$ et $h(F_1) \neq F_1$, alors h ne peut être aucune des deux symétries mentionnées plus haut, donc h est nécessairement égal à R . Ceci prouve (iii).

Prouvons (iv). Tout $g \in G$ distinct de l'identité est une rotation, donc fixe exactement deux points de la frontière de C . Soit q un tel point fixe. Distinguons trois cas :

(1) Si q est intérieur à une face F , alors $g(F) = F$ (car $q = g(q)$ est intérieur à la face $g(F)$), donc on est dans le cas (i) : l'unique point de F fixé par g est q_F , d'où $q = q_F$.

(2) Si q est intérieur à une arête A , alors $g(A) = A$ (car $q = g(q)$ est intérieur à l'arête $g(A)$), donc on est dans le cas (iii) et donc $q = q_A$.

(3) Enfin, dans le cas restant, q est un sommet p et l'on est dans le cas (ii).

En faisant la somme du nombre de cas considérés dans (i), (ii), (ii), on obtient donc tous les éléments de $G - \{\text{id}\}$, chaque tel élément étant compté deux fois puisque son axe rencontre la frontière de C en deux points distincts. Notant $n = |G|$ on obtient donc l'égalité :

$$(\dagger) \quad f \cdot (m - 1) + s \cdot (k - 1) + a \cdot 1 = 2(n - 1) = 2n - 2.$$

En tenant compte des égalités $n = mf = ks = 2a$, l'égalité (\dagger) se réécrit de plusieurs façons. D'une part, en divisant par n , on obtient

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{m} - \frac{1}{k} = -\frac{2}{n} < 0$$

ce qui entraîne que m, k ne peuvent être tous deux ≥ 4 (car sinon le terme de gauche serait ≥ 0). Comme m, k sont ≥ 3 , le plus petit d'entre eux doit être égal à 3 et, désignant par β le second, on a

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{\beta} = -\frac{2}{n} < 0$$

et donc β ne peut prendre que les valeurs 3, 4, 5, auxquels cas on a, respectivement,

$$-\frac{2}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{6} & \text{d'où } n = 12, \\ -\frac{1}{12} & \text{d'où } n = 24, \\ -\frac{1}{30} & \text{d'où } n = 60. \end{cases}$$

On obtient ainsi les trois premières colonnes du tableau, et compte tenu des égalités $n = mf = ks = 2a$ les trois autres s'en déduisent. Ceci prouve (iv). \square

Remarque 19.9. — En tenant compte des égalités $n = mf = ks = 2a$, l'égalité (†) se réécrit $-f - s + a = -2$, i.e. :

$$(\star) \quad \boxed{f - a + s = 2}$$

ce qui est la célèbre *formule d'Euler*, valable en fait pour tout polyèdre compact convexe, pas nécessairement régulier ; voir par exemple [Be, §12.7] (ou, pour une jolie démonstration combinatoire : D.M.Y. Sommerville, An introduction to the geometry of n dimensions (Dover, 1958), Chap. IX).

Avant de montrer *l'existence* d'un polyèdre régulier correspondant à chaque ligne du tableau, montrons d'abord qu'un tel polyèdre (s'il existe) est unique à une similitude directe près.

Définition 19.10. — Le groupe des *similitudes* (directes) de l'espace affine euclidien (\mathcal{E}, E) est le sous-groupe de $\text{GA}(\mathcal{E})$ engendré par les homothéties de rapport $\lambda > 0$ et les isométries (directes).

Soient C un polyèdre régulier de centre O . Conservons les notations (m, k) précédentes et notons ℓ la longueur d'une arête. Introduisons de plus les longueurs suivantes : soient (p, A, F) un drapeau de C et Γ le k -gone régulier formé par les sommets s_1, \dots, s_k voisins de p ; alors on note :

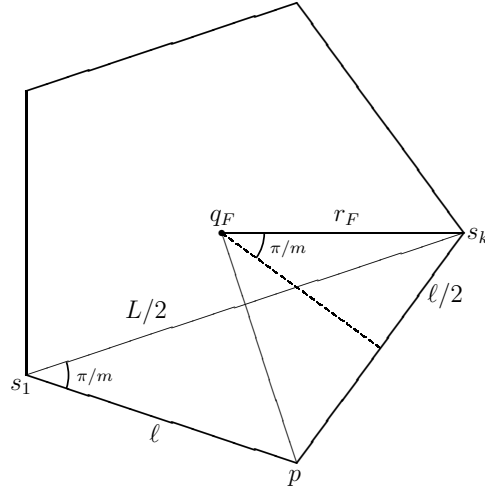
- r_C le rayon de C , i.e. la distance Op .
- r_F le rayon de F , i.e. la distance $q_F p$.
- r_Γ le rayon de Γ , i.e. la distance $q_\Gamma s_i$, où q_Γ désigne le centre de Γ .
- L la longueur d'une arête de Γ (i.e. $s_k s_1$).
- φ l'angle au centre entre deux sommets voisins, i.e. l'angle en O du triangle $pO s_1$.

