Semaine 2 : Coordonnées barycentriques, plongement vectoriel canonique, théorèmes de Ménélaüs et de Céva

Références pour ce chapitre : (a) Pour les barycentres et coordonnées barycentriques :

[Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013 (§I.2), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand

[Du] Antoine Ducros, Géométrie affine et euclidienne, Cours de L3 à l'UPMC 2009-2012 (section 3), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~antoine.ducros

[It] Ilia Itenberg, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2013-2014 (§1.5), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~ilia.itenberg

[LF] Jaqueline Lelong-Ferrand, Les fondements de la géométrie (P.U.F., 1985), §III.4.

[Po] Patrick Polo, Algèbre et géométrie, Cours de L2 à l'UPMC 2009-2013 (chap. 7), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/L2

(b) Pour le plongement vectoriel canonique : [Be, p.9], [It, pp.21-22], [LF, §III.6]. Pour les théorèmes de Ménélaüs et Céva : [Be, §I.2.3] et [LF, §IV.9].

4. Barycentres et coordonnées barycentriques

On fixe un k-espace vectoriel E et un espace affine $\mathscr{E}$ de direction E.

Définition et proposition 4.1. — *Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$.*

(1) *On suppose $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Alors il existe un unique point $G \in \mathscr{E}$ tel que,* **pour tout** *$O \in \mathscr{E}$, on ait* $\boxed{\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.}$ [(1)] *Ce point G est appelé «* barycentre des points pondérés *(A_i, λ_i) » et on écrira : $G = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n$.*

(1′) *Plus généralement, si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$, il existe un unique point $G \in \mathscr{E}$ tel que,* **pour tout** *$O \in \mathscr{E}$, on ait $(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$.*

(2) *Au contraire, si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$ alors le vecteur $\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ est* **indépendant** *du choix de O. On pourra écrira que $\overrightarrow{u} = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n$.*

Démonstration. — (1) Fixons un point $O \in \mathscr{E}$ et définissons G par l'égalité $\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$. Alors, pour tout point O' on a, d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{O'A_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}) = \underbrace{(\sum_{i=1}^n \lambda_i)}_{=1}\overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{O'G}.$$

Ceci montre que $\overrightarrow{O'G} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{O'A_i}$ pour **tout** $O' \in \mathscr{E}$, et G est bien sûr unique, car cette égalité pour **un** O' fixé suffit à déterminer G. [(2)]

(1′) Posons $\Sigma = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Alors on voit que (1′) se ramène au cas (1) en remplaçant chaque λ_i par $\lambda_i' = \lambda_i/\Sigma$, donc $G = \lambda_1' A_1 + \cdots + \lambda_n' A_n = \sum_{i=1}^n \dfrac{\lambda_i}{\Sigma} A_i$ et l'on peut écrire, par abus de notation, que $G = \dfrac{1}{\Sigma}(\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n)$.

(1) Plus précisément, la démonstration montre que si on fixe O arbitraire et qu'on *définit* G par l'égalité précédente, alors on a $\overrightarrow{O'G} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{O'A_i}$ pour tout point O'.

(2) Par exemple, on peut dire que G est l'unique point tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.

(2) Fixons un point $O \in \mathscr{E}$ et posons $\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$. Alors, pour tout point O' on a, d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{O'A_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}) = (\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i}_{=0}) \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{u}.$$

Ceci montre que $\overrightarrow{u}$ est indépendant du choix de O. □

Remarque 4.2. — Si k est un corps *de caractéristique nulle*, par exemple si $k = \mathbb{R}$, alors on peut prendre $\lambda_i = 1/n$ pour $i = 1, \ldots, n$. Dans ce cas, G s'appelle *l'isobarycentre* ou *centre de gravité* des points $A_1, \ldots, A_n$.

Par exemple, soient A, B, C trois points non alignés du plan affine **réel** et soit G leur isobarycentre, i.e. le centre de gravité du triangle ABC ; on a donc :

$$(*) \qquad 0 = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

D'autre part, notons A' le milieu du segment $[B, C]$ et définissons de même B' et C'. Alors A' est l'isobarycentre de B et C donc pour tout point P on a $2\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$. Appliquant ceci à $P = G$, on déduit de $(*)$ que :

$$-\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}.$$

Ceci montre que le point G appartient au segment $[AA']$ et que le vecteur $\overrightarrow{GA}$ est deux fois plus long (et de sens contraire) que le vecteur $\overrightarrow{GA'}$. On a le même résultat pour $[BB']$ et $[CC']$. Ceci montre que les médianes du triangle, i.e. les droites (AA'), (BB') et (CC'), sont concourantes et que G est situé sur chaque segment $[AA']$, etc. aux deux-tiers de la longueur, en partant du sommet.

Remarque 4.3. — Dans la remarque précédente, l'hypothèse que la caractéristique de k soit nulle (en tout cas, distincte de 2 et 3) est essentielle. En effet, si $\mathrm{car}(k) = 2$, le milieu d'un segment $[A, B]$ n'existe pas si $A \neq B$: il n'existe aucun point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$ car comme $1 + 1 = 0$, le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ est indépendant du point M et égal à $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$.

