Semaine 7 : Dualité projective

Références pour ce chapitre :

[Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013 (§§II.2.3 et III.2), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand

[Co] H. S. M. Coxeter, Projective Geometry (revised reprint of the 2nd edition, Springer-Verlag, 1994), Chap. 1-2.

[It] Ilia Itenberg, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2013-2014 (§§2.8-2.9 et 3.2), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~ilia.itenberg

[LF] Jaqueline Lelong-Ferrand, Les fondements de la géométrie (P.U.F., 1985), §§IV.10 et V.6.

[Po] Patrick Polo, Algèbre et géométrie, Cours de L2 à l'UPMC 2009-2013 (§§1.3, 1.7 et 3.5), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/L2

12. Dualité projective

12.1. Définitions. —

***Rappel 12.1* (Sous-espace projectif engendré).** — Soient $E_1, \ldots, E_r$ des sev de V. Rappelons (cf. 8.5 et 8.7) que :

(i) $\mathbb{P}(E_1) \cap \cdots \cap \mathbb{P}(E_r) = \mathbb{P}(E_1 \cap \cdots E_r)$.
(ii) Le sous-espace projectif engendré par $\mathbb{P}(E_1), \ldots, \mathbb{P}(E_r)$ est $\mathbb{P}(E_1 + \cdots + E_r)$.

***Rappels 12.2* (sur la dualité).** — Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

(1) Si F est un sev de V^*, son *orthogonal dans* V est :

$$F^0 = \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ pour tout } f \in F\}.$$

On rappelle que :

(i) $\boxed{\dim(F^0) = \dim(V) - \dim(F).}$

(ii) Si $(f_1, \ldots, f_r)$ est une famille génératrice de F (par exemple une base), alors $F^0 = \{v \in V \mid f_i(v) = 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, r\} = \bigcap_{i=1}^r \operatorname{Ker}(f_i)$.

(2) De même, si W est un sev de V, son *orthogonal dans* V^* est :

$$W^0 = \{f \in V^* \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in W\}.$$

On a :

(i) $\boxed{\dim(W^0) = \dim(V) - \dim(W).}$

(ii) Si $(v_1, \ldots, v_r)$ est une famille génératrice de W (par exemple une base), alors $W^0 = \{f \in V^* \mid f(v_i) = 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, r\}$.

(3) Avec les notations précédentes, on a $\boxed{W = W^{00} \text{ et } F = F^{00}.}$

(4) Le dual de l'espace quotient V/W s'identifie à W^0, i.e. on a : $\boxed{(V/W)^* = W^0.}$

(5) L'orthogonalité « *renverse les inclusions et échange les sommes et les intersections* », c.-à-d., si $E \subset F$ et $E_1, \ldots E_r$ sont des sev de V ou de V^*, alors $F^0 \subset E^0$ et l'on a :

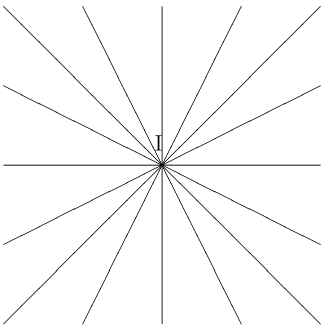
$$(E_1 + \cdots + E_r)^0 = E_1^0 \cap \cdots \cap E_r^0 \qquad \text{et} \qquad (E_1 \cap \cdots \cap E_r)^0 = E_1^0 + \cdots + E_r^0.$$

Démonstration. — Pour (1)–(4), voir par exemple [Po, §§1.3, 1.7, 3.5]. Pour (5), posons $W = E_1 + \cdots + E_n$. L'inclusion $F^0 \subset E^0$ est évidente. Comme $E_i \subset W$, elle entraîne que $E_i^0 \supset W^0$. Réciproquement, si un élément y appartient à $E_1^0 \cap \cdots \cap E_r^0$ alors il est orthogonal à toute somme $x_1 + \cdots + x_n$, où $x_i \in E_i$, donc $y \in W^0$. Ceci prouve la 1ère égalité. La 2ème se déduit de la 1ère appliquée aux E_i^0, en utilisant (3). □

Dans la suite, on suppose que $\dim(V) = n + 1$ est ≥ 3, i.e. que $\dim \mathbb{P}(V) = n$ est ≥ 2.

***Définition 12.3* (Pinceaux d'hyperplans).** — Soit $\Delta = \mathbb{P}(F)$ une droite de $\mathbb{P}(V^*)$, i.e. F est un sev de V^* de dimension 2. Soit $W = F^0$, c'est un sev de V de codimension 2. Pour tout $[f] \in \Delta$, $\mathbb{P}(\mathrm{Ker}(f))$ est un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ contenant $\mathbb{P}(W)$. L'ensemble de ces hyperplans s'appelle le *pinceau d'hyperplans* (1) associé à D ou encore le *pinceau d'hyperplans de centre* $\mathbb{P}(W)$. Si $\mathbb{P}(H)$ et $\mathbb{P}(H')$ sont deux éléments distincts du pinceau, leur intersection est $\mathbb{P}(W)$ (car $H \cap H' = W$).

Exemple 12.4. — Si $\mathbf{P}$ est un plan projectif et I un point de $\mathbf{P}$, alors le pinceau de droites de centre I est l'ensemble des droites projectives passant par I. Remarquons que si l'on choisit l'une de ces droites comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$, alors dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbf{P} - \mathscr{D}_\infty$, les autres droites du pinceau sont parallèles, cf. la figure de droite ci-dessous :



Notations 12.5. — (1) Notons $\mathscr{S}(V)$ l'ensemble des sev E de V. Plus précisément, pour $r = 0, 1, \ldots, n + 1$, notons $\mathscr{S}_r(V)$ l'ensemble des sev de V de dimension r.

(2) Pour l'énoncé de la dualité projective (cf. ci-dessous), il est commode de s'autoriser à considérer $\mathbb{P}(\{0\}) = \varnothing$ comme un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$, et de décréter qu'il est de dimension -1.

(3) Alors, pour $d = -1, 0, \ldots, n-1, n$, notons $\mathscr{S}_d(\mathbb{P}(V))$ l'ensemble des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ de dimension d, i.e.

$$\mathscr{S}_d(\mathbb{P}(V)) = \{\mathbb{P}(E) \mid E \in \mathscr{S}_{d+1}(V)\}.$$

et notons $\mathscr{S}(\mathbb{P}(V))$ l'ensemble de tous les sous-espaces projectifs $\mathbb{P}(E)$, pour $E \in \mathscr{S}(V)$. Remarquons que $\mathscr{S}_0(\mathbb{P}(V))$ n'est autre que l'ensemble des *points* de $\mathbb{P}(V)$, que $\mathscr{S}_1(\mathbb{P}(V))$ est l'ensemble des *droites* de $\mathbb{P}(V)$ et que $\mathscr{S}_{n-1}(\mathbb{P}(V))$ est l'ensemble des *hyperplans* de $\mathbb{P}(V)$.

Lemme 12.6. — *L'application $E \mapsto E^0$ est une* bijection *de $\mathscr{S}(V)$ sur $\mathscr{S}(V^*)$. Plus précisément, pour tout $r = 0, 1, \ldots, n+1$, c'est une bijection de $\mathscr{S}_r(V)$ sur $\mathscr{S}_{n+1-r}(V^*)$.*

Démonstration. — Ceci découle des rappels précédents. □

(1) On dit aussi « faisceau d'hyperplans », mais nous préférons la terminologie « *pinceau* », qui est celle utilisée en géométrie algébrique.

***Définition et proposition 12.7* (Dualité projective).** — *On suppose que* $\dim \mathbb{P}(V) = n$ *est* ≥ 2.

(i) *L'application* $\mathbb{P}(E) \mapsto \mathbb{P}(E^0)$ *est une* bijection*de* $\mathscr{S}(\mathbb{P}(V))$ *sur* $\mathscr{S}(\mathbb{P}(V^*))$*, qui envoie* $\mathscr{S}_d(\mathbb{P}(V))$ *sur* $\mathscr{S}_{n-d-1}\mathbb{P}(V^*)$ *pour tout tout* $d = -1, 0, \dots, n-1, n$.

(i bis) *En particulier, pour tout* $f \in V^* - \{0\}$ *le point* $[f]$ *de* $\mathbb{P}(V^*)$ *correspond à l'hyperplan* $\mathbb{P}(H)$*, où* $H = \operatorname{Ker}(f)$*. Et toute droite* $\Delta = \mathbb{P}(F)$ *de* $\mathbb{P}(V^*)$ *correspond au pinceau d'hyperplans de centre* $\mathbb{P}(W)$*, où* $W = F^0$.

(ii) *Cette bijection renverse les inclusions :* $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(F^0) \subset \mathbb{P}(E^0)$.