Proposition 19.11. — On a les relations suivantes : $(*) \quad Oq_F^2 + r_F^2 = r_C^2$ et

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\ell}{2} &= r_F \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) & (2) \quad \frac{L}{2} &= \ell \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) & (3) \quad \frac{L}{2} &= r_\Gamma \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \\ (4) \quad r_\Gamma &= \ell \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) & (5) \quad \frac{\ell}{2} &= r_C \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

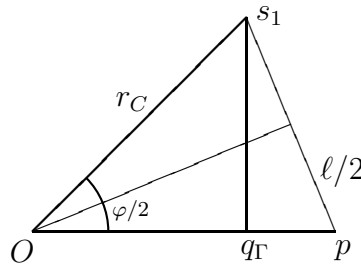
Par conséquent, $r_F, L, r_\Gamma, \varphi, r_C$ et Oq_F sont déterminés par ℓ .

Démonstration. — Les deux sommets de F voisins de p sont s_1 et s_k . Comme F est un m -gone régulier, on a la figure ci-dessous :



On en déduit les égalités : (1) $\ell/2 = r_F \sin(\pi/m)$ et (2) $L/2 = \ell \cos(\pi/m)$. De plus, comme O et q_F appartiennent à l'hyperplan médiateur de chaque arête de F , alors $\overrightarrow{Oq_F}$ est orthogonal au plan engendré par F donc au vecteur $\overrightarrow{q_F p}$, d'où : (*) $Oq_F^2 + r_F^2 = r_C^2$.

De même, dans le k -gone régulier Γ , on a l'égalité : (3) $L/2 = r_\Gamma \sin(\pi/k)$. D'autre part, dans le plan engendré par O, p et s_1 , on a la figure ci-dessous :



de laquelle on déduit : (5) $\ell/2 = r_C \sin(\varphi/2)$ et $r_\Gamma = r_C \sin(\varphi) = 2r_C \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2)$, d'où : (4) $r_\Gamma = \ell \cos(\varphi/2)$. (Ceci s'obtient aussi en disant que l'angle $\widehat{q_\Gamma s_1 p}$ vaut $\varphi/2$.)

On voit donc que, ℓ étant fixé, les formules (1-4) déterminent successivement $r_F, L, r_\Gamma, \frac{\varphi}{2}$ (et donc φ); plus précisément on déduit de (4), (3) et (2) que :

$$(*) \quad \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{r_\Gamma}{\ell} = \frac{\cos(\pi/m)}{\sin(\pi/k)}.$$

Puis (5) détermine r_C et alors (*) détermine Oq_F . \square

Proposition 19.12. — *S'il existe un polyèdre régulier C correspondant à une ligne du tableau 19.8 (iv), il est unique à une similitude directe près.*

Démonstration. — Supposons donnés deux polyèdres réguliers C et C' correspondant à une même valeur du couple (k, m) . Notons O, O' leurs centres et ℓ, ℓ' la longueur de leurs arêtes.

En appliquant à C' la translation de vecteur $\overrightarrow{O'O}$, on peut supposer $O' = O$. Puis, en appliquant à C' l'homothétie de centre O et de rapport ℓ/ℓ' , on peut supposer que les arêtes de C' sont aussi de longueur ℓ . Fixons une face F (resp. F') de C (resp. C'); d'après la proposition précédente leurs centres $q_{F'}$ et q_F sont à la même distance de O donc en appliquant à C' une rotation de centre O on peut supposer que $q_{F'} = q_F$. Alors F et F' sont deux m -gones réguliers contenus dans le plan $q_F + (\mathbb{R}\overrightarrow{Oq_F})^\perp$, centrés en q_F et de même rayon $r_F = \ell/2 \sin(\pi/m)$. En appliquant alors à C' une rotation d'axe (Oq_F) , on peut faire

coïncider un sommet p' de F' avec un sommet p de F , et alors $F' = F$ (car tous les sommets se déduisent de p par des rotations d'angle $2r\pi/m$).

D'autre part, on a vu dans la démonstration de la proposition 19.8 que si F_1 est une face de C (resp. C') alors toutes les faces de C (resp. C') ayant un sommet p_1 commun avec F_1 se déduisent de F_1 par des rotations d'axe (Op_1) et d'angle $2r\pi/k$. Il en résulte que si F_1 est une face commune à C et C' , alors chaque face de C voisine de F_1 est aussi une face de C' , et réciproquement.

Comme on peut passer de la face F à toute face F_N de C par un chemin de faces voisines $F = F_0, F_1, \dots, F_N$, on en déduit que toute face de C est une face de C' et réciproquement. Il en résulte que $C' = C$. Ceci montre que C est unique à similitude directe près (puisqu'on a fait coïncider C' et C en appliquant à C' une translation, une homothétie de rapport ℓ/ℓ' et des rotations). \square

Pour construire les cinq polyèdres réguliers, on aura besoin du :

Lemme 19.13. — Soient (p_0, p_1, p_2, p_3) et (p'_0, p'_1, p'_2, p'_3) deux repères affines de \mathcal{E} et soit f l'unique élément de $\text{GA}(\mathcal{E})$ envoyant p_i sur p'_i pour $i = 0, \dots, 3$. Si $p'_i p'_j = p_i p_j$ pour tout i, j , alors f est une isométrie.