Si $\mathrm{car}(k) = 3$, les milieux A', B', C' existent, mais on peut montrer que les médianes (AA'), (BB') et (CC') ne sont pas concourantes ; en fait elles sont parallèles ! (cf. [Du, 3.8]). En effet, on peut prendre le point A comme origine et les vecteurs $e_1 = \overrightarrow{AB}$ et $e_2 = \overrightarrow{AC}$ comme base de E (supposé de dimension 2), de sorte que B et C ont pour coordonnées $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Alors C' a pour coordonnées $(1/2, 0)$ et ceci égale $(2, 0)$ puisque $2^2 \equiv 1$ mod. 3. De même, B' et A' ont pour coordonnées $(0, 2)$ et $(2, 2)$. Tenant compte de l'égalité $-1 \equiv 2$ mod. 3, on a donc :

$$\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Définition et proposition 4.4. — *Soient E un k-espace vectoriel, $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E, $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{E}$. On note F le sev de E engendré par les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$.*

a) *L'ensemble $\mathscr{F}$ de tous les barycentres $M = \lambda_0 A_0 + \cdots + \lambda_n A_n$, où $\lambda_i \in k$ et $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ est le sous-espace affine $A_0 + F$ de $\mathscr{E}$. Il contient tous les A_i (donc $\mathscr{F} = A_i + F$ pour tout i).*

b) *C'est* le plus petit *sous-espace affine de $\mathscr{E}$ contenant les A_i ; on le notera* $\mathrm{Aff}\langle A_0, \ldots, A_n \rangle$ *et l'on dira que c'est le sous-espace affine* engendré *par les A_i*

Démonstration. — (a) Si $M = \lambda_0 A_0 + \cdots + \lambda_n A_n$ et $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, alors $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_0A_i}$ appartient à F, donc $M \in A_0 + F$. Réciproquement, si $M \in A_0 + F$ alors $\overrightarrow{A_0M} \in F$ donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ tels que $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$ et, par définition du barycentre, ceci équivaut à l'égalité $M = \lambda_0 A_0 + \cdots + \lambda_n A_n$, où l'on a posé $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Ceci prouve que $\mathscr{F} = A_0 + F$. C'est donc un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, et il contient chaque A_i puisque $\overrightarrow{A_0A_i} \in F$.

(b) Soit $\mathscr{F}'$ un sea contenant tous les A_i, alors $\mathscr{F}' = A_0 + F'$ pour un certain sev F' de E. Comme $A_i \in \mathscr{F}'$ alors F' contient chaque $\overrightarrow{A_0A_i}$ donc contient F, et donc $\mathscr{F}'$ contient $\mathscr{F}$. Ceci montre que $\mathscr{F}$ est le plus petit sea contenant les A_i. $\square$

Remarque 4.5. — Dans la proposition, on a fait jouer un rôle particulier à A_0 pour définir le sev $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_j} \mid j = 0, \ldots, n)$, mais si l'on fixe $i \neq 0$, on a $\overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{A_0A_j} - \overrightarrow{A_0A_i}$ pour tout j, donc $F_i = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_iA_j} \mid j = 0, \ldots, n)$ est contenu dans F et par symétrie on a aussi $F \subset F_i$, d'où $F_i = F$.

Rappel 4.6. — Si $(\mathscr{F}, F)$ est un espace affine et si F est de dimension finie d, on dit que $\mathscr{F}$ est de dimension d.

***Définition 4.7* (Points affinement indépendants ou liés)**

Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que $(p+1)$ points $A_0, \ldots, A_p \in \mathscr{E}$ sont **affinement indépendants** si $\mathrm{Aff}\langle A_0, \ldots, A_p\rangle$ est de dimension p, c.-à-d., si le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_j} \mid j = 1, \ldots, p)$ est de dimension p. Dans le cas contraire, on dit que $A_0, \ldots, A_p \in \mathscr{E}$ sont **affinement liés**.

Si $p = 2$, les trois points A_0, A_1, A_2 sont affinement liés $\Longleftrightarrow$ ils sont alignés. Donc A_0, A_1, A_2 sont affinement indépendants $\Longleftrightarrow$ ils sont **non alignés**.

On dit que des points $A_0, \ldots, A_p \in \mathscr{E}$ sont **coplanaires** s'ils sont contenus dans un sea $\mathscr{P}$ de dimension 2 (un plan affine), i.e. si $\dim \mathrm{Aff}\langle A_0, \ldots, A_p\rangle \leq 2$. Donc quatre points $A_0, \ldots, A_3$ sont affinement indépendants $\Longleftrightarrow$ ils sont **non coplanaires**.

