NOTES SUR L'ESPACE DES SPHÈRES

Le but de ces notes est de fournir une introduction à l'article de Christian Arber et Frédéric Jean : « La mécanique des sphères de Lie : un futur pour la CAO ? » ([AJ]).

Notation. — On a essayé de noter de façon consistante : p, x des éléments de $\mathbb{R}^n$, q, y des éléments de $\mathbb{R}^{n+1}$ et k, h, g des réels. Ainsi, un triplet (p, k, h) est un élément de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ et un couple (q, g) un élément de $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$; de plus $[p, k, h]$ et $[q, g]$ désignent leurs images dans les espaces projectifs correspondants.

1. Sphères, points et hyperplans

Soit n un entier ≥ 2. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire standard $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, on note $\|x\|$ la norme euclidienne de x et, pour abréger l'écriture, on écrira souvent x^2 au lieu de $\|x\|^2$.

Pour fixer les idées, supposons pour un instant que $n = 2$. Pour réaliser une esquisse, faite de points, droites et cercles, soumis à certaines contraintes (dont par exemple des conditions sur les angles) on voudrait considérer les cercles, droites et points de $\mathbb{R}^2$ comme des « points » d'un nouvel espace. On obtient un tel espace comme suit.

Revenons au cas général $n \geq 2$. Pour $p \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$, la sphère $S(p, r)$ de centre p et de rayon r (qui est le point p si $r = 0$) a pour équation $r^2 = \|x - p\|^2 = x^2 - 2p \cdot x + p^2$, c.-à-d. :

$$kx^2 - p \cdot x + h = 0 \qquad \text{avec} \quad k = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad h = \frac{p^2 - r^2}{2}. \tag{1}$$

Avec ces notations, on a : $p^2 - 4kh = r^2 \geq 0$.

D'autre part, tout hyperplan affine H de $\mathbb{R}^n$ est donné par une équation (unique à homothétie près) :

$$-p \cdot x + h = 0 \qquad \text{avec} \quad p \in \mathbb{R}^n - \{0\} \quad \text{et} \quad h \in \mathbb{R} \tag{2}$$

et comme $p \neq 0$ on a : $p^2 - 4kh = p^2 > 0$.

Dans la suite, (p, k, h) désignera un point de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ (i.e. $x \in \mathbb{R}^n$ et $k, h \in \mathbb{R}$) et $[p, k, h]$ désignera son image dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2)$. On munit cet espace vectoriel de la forme quadratique Q définie par

$$Q(p, k, h) = p^2 - 4kh. \tag{†}$$

Alors Q est non dégénérée, de signature $(n + 1, 1)$.

Définition 1.1. — L'espace $\mathscr{E}_n$ des sphères, hyperplans et points de $\mathbb{R}^n$ est

$$\mathscr{E}_n = \{[p, k, h] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2) \mid Q(p, k, h) \geq 0\}.$$

Ceci est bien défini, car si $(\lambda p, \lambda k, \lambda h)$, où $\lambda \in \mathbb{R}^\times$, est un autre représentant de $[p,k,h]$, alors $Q(\lambda p, \lambda k, \lambda h) = \lambda^2 Q(p,k,h)$ est de même signe (> 0 ou $= 0$) que $Q(p,k,h)$, donc le signe de $Q(p,k,h)$ ne dépend que du point $[p,k,h]$.

À tout élément X de l'ensemble E_n des sphères, points et hyperplans de $\mathbb{R}^n$, on associe le point $[p,k,h]$ de $\mathscr{E}_n$, où $(p,k,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ est une équation de X de la forme (1) ou (2). Comme X est déterminé par son équation, cette application est injective. On va voir qu'elle est *presque* bijective.

En effet, soit $[p,k,h] \in \mathscr{E}_n$. Si $k \neq 0$, on peut supposer que $k = 1/2$ et alors, comme $Q(p, 1/2, h) = p^2 - 2h \geq 0$, l'équation

$$0 = \frac{1}{2}x^2 - p \cdot x + h = \frac{1}{2}\big(\|x - p\|^2 + 2h - p^2\big)$$

est celle de la sphère de centre p et de rayon $r = \sqrt{Q(p,k,h)}$. (C'est le point p si $Q(p,k,h) = 0$.) De même, si $k \neq 0$ mais $p \neq 0$ alors $-p \cdot x + h = 0$ est l'équation d'un hyperplan de direction $(\mathbb{R}p)^\perp$.