(iii) *Elle* échange les notions d'intersection et de sous-espace engendré*, i.e. si* $E_1, \dots, E_r$ *sont des sev de* V*, elle échange, d'une part,* $\mathbb{P}(E_1) \cap \cdots \mathbb{P}(E_r)$ *et* $\mathbb{P}(E_1^0 + \cdots + E^0)$ *et, d'autre part,* $\mathbb{P}(E_1 + \cdots + E_r)$ *et* $\mathbb{P}(E_1^0 \cap \cdots \cap E_r^0)$.

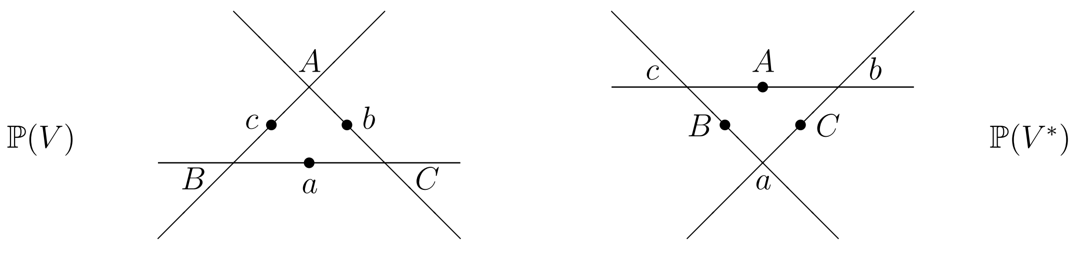
(iii bis) *En particulier, pour tout entier* $r \geq 3$*, des points distincts* $[f_1], \dots [f_r]$ *de* $\mathbb{P}(V^*)$ *sont alignés ssi, posant* $H_i = \operatorname{Ker}(f_i)$*, les hyperplans* $\mathbb{P}(H_i)$ *de* $\mathbb{P}(V)$ *contiennent un sous-espace projectif* $\mathbb{P}(W)$ *de dimension* $n-2$.

(iii ter) *En particulier, si* $n = 2$*, les* $[f_i]$ *comme ci-dessus sont alignés ssi les droites* $D_i = \mathbb{P}(H_i)$ *sont concourantes.*

Démonstration. — Les assertions (i)–(iii) découlent aussitôt du lemme précédent. Prouvons (iii bis). Si les $[f_i]$ engendrent une droite $\Delta = \mathbb{P}(F)$ alors les $\mathbb{P}(H_i)$ appartiennent au pinceau de centre $\mathbb{P}(W)$, où $W = F^0$. Réciproquement, si les $\mathbb{P}(H_i)$ contiennent un sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ de dimension $n-2$, alors les f_i appartiennent tous au plan $F = W^0$, donc les $[f_i]$ appartiennent à la droite $\Delta = \mathbb{P}(F)$. Enfin, (iv ter) est un cas particulier, car dans ce cas $\mathbb{P}(W)$ est un point I du plan projectif $\mathbb{P}(V)$. $\square$

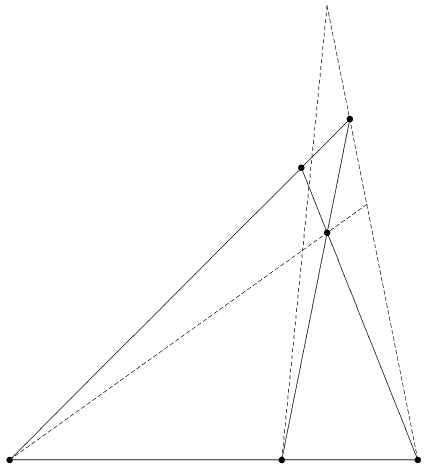
Terminologie 12.8. — Plaçons-nous dans un plan projectif $\mathbb{P}(V)$. Si $\mathbf{D}$ est une droite de $\mathbb{P}(V)$ et d le point correspondant de $\mathbb{P}(V^*)$, on dit que d est « le point dual de la droite $\mathbf{D}$ ». De même, si p est un point de $\mathbb{P}(V)$ et Δ la droite correspondante de $\mathbb{P}(V^*)$, on dit que Δ est « la droite duale du point p ».

Exemples 12.9. — (1) Par exemple, si ABC est un triangle dans $\mathbb{P}(V)$ (i.e. si les points A, B, C de $\mathbb{P}(V)$ sont non alignés), on notera $a \in \mathbb{P}(V^*)$ le point « dual » de la droite (BC), et b (resp. c) le point « dual » de la droite (CA) (resp. (AB)). Alors, comme (BC) et (CA) se coupent en C, la droite (ab) est duale du point C, et de même (bc) est duale de A et (ca) de B.



Donc un triangle est une configuration « autoduale ».

(2) Par contre, on laisse le lecteur vérifier que la configuration duale d'un quadrangle complet, appelée un *quadrilatère complet*, est la donnée de quatre droites distinctes dont trois ne sont jamais concourantes, appelées les *côtés* du quadrilatère ; elles se coupent deux à deux en $\binom{4}{2} = 6$ points distincts, appelés les *sommets*. Deux sommets sont dits *opposés* si la droite qui les joint n'est pas un côté, elle est alors appelée une *diagonale*. On obtient ainsi trois diagonales (en pointillés sur le dessin ci-dessous), et si la caractéristique de k est $\neq 2$, il résulte du lemme 11.14 que les trois diagonales ne sont pas concourantes :

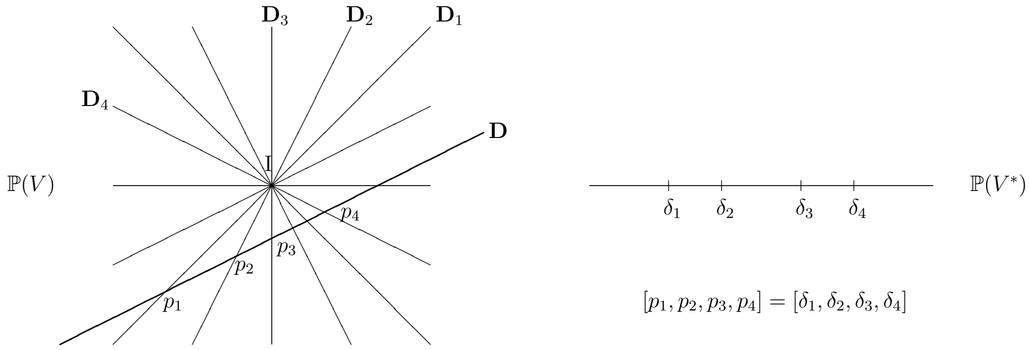


12.2. Théorème de Thalès projectif. — Commençons par le cas d'un plan projectif.

Proposition 12.10 **(Birapport de quatre droites concourantes d'un plan)**
Soient $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}_4$ *quatre droites distinctes d'un plan projectif, concourantes en un point* I*. Soit* $\mathbf{D}$ *une droite ne passant pas par* I*, elle coupe alors les* $\mathbf{D}_i$ *en quatre points* p_i *deux à deux distincts. Alors :*

(i) *Le birapport* $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ *est indépendant de la droite* $\mathbf{D}$*.*

(ii) *Plus précisément, c'est le birapport des quatre points* δ_i *de la droite projective* $\Delta \subset \mathbb{P}(V^*)$ *correspondant au pinceau des droites passant par* I*.*



Démonstration. — On peut choisir des coordonnées homogènes $[x, y, z]$ sur $\mathbb{P}(V)$ telles que $\mathbf{D}$ soit donnée par l'équation $z = 0$ et que $I = [0, 0, 1]$. Ceci munit $\mathbb{P}(V^*)$ de coordonnées homogènes « duales » $[a, b, c]$, i.e. le point $[a, b, c]$ de $\mathbb{P}(V^*)$ correspond à la droite de $\mathbb{P}(V)$ d'équation $ax + by + bz = 0$.

Alors, pour tout point $p = [x_0, y_0, 0]$ de $\mathbf{D}$, la droite (Ip) a pour équation $y_0 x - x_0 y = 0$ donc correspond au point $[y_0, -x_0, 0]$ de Δ. Comme l'application

$$\mathbf{D} \to \Delta, \qquad [x, y, 0] \mapsto [y, -x, 0]$$

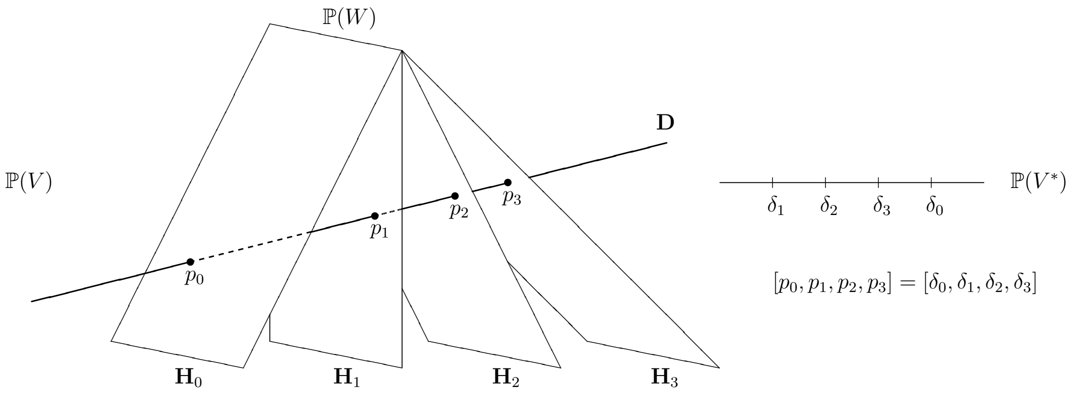
est une homographie, donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on en déduit que $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4]$. (On pourrait aussi vérifier ceci par un calcul direct en utilisant la formule explicite du birapport.) $\square$

Plus généralement, on a la :

Proposition 12.11 **(Birapport de quatre hyperplans d'un pinceau)**
Dans $\mathbb{P}(V)$*, soient* $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3$ *quatre éléments distincts d'un pinceau d'hyperplans de centre* $\mathbb{P}(W)$*. Soit* $\mathbf{D}$ *une droite ne rencontrant pas* $\mathbb{P}(W)$*, elle coupe alors les* $\mathbf{H}_i$ *en quatre points* p_i *deux à deux distincts. Alors :*

(i) *Le birapport* $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ *est indépendant de la droite* $\mathbf{D}$.