***Définition et proposition 4.8* (Repères et coordonnées barycentriques)**

Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine de dimension finie n.

a) *Un* **repère** $\mathscr{R}$ *de* $\mathscr{E}$ *est la donnée d'un $(n+1)$-uplet $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ de points* affinement indépendants.

b) *Dans ce cas, pour tout $M \in \mathscr{E}$ il existe un* unique *$(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in k^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ et $M = \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$. On dit que $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ sont les* coordonnées barycentriques *de M dans le repère $\mathscr{R}$.*

c) *Si l'on privilégie l'un des points, disons A_0, alors les n vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ forment une base $\mathscr{B}$ de E et l'écriture (unique!) de $\overrightarrow{A_0M}$ dans cette base est $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$.*

Démonstration. — Dans (b), *l'existence* résulte de la Prop. 4.4 : comme $\mathrm{Aff}\langle A_0, \ldots, A_n\rangle = \mathscr{E}$ alors tout point M de $\mathscr{E}$ s'écrit comme barycentre des A_i. Mais alors, si $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ et $M = \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$, on a

$$(*) \qquad \overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$$

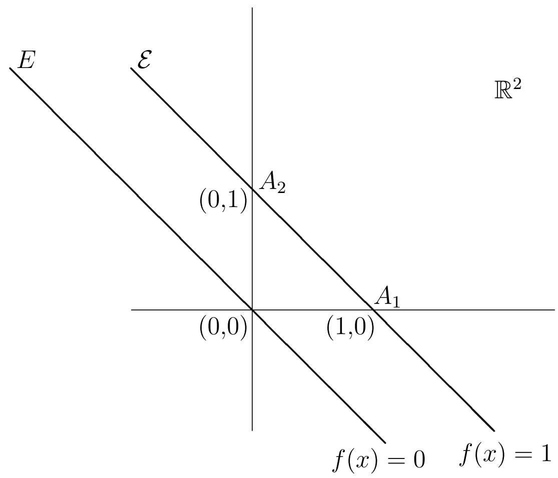
et comme, par hypothèse, les n vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ engendrent E qui est de dimension n, ils forment une base de E et donc l'écriture ci-dessus est unique. Ceci montre que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont uniquement déterminés, et λ_0 l'est aussi puisque $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Ceci prouve (c) ainsi que *l'unicité* dans (b). $\square$

Remarque 4.9. — On peut aussi définir un repère de $\mathscr{E}$ comme un couple $(O, \mathscr{B})$, où O est un point de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Dans ce cas, pour tout point M de $\mathscr{E}$, il existe un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in k^n$ tel que $\overrightarrow{OM} = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et l'on dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les *coordonnées* de M dans le repère $(O, \mathscr{B})$.

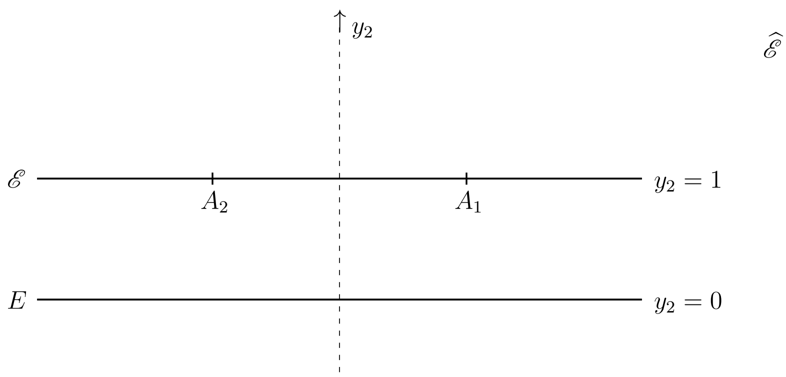
Bien entendu, le lien avec la défintion précédente s'obtient en posant $A_0 = O$ et $A_i = A_0 + e_i$ pour $i = 1, \ldots, n$; alors $A_0, \ldots, A_n$ sont affinement indépendants et les coordonnées barycentriques dans le repère $(A_0, \ldots, A_n)$ sont $(1 - S, x_1, \ldots, x_n)$, où l'on a posé $S = x_1 + \cdots + x_n$.

5. Plongement vectoriel et coordonnées barycentriques

Pour illustrer ce qui suit, considérons l'exemple fondamental suivant. Soit V l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Considérons la forme linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$. Soit $E = \mathrm{Ker}(f) =$ le sev de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_1 + x_2 = 0$ et soit $\mathscr{E}$ la droite affine d'équation $x_1 + x_2 = 1$. Si l'on considère $\mathbb{R}^2$ comme « espace affine », alors $\mathscr{E}$ passe par les « points » $A_1 = e_1 = (1, 0)$ et $A_2 = e_2 = (0, 1)$, i.e. on a :