Démonstration. — Notons g la partie linéaire de f et introduisons les vecteurs $u_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$ et $u'_i = \overrightarrow{p'_0 p'_i} = g(u_i)$. Pour $i, j = 1, 2, 3$, on a

$$(u'_i | u'_i) = (p'_0 p'_i)^2 = (p_0 p_i)^2 = (u_i | u_i)$$

et l'égalité de $(p'_i p'_j)^2 = (u'_j - u'_i | u'_j - u'_i) = (u'_j | u'_j) + (u'_i | u'_i) - 2(u'_i | u'_j)$ avec $(p_i p_j)^2$ entraîne alors que $(u'_i | u'_j) = (u_i | u_j)$ pour tout $i, j = 1, 2, 3$.

Pour des vecteurs $x = \sum_{i=1}^3 x_i u_i$ et $y = \sum_{j=1}^3 y_j u_j$ arbitraires, on a donc :

$$(g(x) | g(y)) = \left(\sum_{i=1}^3 x_i u'_i \mid \sum_{j=1}^3 y_j u'_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j (u'_i | u'_j) = \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j (u_i | u_j) = (x | y).$$

Ceci montre que g préserve le produit scalaire donc est une isométrie vectorielle de E . Par conséquent f est une isométrie de \mathcal{E} . \square

Le tétraèdre régulier 19.14. — Partons du triangle équilatéral donné, dans le plan horizontal $z = 0$ identifié à \mathbb{C} , par les racines cubiques de l'unité, et considérons donc dans \mathbb{R}^3 les trois points :

$$p_1 = (1, 0, 0), \quad p_2 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \quad p_3 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0 \right).$$

On a $(p_1 p_2)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$, donc les distances $p_i p_j$ sont toutes égales à $\sqrt{3}$. Posons $p_4 = (0, 0, \sqrt{2})$, alors pour $i = 1, 2, 3$ on a $(p_4 p_i)^2 = 3$.

Notons alors T le tétraèdre de sommets p_1, \dots, p_4 (i.e. l'enveloppe convexe de ces points). Toutes ses arêtes sont de longueur $\sqrt{3}$. Remarquons que le centre de gravité de p_1, p_2, p_3 est $(0, 0, 0)$ et donc le centre de gravité de T est le point $(0, 0, \sqrt{2}/4)$, que l'on notera O .

Pour tout élément σ du groupe symétrique S_4 , notons f_σ l'élément de $\text{GA}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f_\sigma(p_i) = p_{\sigma(i)}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Ceci définit un morphisme de groupes $S_4 \rightarrow \text{GA}(\mathcal{E})$.

D'après le lemme précédent, f_σ est une isométrie de \mathbb{R}^3 , et c'est donc un élément de $\text{Is}(T)$. Comme S_4 agit transitivement sur les triplets (i, j, k) , alors $\text{Is}(T)$ agit transitivement sur les drapeaux de T , donc T est bien un polyèdre régulier au sens de la définition 19.6. Enfin, tout élément de $\text{Is}(T)$ permute nécessairement les sommets de T , donc est l'un des éléments f_σ définis plus haut. Il en résulte que l'application $\sigma \mapsto f_\sigma$ est un *isomorphisme* de groupes de S_4 sur $\text{Is}(T)$. Décrivons explicitement l'isométrie associée à chaque permutation.

Rappelons que, pour tout $n \geq 2$, les éléments de S_n de signature 1 forment un sous-groupe de S_n de cardinal $n!/2$, appelé le *groupe alterné* et noté A_n . Alors, les 11 éléments de $A_4 - \{\text{id}\}$ se répartissent comme suit :

(1) Pour chaque i , il y a deux 3-cycles qui fixent i : ils correspondent aux deux rotations d'axe (Op_i) et d'angle $\pm 2\pi/3$. On obtient ainsi les 8 rotations qui fixent un sommet et laissent stable la face opposée.

(2) L'élément (12)(34) échange 1 et 2 d'une part, et 3 et 4 d'autre part : il correspond au demi-tour d'axe la droite joignant le milieu de $[p_1, p_2]$ au milieu de $[p_3, p_4]$. De même pour les deux éléments (13)(24) et (14)(23).

Et les 12 éléments de $S_4 - A_4$ se répartissent comme suit :

(3) Chaque transposition (ij) correspond à la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur de $[p_i, p_j]$, qui est le plan passant par O et les deux autres sommets p_k et p_ℓ . Elle laisse stable les deux faces $p_i p_j p_k$ et $p_i p_j p_\ell$ et échange les deux autres $p_k p_\ell p_i$ et $p_k p_\ell p_j$. On obtient ainsi 6 symétries orthogonales, dont chacune fixe deux sommets.