(ii) *Plus précisément, c'est le birapport des quatre points* δ_i *de la droite projective* $\Delta \subset \mathbb{P}(V^*)$ *correspondant au pinceau.*



Démonstration. — Elle est analogue à la précédente. On a $\mathbf{D} = \mathbb{P}(F)$ pour un certain sev F de V de dimension 2 tel que $F \cap W = \{0\}$ et donc $V = F \oplus W$. Soit (e_0, e_1) une base de F, complétons-la en une base $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$ de V, d'où des coordonnées homogènes $[x_0, \dots, x_n]$ sur $\mathbb{P}(V)$ telles que $\mathbb{P}(W)$ (resp. $\mathbf{D}$) soit donné par les équations $x_0 = 0 = x_1$ (resp. $x_2 = 0 = \cdots = x_n$) et donc

$$\mathbf{D} = \big\{[x_0, x_1, 0, \dots, 0] \mid (x_0, x_1) \in k^2 - \{(0,0)\}\big\}.$$

La base duale $(e_0^*, \dots, e_n^*)$ de V^* munit $\mathbb{P}(V^*)$ de coordonnées homogènes $[a_0, \dots, a_n]$, pour lesquelles la droite $\Delta = \mathbb{P}(W^0)$ a pour équations $a_2 = 0 = \cdots = a_n$, i.e.

$$\Delta = \big\{[a_0, a_1, 0, \dots, 0] \mid (a_0, a_1) \in k^2 - \{(0,0)\}\big\}.$$

Pour tout point $p = [a, b, 0, \dots, 0]$ de $\mathbf{D}$, le sous-espace projectif engendré par p et $\mathbb{P}(W)$ est égal à $\mathbb{P}(H_p)$, où H_p est l'hyperplan vectoriel engendré par W et la droite vectorielle $k(ae_0 + be_1)$. On voit que H_p a pour équation $bx_0 - ax_1 = 0$, donc $\mathbb{P}(H_p)$ correspond au point $[b, -a, 0, \dots, 0]$ de Δ. Comme l'application $\mathbf{D} \to \Delta$, $[a, b, 0] \mapsto [b, -a, 0]$ est une homographie, donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on en déduit que $[p_0, p_1, p_2, p_3] = [\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3]$. $\square$

Remarque 12.12. — La proposition précédente peut être appelée **théorème de Thalès projectif**. En effet, posons $E = H_{p_0}$ et prenons $\mathbf{H}_0 = \mathbb{P}(E)$ comme hyperplan à l'infini $\mathbf{H}_\infty$ de $\mathbb{P}(V)$, et donc p_0 comme point à l'infini sur la droite $\mathbf{D}$. D'une part, dans l'espace affine $\mathscr{E} = \mathbb{P}(V) - \mathbf{H}_0$ (de direction E), les hyperplans affines $\mathscr{H}_i = \mathscr{E} \cap \mathbf{H}_i$ sont parallèles, pour $i = 1, 2, 3$ (car $\mathbf{H}_i \cap \mathbf{H}_j = \mathbb{P}(W) \subset \mathbf{H}_\infty$).(2) D'autre part, le birapport $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ est égal à $[\lambda, 1]$, où le scalaire λ est :

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{p_1p_3}}{\overrightarrow{p_1p_2}}. \tag{†}$$

Ceci peut se voir en utilisant la formule explicite du birapport (cf. 10.23) ou, mieux, en la retrouvant directement dans ce cas particulier. Soit h l'homographie $\mathbf{D} \to \mathbb{P}^1$ qui envoie (p_0, p_1, p_2) sur $(\infty, 0, 1)$; elle induit, par restriction, une application affine de la droite affine $\mathscr{D} = \mathbf{D} - \{p_0\}$ sur la droite affine $k = \mathbb{P}^1(k) - \{\infty\}$, qui envoie p_1 sur 0 et p_2 sur 1. Ceci revient à prendre (p_1, p_2) comme repère affine de $\mathscr{D}$ et alors le birapport $[p_0, p_1, p_2, p_3] = h(p_3)$ n'est autre que le scalaire λ tel que $\overrightarrow{p_1p_3} = \lambda\overrightarrow{p_1p_2}$. Ceci prouve la formule (†).

---

(2)Et, d'après la Prop. 8.17, la direction de chaque $\mathscr{H}_i$ est $H_{p_i} \cap E = W$.

On voit donc que la proposition précédente contient comme cas particulier (en mettant $\mathbf{H}_0$ à l'infini) le théorèmes de Thalès, i.e. que si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites affines coupant les $\mathscr{H}_i$ en A_1, A_2, A_3 et B_1, B_2, B_3 respectivement, alors on a

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_1A_2}} = \frac{\overrightarrow{B_1B_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}.$$ [3]

12.3. Autodualité du théorème de Desargues. — Plaçons-nous dans un plan projectif $\mathbb{P}(V)$. Commençons par rappeler les hypothèses du théorème de Desargues.

On suppose que A, B, C (resp. A', B', C') sont non alignés et que :

$A \neq A'$ donnent la droite (AA')	$(BC) \neq (B'C')$ se coupent en un point A_1
$B \neq B'$ donnent la droite (BB')	$(CA) \neq (C'A')$ se coupent en un point B_1
$C \neq C'$ donnent la droite (CC')	$(AB) \neq (A'B')$ se coupent en un point C_1
$(AA'), (BB'), (CC')$ distinctes	A_1, B_1, C_1 **distincts**

Que A_1, B_1, C_1 soient distincts ne fait pas partie des hypothèses initiales, mais en découle. En effet, si on avait par exemple $A_1 = B_1$ alors les droites (AC) et (BC), distinctes car A, B, C non alignés, auraient en commun les points $M = A_1 = B_1$ et C, donc nécessairement $M = C$, et de même $M = C'$, d'où $C = C'$, contradiction.

Notons $a \in \mathbb{P}(V^*)$ le point « dual » de la droite (BC), et b (resp. c) le point « dual » de la droite (CA) (resp. (AB)), et définissons de même a', b', c'.

Alors, comme (BC) et (CA) se coupent en C, la droite (ab) est duale du point C, et de même (bc) est duale de A et (ca) de B. De même, $(a'b')$, $(b'c')$ et $(c'a')$ sont duales, respectivement, des points C', A' et B'.

Comme $C \neq C'$, alors (ab) et $(a'b')$ sont distinctes donc se coupent en un point c_1 qui est dual de la droite (CC'). De même, (bc) et $(b'c')$ se coupent au point a_1 dual de (AA'), et (ca) et $(c'a')$ se coupent au point b_1 dual de (BB')

De plus, comme c est dual de (AB) et c' de $(A'B')$, alors la droite (cc') est duale du point $C_1 = (AB) \cap (A'B')$, et de même (bb') est duale de B_1 et (aa') de A_1. On voit donc que les hypothèses sont « auto-duales », i.e. qu'elles équivalent aux hypothèses analogues sur les objets duaux :

a, b, c (resp. a', b', c') sont non alignés et :

$(bc) \neq (b'c')$ se coupent en un point a_1	$a \neq a'$ donnent la droite (aa')
$(ca) \neq (c'a')$ se coupent en un point b_1	$b \neq b'$ donnent la droite (bb')
$(ab) \neq (a'b')$ se coupent en un point c_1	$c \neq c'$ donnent la droite (cc')
a_1, b_1, c_1 distincts	$(aa'), (bb'), (cc')$ distinctes

On peut maintenant énoncer (et démontrer !) le théorème de Desargues sous la forme suivante : [4]

Théorème 12.13 **(de Desargues projectif).** — *On se place sous les hypothèses auto-duales précédentes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) A_1, B_1, C_1 *sont alignés sur une droite* $\mathbf{D} \subset \mathbb{P}(V)$.