Donc $\mathscr{E}$ est l'hyperplan (ici, droite) affine de $V = \mathbb{R}^2$ défini par l'équation $f(x) = 1$, et E est l'hyperplan vectoriel $\mathrm{Ker}(f)$. Cet hyperplan n'admet pas de supplémentaire « canonique », mais pour tout $v \in V$ tel que $f(v) \neq 0$, on a $V = E \oplus \mathbb{R}v$. Par exemple, pour tout $u \in \mathscr{E}$, on a $f(u) = 1$ donc $V = E \oplus \mathbb{R}u$. Même en se limitant ainsi à $u \in \mathscr{E}$, il n'y a pas de choix « canonique » : deux choix « évidents » sont de prendre $u = e_1$ ou $u = e_2$. Toutefois, notre espace affine $\mathscr{E}$ (ici de dimension 1) est défini comme l'hyperplan $f(x) = 1$ dans l'espace vectoriel V de dimension $1 + 1 = 2$. On va voir que cette situation est générale, i.e. que tout espace affine $\mathscr{E}$ de dimension n se plonge de façon canonique dans un espace vectoriel $\widehat{\mathscr{E}}$ de dimension $n + 1$, en tant qu'hyperplan affine $\{x \in \widehat{\mathscr{E}} \mid f(x) = 1\}$ pour une certaine forme linéaire f sur $\widehat{\mathscr{E}}$. Remarquons aussi qu'en faisant le changement de coordonnées $y_1 = x_1$ et $y_2 = x_1 + x_2 = f(x)$, le dessin précédent peut aussi se représenter :



On peut maintenant énoncer et démontrer le théorème suivant :

Théorème 5.1. — *Soit* $(\mathscr{E}, E)$ *un espace affine. Il existe un espace vectoriel* $\widehat{\mathscr{E}}$ *et une forme linéaire* ϕ *sur* $\widehat{\mathscr{E}}$, *définis de façon canonique, tels que* $\mathscr{E}$ *s'identifie à l'hyperplan affine* $\{x \in \widehat{\mathscr{E}} \mid \phi(x) = 1\}$ *et* E *à l'hyperplan vectoriel* $\mathrm{Ker}(\phi)$. (*En particulier, si* E *est de dimension finie* n, *alors* $\dim(\widehat{\mathscr{E}}) = n + 1$.)

On va donner deux démonstrations.(3) La première est une variante de celle donnée en cours le 16/9 (pour la version originale, voir [LF, §IV.6])

1ère démonstration. — Commençons par rappeler que pour tout ensemble X, l'ensemble $\mathscr{A}(X, E)$ de toutes les applications $f : X \to E$ est un k-espace vectoriel : pour $f, g : X \to E$ et $\lambda \in k$, l'application $(\lambda f + g)$ est définie par $x \mapsto \lambda f(x) + g(x)$; on vérifie facilement (exercice !) que les axiomes d'espace vectoriel sont vérifiés. Remarquons de plus que E s'identifie au sous-espace vectoriel formé des applications *constantes* de X dans E, i.e. on identifie un élément $u \in E$ avec la fonction constante $X \to E$ de valeur u.

Appliquons ceci à $X = \mathscr{E}$ et notons V le k-espace vectoriel $\mathscr{A}(\mathscr{E}, E)$. Tout point $A \in \mathscr{E}$ définit l'application $f_A : \mathscr{E} \to E$, $M \mapsto \overrightarrow{AM}$. Considérons le sous-espace vectoriel $\widehat{\mathscr{E}}$ de V engendré par ces applications. Remarquons d'abord que $\widehat{\mathscr{E}}$ contient E, identifié aux applications constantes de $\mathscr{E}$ dans E.

En effet, fixons $A_0 \in \mathscr{E}$. Pour tout $u \in E$, notons A_u l'unique point de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{A_0A_u} = u$, alors pour tout $M \in \mathscr{E}$ on a : $f_{A_0}(M) - f_{A_u}(M) = \overrightarrow{A_0M} - \overrightarrow{A_uM} = \overrightarrow{A_0A_u} = u$. Ceci montre $f_{A_0} - f_{A_u}$ est la fonction constante de valeur u, que par abus de notation on désigne encore par u. Ceci montre de plus que E est un *hyperplan* de $\widehat{\mathscr{E}}$, i.e. admet un supplémentaire de dimension 1. En effet, quelques soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$, on a :

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{A_i} - (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i) f_{A_0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_{A_i} - f_{A_0}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_iA_0} \in E.$$

donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{A_i}$ appartient à $k f_{A_0} + E$, ce qui montre que $\widehat{\mathscr{E}} = k f_{A_0} + E$. De plus, cette somme est directe, car $f_{A_0} \notin E$ puisque l'application $f_{A_0} : M \mapsto \overrightarrow{A_0M}$ n'est pas constante. On a donc :