On voit donc que le seul point de $\mathscr{E}_n$ qui n'est pas dans l'image de E_n est le point pour lequel $k = 0$ et $p = 0$, i.e. le point $[0,0,1]$ que l'on notera ∞.

Terminologie. — Par abus de langage, on dira qu'un élément $[\xi] \in \mathscr{E}_n$ est « de norme > 0 » (resp. « de norme 0 ») si $Q(\xi) > 0$ (resp. $Q(\xi) = 0$).

Définition 1.2. — Introduisons sur $\mathbb{R}^{n+2}$ le « produit scalaire » $\langle -, - \rangle$ qui est la forme polaire de Q (attention, il n'est **pas** défini positif) : si $\xi = (p,k,h)$ et si ξ' est défini de manière analogue, on a :

$$\langle \xi, \xi' \rangle = p \cdot p' - 2(kh' + hk'). \tag{$\dagger$}$$

2. Angles

Rappel 2.1. — L'angle (non orienté) de deux vecteurs non nuls u, v est l'unique élément $\theta = \widehat{uv}$ de $[0,\pi]$ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|}$. On peut aussi dire que c'est l'angle (non orienté) des demi-droites engendrées par u et v.

Pour définir l'angle (non orienté) des droites $D = \mathbb{R}u$ et $D' = \mathbb{R}v$, posant $w = -u$ on observe que $\widehat{uv} + \widehat{vw} = \pi$ (faire un dessin dans $\mathbb{R}^2$) d'où $\widehat{vw} = \pi - \widehat{uv}$ et $\cos(\widehat{vw}) = -\cos(\widehat{uv})$. On définit donc l'angle (non orienté) des droites D, D' comme l'unique élément $\theta = \widehat{DD'}$ de $[0, \pi/2]$ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{|u \cdot v|}{\|u\|\,\|v\|}$, i.e. $\cos(\theta)$ est la racine carrée de $(u \cdot v)^2 / u^2 v^2$.

***Définition 2.2* (Angle de deux hyperplans)**. — Soient H, H' deux hyperplans affines de $\mathbb{R}^n$. On définit leur angle $\theta = \widehat{HH'} \in [0, \pi/2]$ comme étant l'angle des droites vectorielles D et D' orthogonales aux directions de H et H' respectivement. On dit que H et H' sont orthogonaux ssi D et D' le sont, i.e. si H et H' sont donnés par des équations $p \cdot x = h$ et $p' \cdot x = h'$ avec $p \cdot p' = 0$.

D'autre part, remarquons que, sauf si H et H' sont parallèles, $H \cap H'$ est un sous-espace affine de dimension $n - 2$, qui est donc à la fois un hyperplan de H et de H'.

***Définition 2.3* (Angle d'un hyperplan et d'une sphère)**

Soit $S = S(O, R)$ une « vraie » sphère de $\mathbb{R}^n$, de centre O et de rayon $R > 0$, et soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ tel que $S \cap H \neq \varnothing$. Lorsque $n = 3$, on « voit » que $H \cap S$ est un cercle $\mathscr{C}$ de H de centre la projection orthogonale I de O sur H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - OI^2}$ (faire un dessin), et donc pour tout $p \in \mathscr{C}$ l'angle θ des vecteurs $\overrightarrow{Op}$ et $\overrightarrow{OI}$ appartient à

$[0, \pi/2]$ et vérifie $\cos(\theta) = OI/R$, donc ne dépend pas de p. On dit que c'est **l'angle entre H et S**. En particulier, on voit que H et S sont orthogonaux ssi H passe par le centre O de S (faire un dessin !).

Ceci se généralise en toute dimension $n \geq 2$: soit $S = S(O, R)$ une « vraie » sphère de $\mathbb{R}^n$, de centre O et de rayon $R > 0$, et soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ tel que $S \cap H \neq \varnothing$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $O = (0, \ldots, 0)$ et que H est donné par l'équation $x_n = c$ avec $|c| \leq R$, i.e. par $e_n \cdot x = c$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $c = \pm R$ alors H est l'hyperplan tangent à S au point $p = (0, \ldots, 0, \pm R) = I$ donc l'angle entre H et S est nul. On peut donc supposer $|c| < R$; alors

$$H \cap S = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, c) \in H \mid x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = R^2 - c^2\}$$

est la sphère $\mathscr{S}$ de H de centre $I = (0, \ldots, 0, c)$ et de rayon $r = \sqrt{R^2 - c^2}$, et pour tout $p \in \mathscr{S}$ l'angle θ des vecteurs $\overrightarrow{Op}$ et $\overrightarrow{OI}$ vérifie $\cos(\theta) = OI/R = |c|/R$, donc ne dépend pas de p. On dit que c'est **l'angle entre H et S**. Alors H et S sont orthogonaux ssi $c = 0$ i.e. ssi H passe par le centre O de S.