(ii) $(AA'), (BB'), (CC')$ *sont concourantes en un point* $O \in \mathbb{P}(V)$.

[3] Et ce scalaire est le birapport des hyperplans projectifs $\mathbf{H}_\infty = \mathbb{P}(E)$, $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{H}_1)$, $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{H}_2)$, $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{H}_3)$ de $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{E}) = \mathbb{P}(V)$, qui appartiennent au pinceau de centre $\mathbb{P}(W)$, où $W \subset E$ est la direction commune des $\mathscr{H}_i$.

[4] La démonstration par « expédition de $\mathbf{D}$ à l'infini » donnée en semaine 3 supposait implicitement que $\mathbf{D}$ ne contient aucun des points A, B, C, A', B', C', ce qui est le cas « non dégénéré » du théorème.

(iii) $(aa'), (bb'), (cc')$ *sont concourantes au point* $d \in \mathbb{P}(V^*)$ *dual de la droite* $\mathbf{D}$.

(iv) a_1, b_1, c_1 *sont alignés sur la droite* Ω *de* $\mathbb{P}(V^*)$ *duale du point* O.

De plus, si ces conditions sont vérifiées, on est dans l'une des situations suivantes :

a) Cas non dégénéré : *aucune des* 6 *droites* $(AB), (BC), (CA), (A'B'), (B'C'), (C'A')$ *ne contient* O *; de façon équivalente,* $\mathbf{D}$ *ne contient aucun des* 6 *points* C, A, B, C', A', B'*. Dans ce cas, avec les* 4 *droites* $(AA'), (BB'), (CC'), \mathbf{D}$ *et les* 4 *points* A_1, B_1, C_1, O *on obtient dix points et dix droites deux à deux distincts. Le point* O *peut appartenir ou pas à la droite* $\mathbf{D}$ *: voir les deux figures de* 11.5.

b) Cas dégénéré : *O est égal à l'un des points* A, B, C, A', B', C'*, disons* A*. Alors on a trois égalités de points :* $A = O$*,* $B' = C_1$ *et* $C' = B_1$*, et trois égalités de droites :* $(BB') = (AB)$*,* $(CC') = (AC)$ *et* $\mathbf{D} = (B'C')$*. Si* $O \notin \mathbf{D}$*, on obtient ainsi* 7 *points et* 7 *droites deux à deux distincts. Si* $O \in \mathbf{D}$*, on obtient deux égalités de points (resp. de droites) en plus, par exemple* $A = B'$ *et* $C = A_1$ *(resp.* $(A'A) = (A'B')$ *et* $(C'C) = \mathbf{D}$*), d'où seulement* 5 *points et* 5 *droites.*

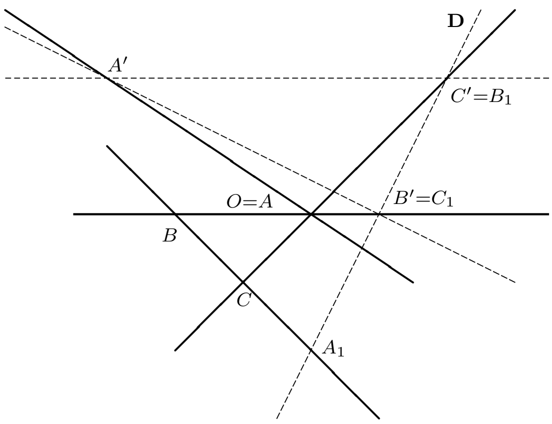
Démonstration. — Par dualité, on a les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (iii) et (ii) $\Leftrightarrow$ (iv). De plus, si l'on a montré l'implication $\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ et si (i) est vérifié alors (iii) l'est aussi et donc, par l'implication précédente appliquée dans $\mathbb{P}(V^*)$, (iv) est vérifié et donc (ii) est vérifié. Donc il suffit d'établir que (ii) $\Rightarrow$ (i), en tenant compte des cas dégénérés.

Supposons donc $(AA'), (BB'), (CC')$ concourantes en un point O. Alors, dans $\mathbb{P}(V^*)$, les points a_1, b_1, c_1 appartiennent à la droite Ω duale de O. Distinguons les cas suivants.

(1) O appartient à une des 6 droites $(AB), (BC), (CA), (A'B'), (B'C'), (C'A')$, par exemple à (AB). Si O était distinct de A et de B, alors la droite (AB) serait égale à $(OA) = (A'A)$ et à $(OB) = (B'B)$ donc on aurait $(A'A) = (B'B)$ contrairement à l'hypothèse. Ceci montre que $O = A$ ou B. Supposons par exemple $O = A$.

Alors, $(BB') = (AB)$ et $(CC') = (AC)$. De plus, comme $B' \in (AB) \cap (A'B')$ on a $B' = C_1$ et de même, comme $C' \in (AC) \cap (A'C')$, on a $C' = B_1$. Par conséquent, on a $(C_1B_1) = (B'C')$ et cette droite contient évidemment le point $A_1 = (B'C') \cap (BC)$. Ceci montre déjà que dans ce cas A_1, B_1, C_1 sont alignés sur la droite $\mathbf{D} = (B'C')$.

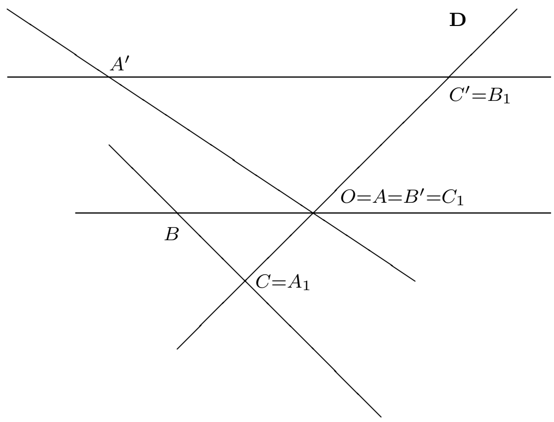
De plus, on a la configuration suivante, où les 4 droites en gras (resp. les 3 en pointillés) sont deux à deux distinctes :



En effet, $(A'A)$ est distincte de (BAB') (resp. (CAC')) car sinon on aurait $(A'A) = (BB')$ (resp. $(A'A) = (CC')$), et elle est distincte de (BC) car A, B, C sont non alignés.

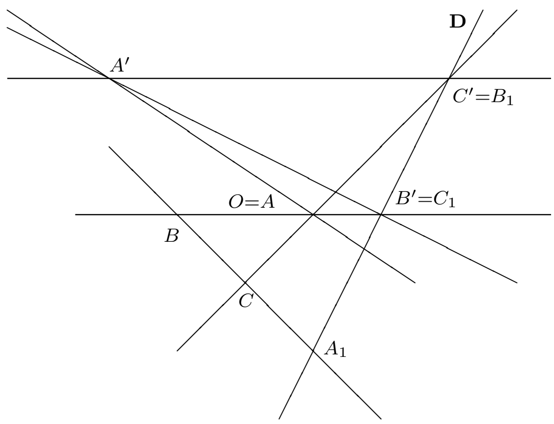
De plus, $\mathbf{D} = (B'C')$ est distincte de (BC) par hypothèse, et elle est distincte de $(A'A)$ et $(A'B')$ car A', B', C' sont non alignés. Donc les seules égalités de droites possibles sont l'égalité de $\mathbf{D}$ avec (CAC') ou (BAB'), et l'égalité de $(A'A)$ avec $(A'B')$ ou $(A'C')$.

Si $\mathbf{D} = (CC')$ alors B' appartient à $(CC') \cap (BB')$ donc $B' = O = A$, et C appartient à (BC) et à $(CC') = (B'C')$ donc $C = A_1$. On obtient donc la configuration suivante de 5 points et 5 droites :



De même, si $\mathbf{D} = (BB')$ on obtient une configuration analogue avec cette fois $O = A = C' = B_1$ et $B = A_1$. Dans ces deux cas, $O = A$ appartient à $\mathbf{D}$. Réciproquement, si $O \in \mathbf{D}$ et si O est distinct de C' (resp. de B'), alors $\mathbf{D}$ et (CC') (resp. (BB')) ont en commun les points distincts O et C' (resp. O et B') donc $\mathbf{D} = (CC')$ (resp. $\mathbf{D} = (BB')$) et l'on est dans le cas juste étudié.

Au contraire, si $O = A$ n'appartient pas à $\mathbf{D}$ alors $\mathbf{D}$ est distincte de (CAC') et (BAB'), et $(A'A) \neq (A'B')$ car sinon on aurait $B' \in (B'B) \cap (A'A)$ d'où $B' = O = A$; de même, $(A'A) \neq (A'C')$. On obtient donc une configuration de 7 points et 7 droites deux à deux distincts :



Ceci achève l'analyse du cas où l'une des 6 droites $(AB), (BC), (CA), (A'B'), (B'C'), (C'A')$ contient O.

(2) Considérons maintenant le cas où aucune de ces 6 droites ne contient O. Alors, par dualité, la droite Ω de $\mathbb{P}(V^*)$ ne contient aucun des points c, a, b, c', a', b'.