$$(**) \qquad \widehat{\mathscr{E}} = E \oplus k A_0.$$

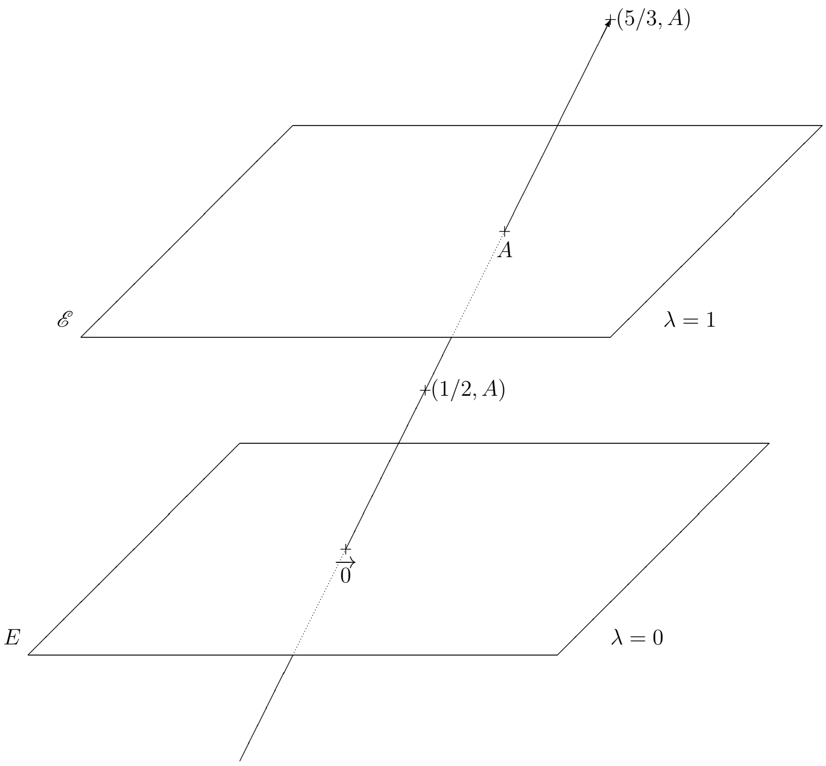
On peut alors définir une forme linéaire ϕ sur $\widehat{\mathscr{E}}$, de noyau E, en posant $\phi(x) = 0$ si $x \in E$ et $\phi(f_{A_0}) = 1$. De plus, comme pour tout $A \in \mathscr{E}$ on a $f_A = f_{A_0} - \overrightarrow{A_0A}$, on voit que l'ensemble $\{f_A \mid A \in \mathscr{E}\}$ s'identifie à l'hyperplan affine $A_0 + \mathrm{Ker}(\phi) = \{w \in \widehat{\mathscr{E}} \mid \phi(w) = 1\}$. Ceci prouve le théorème. (4)

Faisons enfin la remarque générale que si E est un hyperplan d'un espace vectoriel W, défini par une forme linéaire ϕ (i.e. $E = \mathrm{Ker}(\phi)$), alors W est la réunion disjointe de E et de son complémentaire $W_\phi = \{w \in W \mid \phi(w) \neq 0\}$, et que tout $w \in W_\phi$ s'écrit *de façon unique* $w = \lambda x$, avec $\phi(x) = 1$ et $\lambda \in k$. En effet, ces conditions entraînent que $\phi(w) = \lambda$ et donc $x = \phi(w)^{-1} w$. Ceci montre que si l'on pose $\mathscr{H} = \{x \in W \mid \phi(x) = 1\}$ alors, en tant qu'ensemble, W est la réunion de E et des couples (λ, x), où $\lambda \in k^*$ et $x \in \mathscr{H}$.

Ceci permet de voir « géométriquement » $\widehat{\mathscr{E}}$ comme la réunion de E et des droites épointées $k^\times f_A = \{\lambda f_A \mid \lambda \in k^\times\} = \{(\lambda, A) \mid \lambda \in k^\times\}$ pour A parcourant $\mathscr{E}$:

(3)Peu importe la démonstration. Ce qui importe est de savoir que le résultat est vrai, i.e. que tout espace affine peut être considéré comme hyperplan affine d'un espace vectoriel.

(4)De plus, il résulte de l'égalité $(*)$ que $\phi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.



□

2ème démonstration. — On peut définir $\widehat{\mathscr{E}}$, en tant qu'ensemble, comme la réunion de E et des couples (λ, A), pour $\lambda \in k^\times$ et $A \in \mathscr{E}$, et l'on identifie un point $A \in \mathscr{E}$ avec le couple $(1, A)$. La multiplication par un scalaire $\mu \neq 0$ est définie de façon évidente : $\mu \cdot (\lambda, A) = (\mu\lambda, A)$ et si $u \in E$ alors $\mu \cdot u$ est l'élément μu de E. De même, si $u, v \in E$ leur somme est l'élément $u + v$ de E. On pose $(\lambda, A) + u = (\lambda, A + \lambda^{-1}u)$ et :

$$(\lambda, A) + (\mu, B) = \begin{cases} \big(\lambda + \mu, \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu} A + \dfrac{\mu}{\lambda + \mu} B\big) & \text{si } \lambda + \mu \neq 0, \\ \mu \overrightarrow{AB} & \text{si } \lambda = -\mu. \end{cases}$$

On peut alors vérifier directement que les axiomes d'espace vectoriel sont vérifiés, puis que l'application ϕ définie par $\phi(u) = 0$ et $\phi\big((\lambda, A)\big) = \lambda$ est une forme linéaire de noyau E ; alors $\mathscr{E}$ s'identifie à l'hyperplan affine formé des $x \in \widehat{\mathscr{E}}$ tels que $\phi(x) = 1$. Les détails de la vérification sont laissés en exercice. □