***Définition 2.4* (Angle de deux sphères).** — Soient $S = S(p, r)$ et $\Sigma = S(q, R)$ deux vraies sphères de $\mathbb{R}^n$, avec $p \neq q$ et $S \cap \Sigma \neq \varnothing$. Alors $S \cap \Sigma$ est une sphère $\mathscr{S}$ de dimension $n-2$ contenue dans un hyperplan H orthogonal au vecteur $\overrightarrow{pq}$ et, pour tout $x \in \mathscr{S}$, l'angle $\theta \in [0, \pi/2]$ des droites (px) et (qx) ne dépend pas de x ; on dit que c'est **l'angle entre S et Σ**.

Démonstration. — Commençons par remarquer que l'existence d'un point $x \in S \cap \Sigma$ entraîne, par l'inégalité triangulaire, que $pq \leq px + xq = r + R$ et $r = px \leq pq + qx = pq + R$ et, de même, $R \leq pq + r$. Ces trois inégalités se résument en les inégalités :

$$(*) \qquad |R - r| \leq pq \leq r + R$$

et l'on verra plus bas que cette condition nécessaire est aussi *suffisante* pour que $S \cap \Sigma \neq \varnothing$.

Ceci étant dit, S et Σ sont données par : $x^2 - 2p \cdot x + p^2 = r^2$ et $x^2 - 2q \cdot x + q^2 = R^2$. D'une part, en faisant la différence, on voit que $\mathscr{S} = S \cap \Sigma$ est l'intersection de S (ou Σ) avec l'hyperplan H d'équation

$$2\,\overrightarrow{pq} \cdot x = r^2 - R^2 + q^2 - p^2$$

donc c'est une sphère (de dimension $n-2$) de H. D'autre part, soit $x \in \mathscr{S}$ et soit $\varphi \in [0, \pi]$ l'angle des vecteurs $\overrightarrow{px}$ et $\overrightarrow{qx}$. Comme

$$\|\overrightarrow{pq}\|^2 = \|\overrightarrow{px} + \overrightarrow{xq}\|^2 = r^2 + R^2 - 2\,\overrightarrow{px} \cdot \overrightarrow{qx} = r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi)$$

alors $\cos(\varphi)$ égale $\dfrac{r^2 + R^2 - \|\overrightarrow{pq}\|^2}{2rR}$ (1) donc ne dépend pas de x. A fortiori, l'angle $\theta \in [0, \pi/2]$ des droites (px) et (qx), défini par $\cos(\theta) = |\cos(\varphi)|$, ne dépend pas de x. $\square$

***Lemme 2.5*.** — *Soient $S = S(p, r)$ et $\Sigma = S(q, R)$ deux vraies sphères de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 2$. Alors $S \cap \Sigma \neq \varnothing$ ssi $|r - R| \leq pq \leq r + R$.*

Démonstration. — Si $p = q$ alors $S \cap \Sigma \neq \varnothing$ ssi $r = R$, donc l'énoncé est vrai dans ce cas. Et si $p \neq q$ on a déjà démontré l'implication $\Rightarrow$. Il reste à démontrer la réciproque, i.e. que si $p \neq q$ et $|r - R| \leq pq \leq r + R$ alors $S \cap \Sigma \neq \varnothing$.

(1) Remarquons au passage que les inégalités $-2rR \leq r^2 + R^2 - (pq)^2 \leq 2rR$ équivalent à $(r-R)^2 \leq (pq)^2 \leq (r+R)^2$, c.-à-d. $|r - R| \leq pq \leq r + R$.