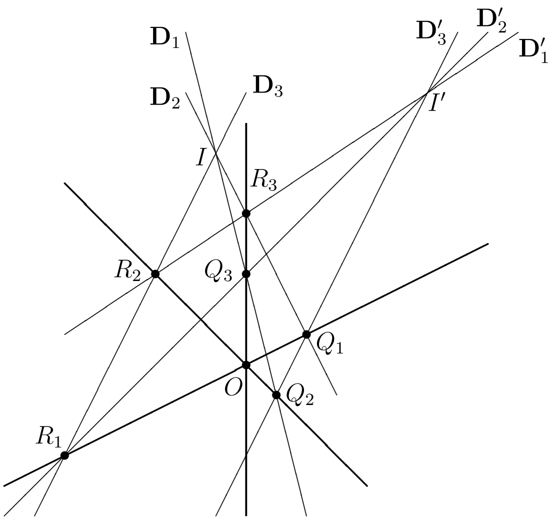
Dans ce cas, on peut appliquer la démonstration donnée en semaine 3, i.e. prenons Ω comme droite à l'infini dans $\mathbb{P}(V^*)$. Alors les 6 points a, b, c, a', b', c' sont dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V^*) - \Omega$ et les droites (ab) et $(a'b')$ sont parallèles, ainsi que (bc) et $(b'c')$ et (ca) et $(c'a')$. Ceci implique que les 6 points a, b, c, a', b', c' sont distincts : en effet, si on avait par exemple $a = b'$, alors les droites parallèles (ab) et $(a'b')$ seraient égales, et l'on aurait $(aa') = (aa')$ contrairement à l'hypothèse. On est donc sous les hypothèses du théorème de Desargues affine 9.8. Par conséquent, les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes en un point d et donc, par dualité, les points A_1, B_1, C_1 de $\mathbb{P}(V)$ appartiennent à la droite $\mathbf{D}$ duale de d. Ceci termine déjà la preuve de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i).

De plus, la démonstration du théorème 9.8 montre que les droites (aa'), (bb'), (cc') sont soit concourantes en un point $d \in \mathscr{P}$ qui est distinct des six points,[5] soit parallèles, et en ce cas elles ne sont parallèles à aucune des droites (ab), (bc), (ca), donc coupent la droite à l'infini Ω en un point d qui est distinct de a_1, b_1, c_1. On obtient donc que les dix points $a, b, c, a', b', c', a_1, b_1, c_1, d$ de $\mathbb{P}(V^*)$ sont distincts, et donc les dix droites correspondantes de $\mathbb{P}(V)$ sont distinctes.

Comme ceci est exclusif du cas dégénéré traité en (1), on obtient ainsi, en tenant compte de la dualité, les deux situations a) et b) du théorème. $\square$

12.4. Dual du théorème de Pappus. — En dualisant le théorème de Pappus projectif, on obtient le théorème suivant :

***Théorème 12.14* (de Pappus dual).** — *Dans un plan projectif, soient I, I' deux points distincts et $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$ (resp. $\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_2, \mathbf{D}'_3$) trois droites distinctes passant par I (resp. I') et distinctes de la droite (II'). Notons Q_1 (resp. R_1) le point de concours de $\mathbf{D}_2$ et $\mathbf{D}'_3$ (resp. $\mathbf{D}'_2$ et $\mathbf{D}_3$) et définissons de même Q_2, R_2, Q_3 et R_3. Alors les droites (Q_1R_1), (Q_2R_2) et (Q_3R_3) sont concourantes.*



13. Hyperplans tangents à une hypersurface affine ou projective

13.1. Polynômes à plusieurs indéterminées. — Soient k un corps et $r \in \mathbb{N}^*$. L'anneau des polynômes en r variables (ou *indéterminées*), à coefficients dans k, noté $k[X_1, \dots, X_r]$, est le k-espace vectoriel (de dimension infinie) dont une base est donnée par les monômes

$$X^{\mathbf{a}} = X_1^{a_1} \cdots X_r^{a_r} \quad \text{pour } \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{N}^r,$$

i.e. c'est l'ensemble de toutes les sommes **finies** $P = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^r} \alpha_{\mathbf{a}} X^{\mathbf{a}}$, où $\alpha_{\mathbf{a}} \in k$ et, par convention, les $\alpha_{\mathbf{a}}$ sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. La multiplication est l'application k-bilinéaire définie par $X^{\mathbf{a}} \cdot X^{\mathbf{b}} = X^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$ i.e.

$$X_1^{a_1} \cdots X_r^{a_r} \cdot X_1^{b_1} \cdots X_r^{b_r} = X_1^{a_1+b_1} \cdots X_r^{a_r+b_r}$$

[5] car $\overrightarrow{aa'} = (1 - \lambda)\overrightarrow{ad}$, etc.

c.-à-d., pour $P = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^r} \alpha_{\mathbf{a}} X^{\mathbf{a}}$ et $Q = \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^r} \beta_{\mathbf{b}} X^{\mathbf{b}}$ arbitraires, on a :

$$P \cdot Q = \sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{N}^r} \alpha_{\mathbf{a}}\beta_{\mathbf{b}} X^{\mathbf{a}+\mathbf{b}} = \sum_{\mathbf{c}\in\mathbb{N}^r} \left(\sum_{\substack{\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{N}^r \\ \mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}}} \alpha_{\mathbf{a}}\beta_{\mathbf{b}} \right) X^{\mathbf{c}}.$$

Pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^r$, on pose $|\mathbf{a}| = a_1 + \cdots + a_r$ et l'on dit que le monôme $X^{\mathbf{a}}$ est de degré total $|\mathbf{a}|$. Si $P = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^r} \alpha_{\mathbf{a}} X^{\mathbf{a}}$ est non nul, on appelle *degré* de P et l'on note $\deg(P)$ le plus grand des entiers $|\mathbf{a}|$ pour $\mathbf{a}$ tel que $\alpha_{\mathbf{a}} \neq 0$ (il n'y a qu'un nombre fini de tels $\mathbf{a}$).

Par exemple, le polynôme en 3 variables $P = XYZ + 3Y^2Z^2 + 27X^3Y + Y^4 + 11Y^2Z^3 \in \mathbb{Q}[X,Y,Z]$ est de degré 5.

Remarque 13.1. — La définition précédente reste valable en remplaçant k par n'importe quel anneau commutatif A. On obtient ainsi l'anneau $A[X_1, \dots, X_r]$ des polynômes en r variables à coefficients dans A.

Revenons à notre corps k et, pour tout $i = 1, \dots, r$, notons R_i l'anneau des polynômes sur k en les $(r-1)$ variables $X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_r$, où le $\widehat{}$ sur le X_i signifie que cette variable a été omise. On a alors :

$$(*) \qquad k[X_1, \dots, X_n] = k[X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n][X_i] = R_i[X_i],$$

i.e. tout élément P de $k[X_1, \dots, X_n]$ s'écrit de façon unique comme une somme **finie** $P = \sum_{s\in\mathbb{N}} A_s X_i^s$, où les A_s sont dans R_i et sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Si $P \neq 0$ et si d est le plus grand entier tel que $A_s \neq 0$, on dit que P est *de degré* d en X_i et l'on pose $\deg_{X_i}(P) = d$. Ceci est bien sûr inférieur ou égal au degré total $\deg(P)$ de P.

Ainsi, dans l'exemple précédent, on a :

$$\begin{aligned} P &= (27X^3Y + Y^4) + (XY)\,Z + 3Y^2\,Z^2 + 11Y^2\,Z^3 && \in k[X,Y][Z] \quad \text{et } \deg_Z(P) = 3, \\ &= (XZ + 27X^3)\,Y + (3Z^2 + 11Z^3)\,Y^2 + Y^4 && \in k[X,Z][Y] \quad \text{et } \deg_Y(P) = 4, \\ &= (3Y^2Z^2 + 11Y^2Z^3 + Y^4) + (YZ)\,X + 27Y\,X^3 && \in k[Y,Z][X] \quad \text{et } \deg_X(P) = 3. \end{aligned}$$

Exercice 13.2. — Pour un polynôme non nul $P \in k[X,Y,Z]$, à quelle condition a-t-on $\deg_X(P) = \deg(P)$? Et $\deg(P) = \deg_X(P) = \deg_Y(P) = \deg_Z(P)$?

***Définition 13.3* (Dérivée d'un polynôme)**. — Soit A un anneau commutatif. On introduit une application $D : A[X] \to A[X]$, appelée la *dérivation*, en posant, pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d$,

$$D(P) = P' = a_1 + 2a_2X + \cdots + da_dX^{d-1}.$$

Ce polynôme est appelé le *polynôme dérivé* de P. On le notera aussi $\partial_X P$.