Notation 5.2. — Soit A un point de $\mathscr{E}$, on peut aussi le considérer comme un « vecteur » de $\widehat{\mathscr{E}}$. Pour distinguer les deux notions, il est utile d'introduire la notation suivante. Rappelons qu'un espace vectoriel est de façon naturelle un espace affine (cf. 1.4 (a)), donc $\widehat{\mathscr{E}}$ peut être considéré comme un espace affine (contenant $\mathscr{E}$ comme sea) ; on note alors O le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ de $\widehat{\mathscr{E}}$ et pour tout « point » $M \in \widehat{\mathscr{E}}$, on note $\overrightarrow{OM}$ le vecteur correspondant. Avec cette notation, on a la proposition fondamentale suivante :

Proposition 5.3. — *Soient $A_0, A_1, \ldots, A_p$ des points de $\mathscr{E}$. On a l'égalité :*

$$(\star) \qquad \dim \operatorname{Vect}(\overrightarrow{OA_0}, \ldots, \overrightarrow{OA_p}) = 1 + \dim \operatorname{Aff}\langle A_0, \ldots, A_p\rangle,$$

où le terme de gauche désigne le sev de $\widehat{\mathscr{E}}$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$.

Démonstration. — Notons $\mathscr{F} = \operatorname{Aff}\langle A_0, \ldots, A_p\rangle$, sa direction est le sous-espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p})$ de E et par définition on a $\dim(\mathscr{F}) = \dim(F)$.[5]

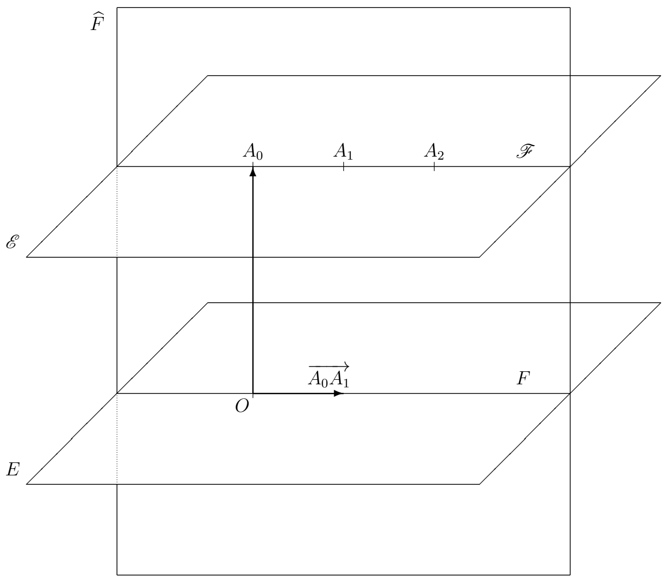
[5] Ceci est $\leq p$ et l'inégalité est stricte si les points A_i sont affinement liés, par exemple si $p = 2$ et si A_0, A_1, A_2 sont alignés.

Posons $\widehat{F} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{OA_0}, \dots, \overrightarrow{OA_p})$. Comme $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_0A_i}$ pour tout $i \geq 1$, on a

$$\widehat{F} = k\overrightarrow{OA_0} + F$$

et comme $F \subset E$ et $\overrightarrow{OA_0} \notin E$ (car $\phi(\overrightarrow{OA_0}) = 1$), on a $\overrightarrow{OA_0} \notin F$, d'où $k\overrightarrow{OA_0} \cap F = \{0\}$ et donc la somme ci-dessus est directe : $\widehat{F} = k\overrightarrow{OA_0} \oplus F$. On a donc $\dim(\widehat{F}) = 1 + \dim(F)$. □

Exemple 5.4. — Illustrons ceci lorsque $(\mathscr{E}, E)$ est un plan affine sur $\mathbb{R}$ et que les points A_0, A_1, A_2 sont distincts et alignés. Alors F est la droite vectorielle $\mathbb{R}\overrightarrow{A_0A_1} \subset E$ et, dans le dessin ci-dessous, $\widehat{F}$ est le plan « vertical » engendré par $\overrightarrow{A_0A_1}$ et $\overrightarrow{OA_0}$:



On déduit de ce qui précède la proposition suivante :

Proposition 5.5. — *Supposons* $\dim(\mathscr{E}) = n$ *et soit* $\mathscr{R} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ *un repère de* $\mathscr{E}$. *Alors :*

a) *Les vecteurs* $\overrightarrow{OA_0}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$ *forment une base* $\widehat{\mathscr{R}}$ *de* $\widehat{\mathscr{E}}$. *Notons* $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ *les coordonnées dans cette base.*

b) *Un « point »* M *de* $\widehat{\mathscr{E}}$ *appartient à* $\mathscr{E}$ *ssi les coordonnées* $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ *de* $\overrightarrow{OM}$ *vérifient* $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$.

c) *De plus, les coordonnées barycentriques d'un point* $M \in \mathscr{E}$ *dans le repère* $\mathscr{R}$ *sont les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *dans la base* $\widehat{\mathscr{R}}$. *On peut donc dire que :* les coordonnées barycentriques dans $\mathscr{E}$ se prolongent en des coordonnées « vectorielles » dans $\widehat{\mathscr{E}}$.