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine de $\mathbb{R}^n$ contenant p et q (un tel plan existe puisque $n \geq 2$). Prenons sur $\mathscr{P}$ des coordonnées orthonormées telles que $p = (0,0)$ et $q = (c, 0)$, où $c = pq > 0$. Les systèmes suivants sont équivalents :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ x^2 - 2cx + y^2 = R^2 - c^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ x = x_0 = \dfrac{c^2 + r^2 - R^2}{2c} \end{cases}$$

et le second système admet (au moins) une solution y ssi $x_0^2 \leq r^2$, i.e. ssi on a :

$$(c^2 + r^2 - R^2)^2 - 4r^2c^2 = \big((r-c)^2 - R^2\big)\big((r+c)^2 - R^2\big) \leq 0$$

i.e. ssi les deux facteurs de droite sont de signe différent. Comme $r, c > 0$ on a $(r-c)^2 < (r+c)^2$ donc la condition précédente équivaut à

$$(\diamondsuit) \qquad (r-c)^2 \leq R^2 \leq (r+c)^2.$$

L'inégalité de droite équivaut à $R \leq r + c$ i.e. $R - r \leq c$, et celle de gauche équivaut à $|r - c| \leq R$ qui équivaut à $r - R \leq c$ et $c \leq R + r$. Donc $(\diamondsuit)$ équivaut à $|r - R| \leq c \leq r + R$ et, sous cette condition, $S \cap \Sigma$ contient au moins un point (x_0, y) de $\mathscr{P}$. $\square$

Remarque 2.6. — Une *autre démonstration*, peut-être plus facile à retenir, est la suivante. On commence par remarquer que $S \cap \Sigma \cap \mathscr{P}$ est non vide ssi $\mathscr{P}$ contient un triangle (éventuellement aplati) dont les longueurs des côtés valent r, R et $c = pq$. Pour trouver un tel triangle Opq, on prend des coordonnées orthonormées telles que $O = (0,0)$ et $q = (R, 0)$ et l'on pose $x_\theta = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ pour θ variant dans $[0, \pi]$. Alors $(x_\theta q)^2$ égale $f(\theta) = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$ et $f'(\theta) = 2rR\sin\theta$ est > 0 sur $]0, \pi[$ donc f est strictement croissante sur $[0, \pi]$. Comme $f(0) = (R - r)^2$ et $f(\pi) = (R + r)^2$, on en déduit que pour tout c tel que $|r - R| \leq c \leq r + R$, il existe un unique θ tel que $x_\theta q = c$.

***Définition 2.7* (Angles dans $\mathscr{E}_n$)**. — Revenons à l'espace des sphères $\mathscr{E}_n \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2)$ et soient $[\xi]$ et $[\eta]$ deux éléments de norme > 0. On peut alors définir la quantité :

$$(\star) \qquad A([\xi], [\eta]) = \frac{\langle \xi, \eta \rangle^2}{Q(\xi)Q(\eta)} \in \mathbb{R}_+.$$

Ceci est bien défini, car si on remplace ξ et η par $\lambda\xi$ et $\mu\eta$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^\times$, alors numérateur et dénominateur sont multipliés par $(\lambda\mu)^2$.

Si $A([\xi], [\eta]) \in [0, 1]$, i.e. **si** $\langle \xi, \eta \rangle^2 \leq Q(\xi)Q(\eta)$, **alors** on définit l'angle $\theta \in [0, \pi/2]$ de $[\xi]$ et $[\eta]$ par $\cos(\theta) = \sqrt{A([\xi], [\eta])}$.

Proposition 2.8. — *Soient $[\xi], [\eta] \in \mathscr{E}_n$ deux éléments de norme > 0, qui correspondent donc à deux éléments S, S' de l'ensemble des vraies sphères ou hyperplans de $\mathbb{R}^n$. Alors $A([\xi], [\eta]) \leq 1$ ssi $S \cap S' \neq \varnothing$ et dans ce cas l'angle $\theta \in [0, \pi/2]$ déterminé par $\cos^2(\theta) = A([\xi], [\eta])$ est précisément l'angle entre S et S'.*

On démontrera ceci plus loin (ou plus tard).

3. Sphère S^n et projections stéréographiques $S^n - \{q_0\} \to \mathbb{R}^n$.

Notation 3.1. — On note S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, i.e. $S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \cdot y = 1\}$.