Proposition 13.4. — *Pour tout $P, Q \in A[X]$ et $\lambda, \mu \in A$, on a :*

(i) $D(\lambda P + \mu Q) = \lambda D(P) + \mu D(Q)$, *i.e. la dérivation est* A-linéaire *;*

(ii) $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

(iii) *Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $D(P^n) = nP^{n-1}P'$.*

Démonstration. — (i) est immédiat et laissé au lecteur. Pour prouver (ii) on observe que, pour Q fixé, les deux applications $P \mapsto D(PQ)$ et $P \mapsto D(P)Q + PD(Q)$ sont A-linéaires, donc pour montrer qu'elles coïncident il suffit de le faire lorsque P est un monôme X^p, c.-à-d. il suffit de montrer que $D(X^pQ) = D(X^p)Q + X^pD(Q)$ pour tout $Q \in A[X]$.

Mais à nouveau, X^p étant fixé, les deux applications $Q \mapsto D(X^pQ)$ et $Q \mapsto D(X^p)Q + X^pD(Q)$ sont A-linéaires, donc pour montrer qu'elles coïncident il suffit de le faire lorsque Q est un monôme X^q. Bref, il suffit de vérifier que

$$D(X^pX^q) = D(X^p)X^q + X^pD(X^q).$$

Mais ceci est facile, car $X^pX^q = X^{p+q}$ donc le terme de gauche vaut $(p+q)X^{p+q-1}$, tandis que celui de droite vaut $pX^{p-1}X^q + qX^pX^{q-1} = (p+q)X^{p+q-1}$. Ceci prouve (ii). Alors (iii) s'en déduit facilement par récurrence sur n. □

Définition 13.5 **(Dérivées partielles d'un polynôme à plusieurs variables)**
Revenons à notre corps k.[6] Pour tout $P \in k[X_1, \dots, X_r]$, on note $\partial_{X_i}P$, ou simplement ∂_iP, le polynôme dérivé de P considéré comme élément de $k[X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n][X_i]$, i.e. on « dérive P *par rapport à la variable* X_i » en considérant les autres variables comme des « constantes ». Ainsi, en reprenant l'exemple 13.1, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_Z P &= XY + 6Y^2\,Z + 33Y^2\,Z^2,\\
\partial_Y P &= (XZ + 27X^3) + 2(3Z^2 + 11Z^3)\,Y + 4Y^3,\\
\partial_X P &= YZ + 81Y\,X^2.
\end{aligned}$$

Définition 13.6 **(Polynômes homogènes)**. — On dit qu'un polynôme non nul $P \in k[X_1, \dots, X_r]$ est *homogène* de degré d si tous les monômes qui le composent sont de même degré total d. Par exemple, si $r = 3$ un polynôme homogène de degré 1 est de la forme $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$, et un polynôme homogène de degré 2 de la forme :

$$a_1X_1^2 + a_2X_2^2 + a_3X_3^2 + a_{1,2}X_1X_2 + a_{1,3}X_1X_3 + a_{2,3}X_2X_3.$$

Exercice 13.7. — Soit n un entier ≥ 2. Quelle est la dimension du k-espace vectoriel des polynômes en n variables sur k, homogènes de degré 2 ?

Proposition 13.8 **(Formule d'Euler)**. — *Soit $P \in k[X_1, \dots, X_r]$ un polynôme non nul homogène de degré d. On a l'égalité :*

$$(\star) \qquad d \cdot P = X_1\partial_1P + \cdots + X_r\partial_rP = \sum_{i=1}^{r} X_i\partial_iP.$$

Démonstration. — Comme chaque application $P \mapsto X_i\partial_iP$ est k-linéaire, le terme de droite est une fonction linéaire de P, ainsi bien sûr que le terme de gauche. Donc il suffit de démontrer la formule lorsque P est un monôme $X_1^{a_1}\cdots X_r^{a_r}$ de degré d, i.e. $a_1+\cdots+a_r = d$. Dans ce cas, on voit que pour tout $i = 1, \dots, r$, on a

$$X_i\partial_i(X_1^{a_1}\cdots X_r^{a_r}) = a_iX_1^{a_1}\cdots X_r^{a_r}$$

et donc le terme de droite est égal à $(\sum_{i=1}^r a_i)X_1^{a_1}\cdots X_r^{a_r} = dX_1^{a_1}\cdots X_r^{a_r}$. Ceci prouve la proposition. □

13.2. Hypersurfaces de k^n. — Soit $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme non constant.[7] On définit sa *variété des zéros* dans l'espace affine k^n, notée $\mathscr{V}(P)$,[8] par :

$$\mathscr{V}(P) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid P(x) = 0\}$$

et l'on dit que c'est une hypersurface (algébrique) de k^n. En fait, quand on dit cela, on suppose implicitement que le corps k est algébriquement clos, par exemple $k = \mathbb{C}$, ou bien

(6) En fait, ce qui suit est valable pour n'importe quel anneau commutatif k.
(7) On suppose P *non constant* car $\mathscr{V}(P) = k^n$ si $P = 0$, tandis que $\mathscr{V}(P) = \varnothing$ si P est une constante $\neq 0$.
(8) On note $\mathscr{V}$ pour « Variété » ; d'autres auteurs notent $\mathcal{Z}(P)$ pour « Zéros ».

que k est considéré comme sous-corps d'un corps algébriquement clos $\overline{k}$, par exemple $k = \mathbb{R}$ et $\overline{k} = \mathbb{C}$.

En effet, lorsque k n'est pas algébriquement clos, il arrive que $\mathscr{V}(P)$ ne soit « pas intéressant », par exemple si $k = \mathbb{R}$, et si l'on pose $P_c = X^2 + Y^2 + c$ pour $c \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathscr{V}(P_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$$

se réduit au point $(0,0)$, au lieu d'être une honnête « courbe algébrique » comme par exemple le cercle

$$\mathscr{V}(P_{-1}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

ou l'hyperbole

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} = \mathscr{V}(XY - 1)$$

ou la parabole

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\} = \mathscr{V}(Y - X^2).$$

Pire encore, $\mathscr{V}_{\mathbb{R}}(P_1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = -1\}$ est vide. Toutefois, dans $\mathbb{C}$ on a $(x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$ donc dans $\mathbb{C}[X,Y]$ si l'on fait le changement de variables $X' = X + iY$ et $Y' = -X + iY$, alors $P_1 = 1 - X'Y'$ et donc

$$\mathscr{V}_{\mathbb{C}}(P_1) = \{(x',y') \in \mathbb{C}^2 \mid x'y' = 1\}$$

est une « honnête » hyperbole, et le fait que $\mathscr{V}_{\mathbb{R}}(P_1) = \varnothing$ siginifie simplement que cette hyperbole « complexe » n'a pas de « points réels ». On verra bien d'autres exemples de la sorte dans la suite.

Toutefois, nous ne voulons pas imposer à k d'être algébriquement clos, car précisément on veut pouvoir étudier des courbes algébriques dans $\mathbb{R}^2$ telles que cercles, ellipses, hyperboles et paraboles...

***Définitions 13.9* (Points lisses et hyperplans tangents)**

Soient $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ non constant et soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathscr{V}(P)$.

(i) La *différentielle* de P en a, notée d_aP, est la forme linéaire sur k^n qui à tout $(x_1, \dots, x_n)$ associe le scalaire $(\partial_1 P)(a)\, x_1 + \cdots + (\partial_n P)(a)\, x_n$.[9]

(ii) On dit que a est un point *lisse* de $\mathscr{V}(P)$ si $d_aP \neq 0$, c.-à-d. si les dérivées partielles $\partial_i P$, pour $i = 1, \dots, n$, ne s'annulent pas toutes au point a.

(iii) Dans ce cas, *l'hyperplan tangent à* $\mathscr{V}(P)$ *au point* a, noté $T_a\mathscr{V}(P)$ est l'hyperplan affine de direction $\operatorname{Ker}(d_aP)$ passant par a, i.e. :

$$\begin{aligned} T_a\mathscr{V}(P) &= \big\{x = a + u \mid u \in \operatorname{Ker}(d_aP)\big\} = \big\{x = (x_1, \dots, x_n) \mid u = x - a \in \operatorname{Ker}(d_aP)\big\} \\ &= \Big\{x = (x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n \partial_i P(a)(x_i - a_i) = 0\Big\}. \end{aligned}$$

Proposition 13.10. — (i) *La forme linéaire $d_aP : k^n \to k$ ne dépend pas du choix des coordonnées. Plus précisément, pour tout système $(Y_1, \dots, Y_n)$ de coordonnées affines centrées en a, d_aP est la* partie linéaire *du polynôme $Q(Y_1, \dots, Y_n)$ défini par $Q(Y_1, \dots, Y_n) = P(Y_1 + a_1, \dots, Y_n + a_n)$.*

(ii) *Par conséquent, la notion de point lisse et la définition de l'hyperplan tangent ne dépendent pas du choix des coordonnées.*

Démonstration. — Traitons d'abord le cas d'une translation. Soit $F \in R[X]$, où R est un anneau commutatif, et soit $r \in R$. Faisons le changement de variable $Y = X - r$, i.e. $X = Y + r$. Alors $F(X) = F(a+Y)$ s'écrit comme un polynôme en Y, qu'on notera $Q(Y)$ et qui est déterminé par l'égalité $Q(Y) = F(a+Y)$. Montrons que :

$$(\partial_Y Q)(Y) = (\partial_X P)(Y + a). \tag{$*$}$$

[9] Dans la suite, on notera simplement $\partial_i P(a)$ au lieu de $(\partial_i P)(a)$.