Démonstration. — Le point (a) découle de la Prop. 5.3. D'autre part, si M est un élément de $\widehat{\mathscr{E}}$, l'écriture $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ signifie, avec les notations du théorème 5.1, que $M = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_{A_i}$; comme ϕ est linéaire et vaut 1 sur chaque f_{A_i}, on a donc $\phi(M) = \sum_{i=0}^n \lambda_i$. Le point (b) en découle.

Prouvons (c). Soit $M \in \mathscr{E}$ et soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ ses coordonnées barycentriques dans $\mathscr{R}$. Alors pour tout $P \in \mathscr{E}$, on a $\overrightarrow{PM} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{PA_i}$ et, comme $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, on a donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \Big(\sum_{i=0}^n \lambda_i\Big)\overrightarrow{OP} + \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{PA_i} = \sum_{i=0}^n \lambda_i(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA_i}) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

□

On en déduit le :

Théorème 5.6. — *Soient* $(\mathscr{E}, E)$ *un espace affine de dimension* n *et* $\mathscr{R} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *un repère de* $\mathscr{E}$*. Donnons-nous* $n+1$ *points* $B_0, \ldots, B_n$ *de* $\mathscr{E}$ *et pour* $j = 0, \ldots, n$ *notons* $(\lambda_{0j}, \ldots, \lambda_{nj})$ *les coordonnées barycentriques de* B_j *dans le repère* $\mathscr{R}$*. Alors : les points* $B_0, \ldots, B_n$ *sont affinement liés ssi le déterminant de la matrice* $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j=0,\ldots,n}$ *est nul.*

Démonstration. — Plaçons-nous dans le plongement vectoriel $V = \widehat{\mathscr{E}}$ de $\mathscr{E}$ et notons $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{B_0B_1}, \ldots, \overrightarrow{B_0B_n})$ et $\widehat{F} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{OB_0}, \ldots, \overrightarrow{OB_n})$. On a les équivalences :

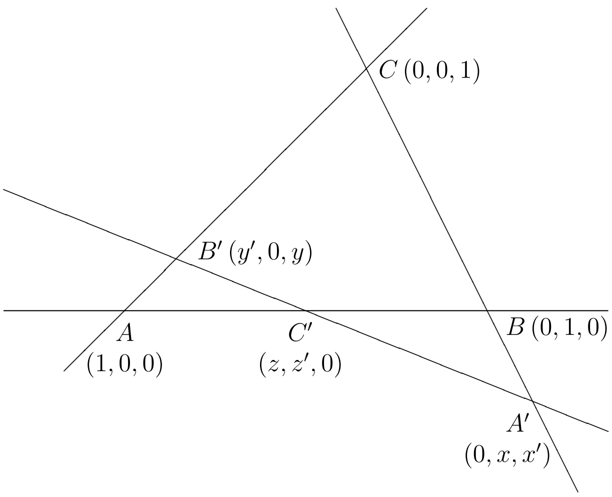
$$\text{les } B_i \text{ sont liés} \iff \dim(F) < n \iff \dim(\widehat{F}) < n+1 \iff \mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OB_0}, \ldots, \overrightarrow{OB_n}),$$

où $\mathscr{B}$ désigne la base $\widehat{\mathscr{R}}$ de V. Or la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OB_0}, \ldots, \overrightarrow{OB_n})$ (qui exprime les $\overrightarrow{OB_j}$ dans la base $\mathscr{B}$) n'est autre que Λ, d'où le résultat. [6] □

6. Théorèmes de Ménélaüs et de Ceva

Dans cette section, on se place dans un *plan affine* $(\mathscr{P}, P)$.

***Théorème 6.1* (de Ménélaüs).** — [7] *Dans le plan* $\mathscr{P}$*, soient* A, B, C *trois points non alignés, qui forment donc un repère, d'où des coordonnées barycentriques. Soit* A' *un point de la droite* (BC)*, ses coordonnées barycentriques sont donc de la forme* $(0, x, x')$*. De même, soient* $B' \in (CA)$*, de coordonnées* $(y', 0, y)$ [8] *et* $C' \in (AB)$ *de coordonnées* $(z, z', 0)$*. Alors : les points* A', B' *et* C' *sont alignés ssi* $xyz + x'y'z' = 0$*.*



Démonstration. — D'après le théorème 5.6, A', B' et C' sont alignés ssi le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & y' & z \\ x & 0 & z' \\ x' & y & 0 \end{vmatrix}$ est nul. Or on voit facilement que ce déterminant vaut $xyz + x'y'z'$. □

***Théorème 6.2* (de Céva).** — [9] *Mêmes hypothèses et notations que dans le théorème de Ménélaüs. Alors les droites* $(AA'), (BB')$ *et* (CC') *sont concourantes ou parallèles ssi* $xyz = x'y'z'$*.*

---

(6) Pour une autre démonstration, n'utilisant pas le plongement vectoriel, voir [Be, Prop. I.2.3].

(7) Mathématicien grec qui vécut autour de l'an 100.

(8) Pour que le résultat final soit « joli », i.e. $xyz + x'y'z' = 0$, on utilise l'ordre « cyclique » $ABCA$.