(4) Les 6 éléments restants de S_4 sont les 4-cycles. Notons q_{ij} le milieu de l'arête $[p_i, p_j]$ et considérons, par exemple, le 4-cycle $c : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, qu'on note (1234). Il échange q_{13} et q_{24} et permute les autres milieux comme suit :

$$q_{12} \rightarrow q_{23} \rightarrow q_{34} \rightarrow q_{41} \rightarrow q_{12}.$$

Son inverse c^{-1} est le 4-cycle (4321) = (1432), il échange aussi q_{13} et q_{24} et permute les autres milieux comme suit :

$$q_{41} \rightarrow q_{34} \rightarrow q_{23} \rightarrow q_{12} \rightarrow q_{41}.$$

On en déduit que c et c^{-1} correspondent aux rotations gauches d'axe $(q_{12}q_{34})$ et d'angles $\pm\pi/4$. De même, (1243) et son inverse (1342) (resp. (1324) et son inverse (1423)) correspondent aux rotations gauches d'angles $\pm\pi/4$ et d'axe $(q_{14}q_{23})$ (resp. $(q_{12}q_{34})$).

Le cube 19.15. — Soit C le cube dont les huit sommets sont les points $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. D'une part, soit $\tau_x : (x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$ la symétrie orthogonale par rapport au plan Oyz et définissons de même τ_y et τ_z . On voit aussitôt que τ_x, τ_y et τ_z commutent entre elles et engendrent un sous-groupe V de $\text{Is}(\mathbb{R}^3)$ de cardinal 8, isomorphe à $\{\pm 1\}^3$. Dans la suite, on identifie le groupe « abstrait » $\{\pm 1\}^3$ à V .

D'autre part, S_3 agit de façon isométrique sur \mathbb{R}^3 par permutation des coordonnées, i.e. pour tout $\sigma \in S_3$ on pose

$$f_\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}).$$

De façon plus concrète, S_3 est engendré par les transpositions et (12) (resp. (23), resp. (13)) correspond à la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x_1 = x_2$ (resp. $x_2 = x_3$, resp. $x_1 = x_3$). Alors le 3-cycle $c = (123)$, égal au produit (12)(23), correspond à la composée :

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3, x_2) \mapsto (x_3, x_1, x_2)$$

qui est la rotation R d'axe orienté par le vecteur \vec{Op} , où $p = (1, 1, 1)$, et d'angle $2\pi/3$. Enfin, c^{-1} correspond à la rotation inverse $R^{-1} = R^2$. On obtient ainsi un sous-groupe Σ_3 de $\text{Is}(\mathbb{R}^3)$, isomorphe à S_3 . On note A_3 le sous-groupe $\{\text{id}_e, R, R^{-1}\}$ (on l'utilisera pour construire le dodécaèdre régulier).

Remarquons que S_3 agit aussi sur $V = \{\pm 1\}^3$ par permutation des facteurs, et que cette action respecte la structure de groupe de V , i.e. pour tout $\sigma \in S_3$ et $x, y \in V$, on a $\sigma(x)\sigma(y) = \sigma(xy)$.

Notons alors W le sous-groupe de $\text{Is}(\mathbb{R}^3)$ engendré par V et Σ_3 . Pour tout $v = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in V$ et $\sigma \in S_3$, on a pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} (f_\sigma \circ v)(x) &= f_\sigma(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \varepsilon_3 x_3) \\ &= (\varepsilon_{\sigma^{-1}(1)} x_{\sigma^{-1}(1)}, \varepsilon_{\sigma^{-1}(2)} x_{\sigma^{-1}(2)}, \varepsilon_{\sigma^{-1}(3)} x_{\sigma^{-1}(3)}) \\ &= (\varepsilon_{\sigma^{-1}(1)}, \varepsilon_{\sigma^{-1}(2)}, \varepsilon_{\sigma^{-1}(3)})(f_\sigma(x)) = (\sigma(v) \circ f_\sigma)(x) \end{aligned}$$

d'où $\boxed{f_\sigma \circ v = \sigma(v) \circ f_\sigma \quad (\star)}$ et donc $f_\sigma \circ v \circ f_\sigma^{-1} = \sigma(v)$.

Il en résulte que V est un sous-groupe distingué de W et que l'application $\Sigma_3 \times V \rightarrow W$, $(f_\sigma, v) \mapsto f_\sigma \circ v$ est *surjective*, car on déduit de (\star) par récurrence sur N que tout produit $g_1 \cdots g_N$ avec chaque g_i dans V ou dans Σ_3 s'écrit sous la forme $f_\sigma \circ v$. De plus, on voit facilement que $V \cap \Sigma_3 = \{\text{id}\}$ et il en résulte que l'application précédente est *injective*. C'est donc une bijection, et donc W est le produit semi-direct de V par Σ_3 . (Il est de plus isomorphe au groupe « abstrait » $\{\pm 1\}^3 \rtimes S_3$.) Il est de cardinal 48.

Montrons que l'action de W sur les drapeaux est transitive. Comme il y a 6 faces et que chacune a 4 arêtes, le nombre de drapeaux est $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48 = |W|$, donc pour montrer que l'action est transitive il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit alors $g = f_\sigma \circ v$ un élément de W fixant le drapeau (p, A, F) , où F est la face donnée par $z = 1$, A l'arête donnée par $z = 1 = y$ et p le sommet $(1, 1, 1)$. Comme $g(p) = p$ on a nécessairement $v = (1, 1, 1)$ d'où $g = f_\sigma$ pour un certain $\sigma \in S_3$, et comme $f_\sigma(F) = F$ alors σ ne peut être que l'identité ou la transposition (12) , et comme le second sommet $(0, 1, 1)$ de A est laissé fixe, alors $\sigma = \text{id}$. Ceci prouve que l'action de W sur les drapeaux de C est libre et donc transitive. Donc C est bien un polyèdre régulier au sens de la définition 19.6.