En écrivant $F = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i X^i$, on se ramène à vérifier cette égalité lorsque F est un monôme X^p, auquel cas $Q(Y) = (Y+a)^p$. Alors, d'après la formule 13.3 (iii), on a $(\partial_Y Q)(Y) = p(Y+a)^{p-1} = (\partial_X F)(Y+a)$, ce qui prouve $(*)$.

Revenons à notre polynôme $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ et faisons le changement de variables $Y_i = X_i - a_i$, de sorte que a est le point défini par $Y_i(a) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$. On dit alors que le système de coordonnées affines $(Y_1, \dots, Y_n)$ est *centré* en a. Alors $P(X_1, \dots, X_n) = P(a_1 + Y_1, \dots, a_n + Y_n)$ s'écrit comme un polynôme en les Y_i, qu'on notera $Q(Y_1, \dots, Y_n)$ et qui est déterminé par l'égalité

$$Q(Y_1, \dots, Y_n) = P(a_1 + Y_1, \dots, a_n + Y_n).$$

Fixons un indice i et considérons le 1er (resp. 2ème) membre comme un polynôme en Y_i (resp. X_i) à coefficients dans l'anneau $R = k[Y_1, \dots, \widehat{Y_i}, \dots, Y_n]$. Alors, d'après $(*)$ on a

$$(\partial_{Y_i} Q)(Y_1, \dots, Y_n) = (\partial_{X_i} P)(a_1 + Y_1, \dots, a_n + Y_n)$$

et donc $(\partial_{Y_i} Q)(0) = (\partial_{X_i} P)(a)$ pour tout i. On voit donc que a est lisse dans les coordonnées X_i ssi il l'est dans les coordonnées Y_i, et dans ce cas en utilisant les coordonnées Y_i l'hyperplan tangent est défini par :

$$T_{y=0}\mathscr{V}(P) = \big\{ y = (y_1, \dots, y_n) \mid \sum_{i=1}^{n} (\partial_{Y_i} Q)(0)\, y_i = 0 \big\} = \big\{ x = a + y \mid \sum_{i=1}^{n} (\partial_{X_i} P)(a)(x_i - a_i) = 0 \big\}$$

et coïncide bien avec l'hyperplan tangent défini en utilisant les coordonnées X_i.

De plus, Q se décompose de façon unique comme la somme de ses « composantes homogènes » :

$$(\star) \qquad Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_d,$$

où $Q_0 = Q(0)$ (qui ici vaut 0), $d = \deg(Q)$ et pour $s = 1, \dots, d$, Q_s est le polynôme homogène de degré s obtenu en regroupant tous les monômes de degré s apparaissant dans Q.

Fixons une variable Y_i. Alors, pour tout $s = 1, \dots, d$, $\partial_{Y_i} Q_s$ est un polynôme homogène de degré $s - 1$, donc s'annule en 0 si $s \geq 2$ et est une constante c_i si $s = 1$; de plus compte tenu des annulations $(\partial_{Y_i} Q_s)(0) = 0$ pour $s \neq 1$, on a $c_i = (\partial_{Y_i} Q)(0)$. Alors, d'après la formule d'Euler, on a

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} (\partial_{Y_i} Q)(0) Y_i = d_{y=0} Q.$$

Montrons enfin que la décomposition $(\star)$ ne dépend que du point choisi comme « centre des coordonnées » (i.e. comme origine de l'espace affine $\mathscr{E} = k^n$), et non du choix des coordonnées elles-mêmes (i.e. du choix d'une base de l'espace vectoriel $E = k^n$).

Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de k^n et soient $\mathscr{C}$ une autre base, $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ la matrice de passage, et $(Y_1', \dots, Y_n')$ les coordonnées dans la base $\mathscr{C}$. Alors on a la formule de changement de coordonnées

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} Y_1' \\ \vdots \\ Y_n' \end{pmatrix}$$

c.-à-d. $Y_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} Y_j'$ pour $i = 1, \dots, n$. Par conséquent, en notant $\widetilde{Q}_s$ le polynôme en les Y_i' défini par l'égalité $Q_s(Y_1, \dots, Y_n) = \widetilde{Q}_s(Y_1', \dots, Y_n')$ et en définissant de même $\widetilde{Q}$, on voit que chaque $\widetilde{Q}_s$ est un polynôme en les Y_i' homogène de degré s, et donc

$$\widetilde{Q} = \widetilde{Q}_0 + \widetilde{Q}_1 + \widetilde{Q}_2 + \cdots + \widetilde{Q}_d$$

est la décomposition de $\widetilde{Q}$ en composantes homogènes. Alors le même argument que précédemment montre que la forme linéaire $d_{y'=0}\widetilde{Q}(Y_1', \dots, Y_n')$ est égale à $\widetilde{Q}_1(Y_1', \dots, Y_n') = Q_1(Y_1, \dots, Y_n)$, donc à $d_{y=0} Q(Y_1, \dots, Y_n)$. Ceci achève la démonstration de la proposition. □

Exemple 13.11. — On suppose $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Dans k^2, considérons l'hyperbole $\mathscr{C} = \mathscr{V}(P)$, où $P = X^2 - Y^2 - 1$. Soit p le point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(1, 0)$. On a $\partial_X P(p) = 2$ et $\partial_Y P(p) = 0$ donc p est un point lisse de $\mathscr{C}$ et la tangente à $\mathscr{C}$ en p a pour équation $2(x-1) = 0$, c.-à-d. $2x = 2$ (i.e. $x = 1$).

Si l'on fait le changement de coordonnées $Z = X + Y$ et $U = X - Y$ (i.e. $X = (Z+U)/2$ et $Y = (Z-U)/2$), alors $P(X, Y) = ZU - 1 = Q(Z, U)$ et p a pour coordonnées $Z = 1 = U$. On a $\partial_Z Q(p) = 1 = \partial_U Q(p)$, et la tangente à $\mathscr{C}$ en p a pour équation $(z-1) + (u-1) = 0$, c.-à-d. $z + u = 2$. C'est bien la droite d'équation $2x = 2$ obtenue plus haut !

13.3. Hypersurfaces de $\mathbb{P}^n(k)$. — Soit $P \in k[X_0, \dots, X_n]$ un polynôme en $(n+1)$ variables, non constant et **homogène** de degré $d \geq 1$. On définit sa *variété des zéros* dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n(k)$, encore notée $\mathscr{V}(P)$, par :

$$\mathscr{V}(P) = \{[x] = [x_0, x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \mid x \in k^{n+1}, \quad P(x) = 0\}$$

et l'on dit que c'est une hypersurface (algébrique) de $\mathbb{P}^n(k)$. Remarquons d'abord que ceci est **bien défini** : en effet, si on remplace $x \in k^{n+1}$ par λx, avec $\lambda \in k^\times$, alors, comme P est homogène de degré d, on a $P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$, donc la nullité ou non de $P(x)$ ne dépend que de $[x]$.[10] Par exemple, si P est homogène de degré 1, i.e. si $P = a_0 X_0 + \cdots + a_n X_n$, alors $\mathscr{V}(P)$ est simplement l'hyperplan projectif $\mathbb{P}(\mathrm{Ker}(f))$, où f est la forme linéaire $f(x) = a_0 x_0 + \cdots + a_n x_n$.

Comme dans le paragraphe précédent, quand on considère $\mathscr{V}(P)$ avec P homogène de degré $d > 1$, on suppose implicitement que le corps k est algébriquement clos, par exemple $k = \mathbb{C}$, ou bien que k est considéré comme sous-corps d'un corps algébriquement clos $\overline{k}$, par exemple $k = \mathbb{R}$ et $\overline{k} = \mathbb{C}$.

En effet, si $k = \mathbb{R}$ et si l'on note X, Y, Z au lieu de X_0, X_1, X_2 et qu'on considère le polynôme $P = X^2 + Y^2 + Z^2$ homogène de degré 2, alors

$$\mathscr{V}_{\mathbb{R}}(P) = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\} = \varnothing.$$

Par contre, dans $\mathbb{C}[X, Y, Z]$, on a $X^2 + Y^2 + Z^2 = (X + iY)(X - iY) + Z^2$ donc si l'on fait le changement de variable $X' = X + iY$ et $Y' = -X + iY$, alors

$$\mathscr{V}_{\mathbb{C}}(P) = \{[x', y', z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid x'y' = z^2\}$$

est une honnête courbe algébrique projective (une « conique projective »). On étudiera ceci en détail au chapitre suivant.

Terminons ce chapitre avec la définition suivante.