***Définition 3.2* (Grands et petits cercles sur S^2)**. — Sur S^2, on appelle grand cercle (resp. petit cercle) l'intersection de S^2 avec un plan H contenant l'origine O (resp. ne contenant pas O mais rencontrant S^2). Cette terminologie s'explique comme suit : soit q un vecteur unitaire orthogonal à H ; alors H est donné par une équation $q \cdot y = c$ et si (y_1, y_2, y_3) sont les coordonnées dans une base orthonormée (f_1, f_2, f_3) telle que $f_3 = q$, alors $\mathscr{C} = H \cap S^2$ est donné par : $y_3 = c$ et $y_1^2 + y_2^2 + c^2 = 1$, donc est non vide ssi $|c| \leq 1$. Dans ce cas, $\mathscr{C}$ est le cercle de H de centre $I = (0,0,c)$ et de rayon $r = \sqrt{1-c^2} \leq 1$. C'est un « grand » cercle ssi $r = 1$ i.e. ssi $c = 0$ i.e. ssi H passe par l'origine O (i.e. ssi $\mathscr{C}$ est un cercle « équatorial » de S^2). Cette définition se généralise comme suit.

Définition 3.3 **(Grandes et petites hypersphères de S^n)**
Soit $n \geq 2$. Si H est un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ non tangent à S^n tel que $S^n \cap H \neq \varnothing$, alors $\Sigma = S^n \cap H$ est une sphère de dimension $n-2$ de H, qu'on appelle une *grande* (resp. *petite*) hypersphère de S^n si elle est de rayon 1 (resp. < 1) i.e. si $O \in H$ (resp. $O \notin H$). Dans la suite, on dira simplement (grandes ou petites) « sphères » au lieu de « hypersphères ».

Chaque sphère Σ de S^n est donc formée des points $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ qui vérifient, en plus de l'équation $y^2 = 1$, une équation $q \cdot y = c$, où $q \in S^n$ et c est un réel tel que $|c| < 1$ i.e. $c^2 < 1$. Noter que (q,c) et $(-q,-c)$ donnent la même équation donc, quitte à changer q en $-q$, on peut supposer $c \geq 0$. De façon équivalente, chaque sphère est donnée par un couple (q,g), unique à homothétie près, où $q = (q_1, \dots, q_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ et $g \in \mathbb{R}$ vérifient $K(q,g) > 0$, où K est la forme quadratique définie par

$$K(q,g) = q^2 - g^2 = q_1^2 + \cdots + q_{n+1}^2 - g^2.$$

Les grandes sphères correspondent au cas où $g = 0$. Par ailleurs, si l'on considère les couples (q,g) comme plus haut mais qui vérifient $K(q,g) = 0$, on obtient les *points* q de S^n (chacun étant l'intersection de S^n avec l'hyperplan tangent $T_q S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q \cdot y = q^2 = 1\}$). Ceci conduit à la définition suivante

Définition 3.4. — L'espace $\mathscr{F}_n$ des sphères et points de S^n est

$$\mathscr{F}_n = \{[q,g] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}) \mid K(q,g) \geq 0\}.$$

Ceci est bien défini, car si $(\lambda q, \lambda g)$, où $\lambda \in \mathbb{R}^\times$, est un autre représentant de $[q,g]$, alors $K(\lambda q, \lambda g) = \lambda^2 K(q,g)$ est de même signe (> 0 ou $= 0$) que $K(q,g)$.

On va montrer que le choix d'un point q_0 de S^n comme « point à l'infini » fournit une bijection entre $S^n - \{q_0\}$ et $\mathbb{R}^n$ et entre l'ensemble des vraies sphères de S^n et celui des vraies sphères ou hyperplans de $\mathbb{R}^n$. (Ces bijections dépendent du choix de q_0.)

Définition 3.5. — Soit $q_0 \in S^n$ et soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal à la droite $\mathbb{R}q_0$. Alors $q_0 + H$ est l'hyperplan tangent à S^n en q_0, donc pour tout $q \in S^n$ distinct de q_0 la droite $(q_0 q)$ n'est pas contenue dans $q_0 + H$ donc coupe H en un unique point, noté $\tau_{q_0}(q)$. Alors, la **projection stéréographique** de $S^n - \{q_0\}$ sur H est l'application τ_{q_0} qui à tout $q \in S^n$ distinct de q associe le point $\tau_{q_0}(q)$ de H.