De plus, d'après le lemme 19.7 et la proposition 19.8, on sait que $\text{Is}(C)$ est de cardinal $2 \cdot 24 = 48$, et comme il contient W on en déduit que $\text{Is}(C) = W$. On laisse au lecteur le soin de décrire explicitement l'isométrie correspondant à chaque élément de W .

L'octaèdre régulier 19.16. — Notons \mathcal{O} l'octaèdre dont les 6 sommets q_1, \dots, q_6 sont les centres des six faces du cube C , i.e. ce sont les points $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ et $(0, 0, \pm 1)$. Alors $q_i q_j$ est une arête ssi les faces correspondantes F_i et F_j du cube sont voisines ; on dira alors que l'arête $q_i q_j$ de \mathcal{O} est « duale » de l'arête commune aux faces F_i et F_j de C . Par exemple, si $q_1 = (0, 0, 1)$ est le centre de la face supérieure du cube, les quatre sommets voisins sont les centres des faces latérales du cube : $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$ et $(0, -1, 0)$.

Les 8 faces de \mathcal{O} sont des triangles ; plus précisément trois sommets q_i, q_j, q_k de \mathcal{O} forment une face \mathcal{F} ssi les faces correspondantes F_i, F_j, F_k ont en commun un sommet p ; on dira alors que la face \mathcal{F} de \mathcal{O} est « duale » du sommet p de C .

On voit alors que $\text{Is}(C) = W$ agit transitivement sur les drapeaux de \mathcal{O} (car chaque drapeau de \mathcal{O} est « dual » d'un unique drapeau de C), et donc \mathcal{O} est bien un polyèdre régulier au sens de la définition 19.6. De plus, d'après le lemme 19.7 et la proposition 19.8, on sait que $\text{Is}(\mathcal{O})$ est de cardinal $2 \cdot 24 = 48$, et comme il contient W on en déduit que $\text{Is}(\mathcal{O}) = W$. On laisse au lecteur le soin de décrire explicitement l'isométrie correspondant à chaque élément de W .

Pour finir, signalons que le cube est également le « dual » de l'octaèdre, i.e. étant donné un octaèdre régulier, les centres de ses huit faces forment les sommets d'un cube.

Avant de décrire le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers, commençons par le :

Lemme 19.17. — On a : $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos(\pi/5) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Démonstration. — Posons $\xi = \exp(2i\pi/5)$ et $z = 2 \cos(2\pi/5) = \xi + \bar{\xi} = \xi + \xi^4$. Alors

$$z^2 = \xi^2 + \xi^8 + 2 = \xi^2 + \xi^3 + 2.$$

Or ξ est racine du polynôme $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, puisque $X^5 - 1 = (X - 1)P$. Par conséquent,

$$z^2 = 1 - \xi - \xi^2 = 1 - z$$

donc z est racine du polynôme $X^2 + X - 1$, dont les racines sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Comme $\cos(2\pi/5)$ est > 0 , on en déduit que $z = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, d'où $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Et comme $\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$, on obtient que $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} + 3}{8}$. Or

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}(6 + 2\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5} + 3}{8}$$

et comme $\cos(\pi/5)$ est > 0 on en déduit qu'il vaut $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$. □

Le dodécaèdre régulier 19.18. — Posons $\xi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. On a $\xi^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \xi + 1$ et $\xi^{-1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \xi - 1$.

On peut construire le dodécaèdre à partir du cube C en ajoutant à chaque face un « toit », de la façon suivante. Soit $A_3 = \{\text{id}_{\mathcal{G}}, R, R^{-1}\}$ le sous-groupe cyclique de Σ_3 formé des rotations et soit H le sous-groupe $V \rtimes A_3$ de $\text{Is}(C) = V \rtimes \Sigma_3$. Alors H est de cardinal 24 et ses éléments se répartissent comme suit. Les 12 éléments de $H^+ = H \cap \text{Is}^+(C)$ sont :

- (1) $\text{id}_{\mathcal{G}}$
- (2) Les 8 rotations dont l'axe passe par une paire de sommets opposés de C et d'angle $\pm 2\pi/3$.
- (3) Les 3 demi-tours dont l'axe passe par le centre de deux faces opposés, i.e. les demi-tours qui changent (x, y, z) en $(-x, -y, z)$, resp. $(x, -y, -z)$, resp. $(-x, y, -z)$.