***Définition 13.12* (Hyperplans tangents à une hypersurface projective)**
Soit $P \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogène de degré $d \geq 1$, soit $\mathscr{V}(P)$ sa variété des zéros dans $\mathbb{P}^n(k)$ et soit $a = [a_0, a_1, \dots, a_n] \in \mathscr{V}(P)$.

(i) On dit que a est un point *lisse* de $\mathscr{V}(P)$ si les dérivées partielles $\partial_i P$, pour $i = 0, \dots, n$, ne s'annulent pas toutes au point a.

(ii) Dans ce cas, *l'hyperplan tangent à $\mathscr{V}(P)$ au point a*, noté $T_a\mathscr{V}(P)$ est l'hyperplan de $\mathbb{P}^n(k)$ d'équation $\sum_{i=0}^n \partial_i P(a)\, x_i = 0$, i.e. :

$$T_a\mathscr{V}(P) = \big\{[x] = [x_0, x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \mid \sum_{i=0}^n x_i\, \partial_i P(a) = 0\big\}.$$

Remarquons qu'il passe bien par le point a, car on a $\sum_{i=0}^n a_i\, \partial_i P(a) = d \cdot P(a) = 0$, d'après la formule d'Euler.

Le lien avec les définitions du paragraphe précédent est donné par la proposition qui suit. Soit $a = [a_0, \dots, a_n] \in \mathscr{V}(P)$. Fixons un indice i_0 tel que $a_{i_0} \neq 0$. Pour alléger la notation, prenons $i_0 = 0$ i.e. plaçons-nous dans le cas où $a = [1, a_1, \dots, a_n]$ appartient à l'espace affine $\mathscr{E}$ complémentaire de l'hyperplan projectif $\mathbf{H}_\infty$ donné par l'équation $x_0 = 0$. Comme d'habitude, identifions $\mathscr{E}$ à l'hyperplan affine $\mathscr{H} = \{(1, x_1, \dots, x_n)\}$ de k^{n+1}, et identifions $\mathscr{H}$ à k^n via $(1, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow (x_1, \dots, x_n)$. Notons $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ le polynôme défini par :

$$f(X_1, \dots, X_n) = P(1, X_1 \dots, X_n)$$

[10] Par contre, on ne peut pas parler de la « valeur » de P au point $[x]$.

et notons $\widehat{a} = (a_1, \dots, a_n)$ le point de k^n correspondant à $a \in \mathscr{E}$. Alors, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $\partial_i f(X_1, \dots, X_n) = \partial_i P(1, X_1 \dots, X_n)$ et donc, en particulier, $\partial_i f(\widehat{a}) = \partial_i P(a)$.

Proposition 13.13. — *Avec les notations précédentes, on a :*

(i) *a est un point lisse de $\mathscr{V}(P)$ ssi $\widehat{a}$ est un point lisse de $\mathscr{V}(f)$. Dans ce cas, on a :*

(ii) $\boxed{T_a\mathscr{V}(P) \cap \mathscr{E} = T_{\widehat{a}}\mathscr{V}(f).}$

(iii) *Réciproquement, $T_a\mathscr{V}(P)$ est le « complété projectif » de $T_{\widehat{a}}\mathscr{V}(f)$, i.e. si ce dernier est défini par l'équation affine $c_0 + \sum_{i=1}^n c_i X_i = 0$ alors $T_a\mathscr{V}(P)$ est défini par l'équation homogène $c_0 X_0 + \sum_{i=1}^n c_i X_i = 0$.*

Démonstration. — (i) Si $\widehat{a}$ est un point lisse de $\mathscr{V}(f)$, il existe un indice $i \geq 1$ tel que $\partial_i f(\widehat{a}) = \partial_i P(a)$ soit non nul, donc a est un point lisse de $\mathscr{V}(P)$. Réciproquement, supposons que a soit un point lisse de $\mathscr{V}(P)$. Alors il existe au moins un indice $i \in \{0, \dots, n\}$ tel que $\partial_i P(a)$ soit non nul. Si $i = 0$ était le seul indice ayant cette propriété on aurait, d'après la formule d'Euler,

$$0 = P(a) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, \partial_i P(a) = 1 \cdot \partial_0 P(a) \neq 0,$$

ce qui est impossible. Donc il existe au moins un indice $i \geq 1$ tel que $\partial_i P(a) = \partial_i f(\widehat{a})$ soit non nul, donc $\widehat{a}$ est un point lisse de $\mathscr{V}(f)$. Ceci prouve (i).

Dans ce cas, $T_a\mathscr{V}(P) \cap \mathscr{E}$ s'identifie à l'ensemble des points $(x_1, \dots, x_n)$ de k^n tels que

$$(\dagger) \qquad 0 = \partial_0 P(a) + \sum_{i=1}^{n} x_i\, \partial_i P(a) = \partial_0 P(a) + \sum_{i=1}^{n} x_i\, \partial_i f(\widehat{a}).$$

Or, d'après la formule d'Euler, on a $\partial_0 P(a) = -\sum_{i=1}^n a_i\, \partial_i P(a) = -\sum_{i=1}^n a_i\, \partial_i f(\widehat{a})$ et donc l'égalité $(\dagger)$ se récrit en :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)\, \partial_i f(\widehat{a})$$

ce qui est la définition de l'hyperplan tangent $T_{\widehat{a}}\mathscr{V}(f)$.

Réciproquement, si $T_{\widehat{a}}\mathscr{V}(f)$ est défini par l'équation affine $c_0 + \sum_{i=1}^n c_i X_i = 0$, celle-ci est unique à homothétie près i.e. il existe $\lambda \in k^*$ telle que $c_i = \lambda \partial_i P(a)$ pour $i = 0, \dots, n$ et donc $T_a\mathscr{V}(P)$ est défini par l'équation homogène $c_0 X_0 + \sum_{i=1}^n c_i X_i = 0$. [11] $\square$

Corollaire 13.14. — *Soit $\mathbb{P}(V)$ un espace projectif de dimension n. Soient $[x_0, \dots, x_n]$ un système de coordonnées homogènes, $P \in k[X_0, \dots, X_n]$ un polynôme homogène de degré $d \geq 1$ et $\mathscr{V}$ l'hypersurface définie par P, i.e. :*

$$\mathscr{V} = \big\{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}(V) \mid P(x_0, \dots, x_n) = 0\big\}.$$

Soit $[y_0, \dots, y_n]$ un second système de coordonnées homogènes.

(i) *Il existe un polynôme Q homogène de degré d, unique à homothétie près, tel que $Q(y_0, \dots, y_n) = P(x_0, \dots, x_n)$ et l'on a*

$$\mathscr{V} = \big\{[y_0, \dots, y_n] \in \mathbb{P}(V) \mid Q(y_0, \dots, y_n) = 0\big\}.$$

[11] Ceci est un cas particulier de la correspondance bijective entre sous-espaces affines de $\mathscr{E} = \mathbb{P}^n(k) - \mathbf{H}_\infty$ et sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}^n(k)$ non contenus dans $\mathbf{H}_\infty$, cf. Prop. 8.17 (semaine 3).

(ii) *Un point $p \in \mathscr{V}$ est lisse relativement aux coordonnées x_i ssi il l'est relativement aux coordonnées y_i et dans ce cas, notant respectivement a_i et b_i ses coordonnées, on a :*

$$\begin{aligned} T_p\mathscr{V} &= \big\{[x_0,\dots,x_n] \in \mathbb{P}(V) \mid \sum_{i=0}^{n} x_i\,\partial_{X_i}P(a_0,\dots,a_n) = 0\big\} \\ &= \big\{[y_0,\dots,y_n] \in \mathbb{P}(V) \mid \sum_{i=0}^{n} y_i\,\partial_{Y_i}Q(b_0,\dots,b_n) = 0\big\}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ les bases de k^{n+1} (uniques à homothétie près) correspondant aux coordonnées homogènes x_i et y_i. Notons a_{ij}, resp. a'_{ij}, les coefficients de la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$, resp. $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$. Alors on a $x_i = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\,y_j$ pour tout $i = 0,\dots,n$. Faisons le changement de variables

$$\forall i = 0,\dots,n, \qquad X_i = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\,Y_j$$

(qui équivaut à $Y_i = \sum_{i=0}^{n} a'_{ij}\,X_j$ pour tout i). Alors il existe un unique polynôme $Q \in k[Y_0,\dots,Y_n]$ tel que $P(X_0,\dots,X_n) = Q(Y_0,\dots,Y_n)$, et Q est homogène de degré d.

Si l'on remplace les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ par des bases homothétiques $\mu\mathscr{B}$ et $\nu\mathscr{C}$ alors A est changée en λA, où $\lambda = \mu^{-1}\nu$, et Q est changé en $\lambda^d Q$. L'assertion (i) en découle.

Le point (ii) découle de la proposition 13.13 combinée à l'indépendance des coordonnées dans le cas affine établie dans la proposition 13.10. [12] □

---

[12] On pourrait démontrer directement l'indépendance des coordonnées dans le cas projectif, mais il est plus rapide d'utiliser le travail déjà fait dans le cas affine.