(9) Giovanni Ceva, mathématicien italien (1647-734). Son nom est souvent francisé en : « Jean (de) Céva », probablement pour le distinguer de son frère Tommaso (jésuite et mathématicien, qui eut pour élève le géomètre (et jésuite aussi) Giovanni Saccheri). Source : www-history.mcs.st-and.ac.uk

Démonstration. — On note $\mathscr{R}$ le repère (A, B, C) et l'on se place dans l'espace vectoriel $V = \widehat{\mathscr{P}}$, muni des coordonnées (λ, μ, ν) dans la base $\widehat{\mathscr{R}}$. La démonstration se fait en quatre étapes. On rappelle que le plan vectoriel associé à $\mathscr{P}$ (i.e. sa direction) est noté P.

(i) Remarquons d'abord que toute droite affine $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$ est l'intersection du plan vectoriel Π qu'elle engendre dans V, et de $\mathscr{P}$. Or Π est défini dans V par l'annulation d'une forme linéaire $f(\lambda, \mu, \nu) = a\lambda + b\mu + c\nu$, laquelle est unique à multiplication par un scalaire non nul près. Donc $\mathscr{D}$ est définie dans $\mathscr{P}$ par « l'équation en les coordonnées barycentriques » $a\lambda + b\mu + c\nu = 0$ (ce qu'on aurait bien sûr pu démontrer directement). De plus, $\Pi \cap P$ est la droite vectorielle D qui est la direction de $\mathscr{D}$ (voir le dessin dans l'exemple 5.4).

(ii) Soient maintenant dans $\mathscr{P}$ trois droites affines distinctes $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$, soient Π_1, Π_2, Π_3 les plans vectoriels associés, et soient $f_i(\lambda, \mu, \nu) = a_i\lambda + b_i\mu + c_i\nu$ une forme linéaire définissant Π_i. Comme $\mathscr{D}_1 \neq \mathscr{D}_2$ alors $\Pi_1 \neq \Pi_2$ donc $\Pi_1 \cap \Pi_2$ est une droite vectorielle Δ, et donc le sous-espace $W = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ est égal soit à Δ (si $\Delta \subset \Pi_3$), soit à $\{0\}$ (si $\Delta \not\subset \Pi_3$). De plus, comme $\Pi_i = \mathrm{Ker}(f_i)$ est l'orthogonal dans V de la droite $kf_i \subset V^*$, alors W est l'orthogonal dans V du sous-espace $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ de V^* et donc on a :

$$(*) \qquad \boxed{W = \Delta \Longleftrightarrow W \neq \{0\} \Longleftrightarrow f_1, f_2, f_3 \text{ sont liées}}$$

(revoir vos cours d'algèbre linéaire de L2 ou L3).

(iii) $W = \Delta$ équivaut à ce que les droites $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$ soient concourantes ou parallèles. Plus précisément, si Δ n'est pas contenue dans P, alors elle coupe $\mathscr{P}$ en un unique point I, qui appartient donc à $\mathscr{P} \cap W = \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 \cap \mathscr{D}_3$, donc les droites sont concourantes. Et réciproquement, si elles sont concourantes en un point I, alors la droite $\Delta = k\overrightarrow{OI}$ appartient à chaque Π_i donc à W.

D'autre part, si $\Delta \subset P$ alors Δ est contenue dans chaque $P \cap \Pi_i$, donc est la direction de chaque $\mathscr{D}_i$, donc $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$ sont parallèles. Réciproquement, si elles le sont et si on note D leur direction commune, alors D est contenue dans chaque $\Pi_i \cap P$ donc dans $W \cap P$, et donc $D = \Delta$.

On a ainsi démontré la proposition suivante :

Proposition 6.3. — *Soient dans $\mathscr{P}$ trois droites affines distinctes $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$, définies respectivement par les équations en les coordonnées barycentriques : $a_i\lambda + b_i\mu + c_i\nu = 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Alors $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$ sont concourantes ou parallèles ssi le déterminant* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ *est nul.*

En effet, la nullité de ce déterminant équivaut au fait que les formes linéaires $f_i(\lambda, \mu, \nu) = a_i\lambda + b_i\mu + c_i\nu$ soient liées.

(iv) Achevons maintenant la démonstration du théorème de Céva. Comme la droite $\mathscr{D}_1 = (AA')$ passe par les points de coordonnées $(1, 0, 0)$ et $(0, x, x')$, on voit que l'équation f_1 du plan Π_1 est $x'\mu - x\nu = 0$. De même, comme la droite $\mathscr{D}_2 = (BB')$ passe par les points de coordonnées $(0, 1, 0)$ et $(y', 0, y)$, on voit que l'équation f_2 de Π_2 est $-y\lambda + y'\nu = 0$. Et comme $\mathscr{D}_3 = (CC')$ passe par les points de coordonnées $(0, 0, 1)$ et $(z, z', 0)$, on voit que l'équation f_3 de Π_3 est $z'\lambda - z\mu = 0$. On obtient donc que $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles ssi le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & y' & -z \\ -x & 0 & z' \\ x' & -y & 0 \end{vmatrix}$ est nul. Or on voit facilement que ce déterminant vaut $x'y'z' - xyz$.

$\square$