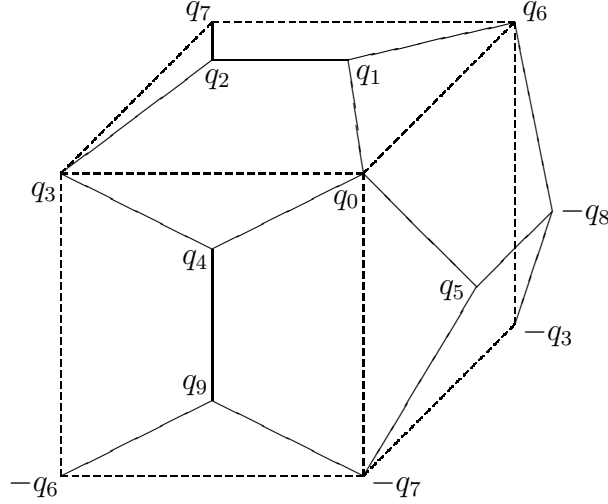
Et les 12 éléments de $H^- = H \cap \text{Is}^-(C)$ sont :

- (4) $-\text{id}_{\mathcal{G}}$
- (5) Les 8 rotations gauches dont l'axe passe par une paire de sommets opposés de C et d'angle $\pm 2\pi/3$.
- (6) Les 3 symétries orthogonales τ_x, τ_y, τ_z qui changent de signe une coordonnée, i.e. qui envoient (x, y, z) sur $(-x, y, z)$, resp. $(x, -y, z)$, resp. $(x, y, -z)$.

Au-dessus de la face supérieure ($z = 1$) du cube, plaçons le point $q_1 = (0, \xi^{-1}, \xi)$ et son image $q_2 = (0, -\xi^{-1}, \xi)$ par τ_y . Leurs images par la rotation R (resp. R^{-1}) sont les points suivants, qui sont « devant » la face $x = 1$ (resp. « à droite » de la face $y = 1$) :

$$\begin{aligned} q_4 = R(q_1) &= (\xi, 0, \xi^{-1}), & q_9 = R(q_2) &= (\xi, 0, -\xi^{-1}), \\ q_5 = R^{-1}(q_1) &= (\xi^{-1}, \xi, 0), & -q_8 = R^{-1}(q_2) &= (-\xi^{-1}, \xi, 0). \end{aligned}$$

Cette numérotation est expliquée, en posant $q_0 = (1, 1, 1)$, $q_3 = (1, -1, 1)$, $q_6 = (-1, 1, 1)$ et $q_7 = (-1, -1, 1)$, par la figure ci-dessous :



Notons \mathcal{D} l'enveloppe convexe des 20 points $\pm q_i$, pour $i = 0, \dots, 9$. Par construction, ces 20 points forment deux orbites sous l'action de H : les 8 sommets du cube et les 12 nouveaux points, donc $H \subset \text{Is}(\mathcal{D})$.

Le centre de gravité des points q_0, \dots, q_4 est

$$\frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{5} + 5}{2}, 0, \frac{3\sqrt{5} + 5}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\xi, 0, \xi^2).$$

Notons u le vecteur $(\xi, 0, \xi^2)$. On vérifie que les produits scalaires $\overrightarrow{Oq_i} \cdot u$ valent tous $\xi^2 + \xi = 2 + \sqrt{5}$ pour $i = 0, \dots, 4$, et tous 1 pour $i = 5, \dots, 9$. On a donc aussi $-\overrightarrow{Oq_i} \cdot u = -1$ pour $i = 5, \dots, 9$ et $-\overrightarrow{Oq_i} \cdot u = -2 - \sqrt{5}$ pour $i = 0, \dots, 4$.

Posant $H = (\mathbb{R}u)^\perp$, ceci montre que \mathcal{D} est contenu dans l'un des demi-espaces fermés définis par le plan $\mathcal{H}_{\xi+\xi^2} = q_0 + H$, et que $\mathcal{H}_{\xi+\xi^2} \cap \mathcal{D}$ est le pentagone Γ formé par les points q_0, \dots, q_4 . Montrons que ce pentagone est régulier, de même que le pentagone Γ' formé par les points q_5, \dots, q_9 dans le plan $\mathcal{H}_1 = q_5 + H$. Remarquons que ces deux pentagones sont invariants par la symétrie τ_y .

La longueur q_2q_1 vaut $2\xi^{-1} = \sqrt{5} - 1$, son carré est $6 - 2\sqrt{5}$. On vérifie que c'est aussi le carré des longueurs $q_1q_0 = q_2q_3$ et $q_0q_4 = q_3q_4$ (les égalités se déduisant par la symétrie τ_y). Donc toutes les arêtes de Γ sont de longueur $2\xi^{-1}$.

Tenant compte de la symétrie τ_y , il suffit de vérifier que les angles de Γ en q_1, q_0 et q_4 sont les mêmes (et donc égaux à $3\pi/5$). Or on vérifie que les produits scalaires

$$\overrightarrow{q_2q_1} \cdot \overrightarrow{q_1q_0}, \quad \overrightarrow{q_1q_0} \cdot \overrightarrow{q_0q_4} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{q_0q_4} \cdot \overrightarrow{q_4q_3}$$

valent tous les trois $2\xi^{-1}(1 - \xi^{-1})$. Comme ceci est égal à $(2\xi^{-1})^2 \cos(\theta)$, où θ désigne l'angle « extérieur » en chacun de ces sommets, on en déduit que

$$\cos(\theta) = \frac{\xi}{2}(1 - \xi^{-1}) = \frac{\xi - 1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

d'où $\theta = 2\pi/5$ et donc chaque angle intérieur est bien $3\pi/5$, comme il se doit. Ceci montre que Γ est un pentagone régulier.

On voit aussi que la longueur p_7p_6 vaut 2, et l'on vérifie qu'il en est de même pour p_6p_5 et p_5p_9 . Tenant compte de la symétrie τ_y , on a ainsi obtenu que toutes les arêtes de Γ' sont de longueur 2, et il reste à vérifier que les angles de Γ' en q_6, q_5 et q_9 sont tous égaux à $3\pi/5$. Or on vérifie que les produits scalaires

$$\overrightarrow{q_7q_6} \cdot \overrightarrow{q_6q_5}, \quad \overrightarrow{q_6q_5} \cdot \overrightarrow{q_5q_9} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{q_5q_9} \cdot \overrightarrow{q_9q_8}$$

valent tous les trois $2\xi^{-1}$. Comme ceci est égal à $4 \cos(\theta)$, où θ désigne l'angle « extérieur » en chacun de ces sommets, on en déduit que $\cos(\theta) = \xi^{-1}/2 = (\sqrt{5}-1)/4$, d'où $\theta = 2\pi/5$ et donc chaque angle intérieur vaut bien $3\pi/5$. Ceci montre que Γ' est un pentagone régulier.

De plus, le centre de gravité de Γ' est :

$$\frac{1}{5} \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{2}, 0, \frac{5-\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{5}} (3-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}-1)$$

et l'on voit que les vecteurs u et $(3-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}-1)$ sont liés, car le déterminant ci-dessous est nul :

$$\begin{vmatrix} 1+\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} & \sqrt{5}-1 \end{vmatrix} = (5-1) - (9-5) = 0.$$

On obtient ainsi que Γ et Γ' sont deux pentagones réguliers contenus respectivement dans les plans $\mathcal{H}_{\xi+\xi^2}$ et \mathcal{H}_1 orthogonaux à la droite $\mathbb{R}u$, et dont les centres sont situés sur cette droite. Il en résulte que la rotation \mathbf{R} d'axe orienté par u et d'angle $2\pi/5$ permute cycliquement les points p_0, \dots, p_4 d'une part, et p_5, \dots, p_9 d'autre part, ainsi bien entendu que leurs opposés. Donc \mathbf{R} appartient à $\text{Is}(\mathcal{D})$.

Montrons alors que $\text{Is}(\mathcal{D})$ agit transitivement sur les drapeaux de \mathcal{D} . Considérons le drapeau (q_0, q_0q_1, Γ) de \mathcal{D} et un drapeau arbitraire (p, A, F') . Par construction, le groupe H agit transitivement sur les faces de \mathcal{D} , donc en appliquant à F' un élément de H on se ramène au cas où $F' = F$. Orientons les arêtes de Γ dans le sens $q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_2$ etc. Alors, quitte à appliquer la symétrie orthogonale τ_y (qui préserve Γ mais renverse l'orientation de ses arêtes), on peut supposer que p est l'origine de l'arête orientée A . Alors, la rotation \mathbf{R}^k qui applique p sur q_0 applique A sur q_0q_1 . Ceci prouve que \mathcal{D} est un polyèdre régulier au sens de la définition 19.6.

Alors, d'après la proposition 19.8, $\text{Is}^+(\mathcal{D})$ est de cardinal 60. De plus, comme $-\text{id}_{\mathcal{E}}$ appartient à $\text{Is}^-(\mathcal{D})$ et que l'application $g \mapsto -\text{id}_{\mathcal{E}} \circ g$ est une bijection de $\text{Is}^+(\mathcal{D})$ sur $\text{Is}^-(\mathcal{D})$, on en déduit que $\text{Is}(\mathcal{D})$ est le produit direct de $\text{Is}^+(\mathcal{D})$ et du groupe à deux éléments $\{\pm \text{id}_{\mathcal{E}}\}$.

Reste à déterminer la structure de $\text{Is}^+(\mathcal{D})$. Remarquons que \mathcal{D} contient cinq cubes, qui sont les transformés du cube initial C par $\text{Is}(\mathcal{D})$: pour chacun de ces cubes, les 12 arêtes joignent dans chaque face de \mathcal{D} deux sommets non adjacents et, réciproquement, chaque telle « arête » est contenue dans un unique cube. Par exemple, revenant à la figure précédente, « l'arête » q_0q_{-8} appartient au cube C' de sommets $\pm q_0, \pm q_8, \pm q_9, \pm q_2$.

L'action de $\text{Is}(\mathcal{D})$ sur ces cinq cubes définit un morphisme de groupes $\phi : \text{Is}(\mathcal{D}) \rightarrow S_5$, dont le noyau contient $-\text{id}_{\mathcal{E}}$ (qui préserve chaque cube). Réciproquement, si h appartient à $\text{Ker}(\phi)$ alors il préserve les deux cubes C et C' , dont les seuls sommets communs sont $\pm q_0$, donc h laisse stable la paire de sommets opposés $(q_0, -q_0)$, et il en est de même pour toute autre paire de sommets opposés. Quitte à composer h avec $-\text{id}_{\mathcal{E}}$, on peut supposer que $h(q_0) = q_0$ et alors ses trois voisins doivent rester voisins de q_0 , donc sont tous les trois fixés par h , qui fixe donc un repère affine de \mathcal{E} , d'où $h = \text{id}_{\mathcal{E}}$. Ceci montre que $\text{Ker}(\phi) = \{\pm \text{id}_{\mathcal{E}}\}$ et donc ϕ induit un *isomorphisme* de $\text{Is}^+(\mathcal{E})$ sur un sous-groupe K de S_5 , de cardinal 60. D'après le lemme ci-dessous, K est un sous-groupe *distingué* de S_5 .

Lemme 19.19. — Soient G un groupe fini et K un sous-groupe de G d'indice 2, i.e. tel que $|G| = 2|K|$. Alors :

- (i) K est un sous-groupe distingué.
- (ii) Le groupe quotient G/K est de cardinal 2 et donc pour tout $hh' \in G - K$ le produit hh' est dans K .

Démonstration. — Fixons un élément g de $G - K$. Alors G est la réunion disjointe de K et gK d'une part, et de K et Kg d'autre part. Comme $gK \cap K = \emptyset$, on a nécessairement $gK \subset Kg$, d'où l'égalité puisque ces deux ensembles ont même cardinal $|K|$. Il en résulte que $gK = Kg$, d'où $gKg^{-1} = K$. De plus, tout élément h de $G - K$ est de la forme gk avec $k \in K$ et comme $kKk^{-1} = K$ pour tout $k \in K$, on a donc

$$hKh^{-1} = g(kKk^{-1})g^{-1} = gKg^{-1} = K.$$

Ceci prouve que K est distingué dans G . On peut donc former le groupe quotient G/K , et il a deux éléments : la classe \bar{e} de l'élément neutre e et celle \bar{g} de g . On a alors $\bar{g}^2 = \bar{e}$ et donc si h, h' appartiennent à $G - K$, ils ont tous deux pour image \bar{g} et donc leur produit hh' a pour image \bar{e} , i.e. hh' est dans K . \square

Comme S_5 est engendré par les transpositions (ij) et que celles-ci sont toutes conjuguées, aucune n'est contenue dans le sous-groupe distingué K . Donc, d'après le lemme précédent, K contient tous les produits de deux transpositions. Or ces produits engendrent le groupe alterné A_5 . (Pour tout $n \geq 3$, A_n est le sous-groupe de S_n formé de tous les produits d'un nombre *pair* de transpositions.) Ceci prouve que $K = A_5$. En conclusion, on a obtenu que :

$$\boxed{\text{Is}(\mathcal{D}) \simeq A_5 \times \{\pm 1\}}.$$

Noter que $\text{Is}(\mathcal{D})$ n'est **pas** isomorphe à S_5 car $-\text{id}_{\mathcal{D}}$ est un élément *central* (i.e. qui commute à tous les autres) de $\text{Is}(\mathcal{D})$, tandis que le centre de S_5 est réduit à l'élément neutre.

L'icosaèdre régulier 19.20. — L'icosaèdre est « dual » du dodécaèdre, i.e. on peut le définir comme l'enveloppe convexe \mathcal{I} des 12 points p_1, \dots, p_{12} qui sont les centres des faces du dodécaèdre \mathcal{D} . Alors $p_i p_j$ est une arête de \mathcal{I} ssi les faces F_i et F_j de \mathcal{D} ont en commun une arête A ; on dira alors que l'arête $p_i p_j$ de \mathcal{I} est « duale » de l'arête A de \mathcal{D} . Les 20 faces de \mathcal{I} sont des triangles; plus précisément trois sommets p_i, p_j, p_k de \mathcal{I} en forment une face \mathcal{F} ssi les faces correspondantes F_i, F_j, F_k de \mathcal{D} ont en commun un sommet q ; on dira alors que la face \mathcal{F} de \mathcal{I} est « duale » du sommet q de \mathcal{D} .

On voit alors que $\text{Is}(\mathcal{D})$ agit transitivement sur les drapeaux de \mathcal{I} (car chaque drapeau de \mathcal{I} est « dual » d'un unique drapeau de \mathcal{D}), et donc \mathcal{I} est bien un polyèdre régulier au sens de la définition 19.6. De plus, d'après le lemme 19.7 et la proposition 19.8, on sait que $\text{Is}(\mathcal{I})$ est de cardinal $2 \cdot 60 = 120$, et comme il contient $\text{Is}(\mathcal{D})$ on en déduit que $\text{Is}(\mathcal{I}) = \text{Is}(\mathcal{D})$. On laisse au lecteur le soin de décrire explicitement l'isométrie correspondant à chaque élément de $\text{Is}(\mathcal{D})$.

Réciproquement, le dodécaèdre est aussi le « dual » de l'icosaèdre, i.e. étant donné un icosaèdre régulier, les centres de ses 20 faces forment les sommets d'un dodécaèdre régulier.

Enfin, partant d'un cube C , nous avons construit un dodécaèdre \mathcal{D} contenant C et dont les faces « correspondent » aux arêtes de C . De façon duale, partant d'un octaèdre régulier \mathcal{O} (le dual du cube), on peut y inscrire un icosaèdre régulier \mathcal{I} en plaçant de façon appropriée les 12 sommets de \mathcal{I} sur les arêtes de \mathcal{O} , cf. [Be, 12.5.5.3].