Proposition 3.6. — (i) *τ_{q_0} est une* **bijection** *de $S^n - \{q_0\}$ sur H.*

(ii) *Plus précisément, pour tout $q \in S^n - \{q_0\}$ on a $\tau_{q_0}(q) = \dfrac{1}{1 - q \cdot q_0}\big(q - (q \cdot q_0)q_0\big)$ et la bijection inverse $\phi_{q_0} : H \to S^n - \{q_0\}$ est donnée par*

$$x \mapsto \frac{2}{1+x^2}\, x - \frac{1-x^2}{1+x^2}\, q_0.$$

(iii) *Si $q_0 = (0, \dots, 0, -1)$ est le « pôle Sud » de S^n, alors $H = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ et pour tout $q = (u,f) \in S^n$, où $u \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}$ et $f \neq -1$, on a $\tau_{q_0}(q) = \dfrac{1}{1+f}\, u$ et la bijection inverse $\phi_{q_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ est donnée par $x \mapsto \left(\dfrac{2}{1+x^2}\, x, \dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.*

Démonstration. — (ii) Fixons $q_0 \in S^n$. Alors la projection sur $\mathbb{R}q_0$, resp. sur $H = (\mathbb{R}q_0)^\perp$, est donnée par $q \mapsto (q\cdot q_0)q_0$, resp. $q \mapsto \pi_H(q) = q-(q\cdot q_0)q_0$. Comme $q = (q\cdot q_0)q_0 + \pi_H(q)$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$q_0 + \lambda(q-q_0) = \lambda\pi_H(q) + \big(\lambda(q\cdot q_0 - 1)+1\big)q_0$$

et ceci appartient à H ssi $\lambda = \lambda_0 = \dfrac{-1}{q\cdot q_0 - 1} = \dfrac{1}{1-q\cdot q_0}$, d'où

$$(*) \qquad \tau_{q_0}(q) = \lambda_0\, \pi_H(q) = \frac{1}{1-q\cdot q_0}\big(q-(q\cdot q_0)q_0\big).$$

Pour montrer que τ_{q_0} est bijective, on observe que, comme $q^2 = q_0^2 = 1$ on a :

$$\|\tau_{q_0}(q)\|^2 = \frac{1}{(1-q\cdot q_0)^2}\big(1+(q\cdot q_0)^2 - 2(q\cdot q_0)^2\big) = \frac{1+q\cdot q_0}{1-q\cdot q_0}$$

et donc $1+\|\tau_{q_0}(q)\|^2 = \dfrac{2}{1-q\cdot q_0}$.

Donc, posant $x = \tau_{q_0}(q)$ on a $\pi_H(q) = \dfrac{2}{1+x^2}\,x$ et $-q\cdot q_0 = \dfrac{2}{1+x^2} - 1 = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ d'où :

$$(**) \qquad q = \frac{2}{1+x^2}\,x - \frac{1-x^2}{1+x^2}\,q_0.$$

Réciproquement, pour tout $x \in H$, notons $\phi_{q_0}(x)$ le membre de droite de $(**)$. Comme $x\cdot q_0 = 0$ et $q_0^2 = 1$, on a

$$\|\phi_{q_0}(x)\|^2 = \frac{4x^2 + (1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} = 1$$

et $1-\phi_{q_0}(x)\cdot q_0 = 1 + \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{2}{1+x^2}$ donc $\tau_{q_0}\big(\phi_{q_0}(x)\big) = x$. Ceci montre que τ_{q_0} et ϕ_{q_0} sont des bijections réciproques, d'où (ii) et (i).

Dans le cas particulier où $q_0 = (0,\dots,0,-1)$, H égale $\mathbb{R}^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_{n+1} = 0\}$ et en identifiant $\mathbb{R}^{n+1}$ à l'ensemble des couples (u,f) où $u \in H$ et $f \in \mathbb{R}$ on obtient les formules indiquées. □

Proposition 3.7. — *τ_{q_0} envoie chaque vraie sphère Σ de S^n telle que $q_0 \in \Sigma$ (resp. $q_0 \notin \Sigma$) sur un hyperplan (resp. une vraie sphère) de $H = (\mathbb{R}q_0)^\perp$ et l'on obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des vraies sphères de S^n et celui des vraies sphères ou hyperplans de H, et elle se prolonge en une bijection entre $\mathscr{F}_n$ et $\mathscr{E}_n$.*

En particulier, si $q_0 = (0,\dots,0,-1)$ on obtient une bijection entre $\mathscr{E}_n$ et $\mathscr{F}_n$ donnée par $[p,k,h] \mapsto [p, k-h, k+h]$, qui envoie le point ∞ de $\mathscr{E}_n$ sur le point $[0,-1,1]$.

Démonstration. — Fixons $q_0 \in S^n$. Soit Σ une vraie sphère de S^n, formée des points $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ qui vérifient $y^2 = 1$ et $a\cdot y = c$, où $a \in S^n$ et c est un réel tel que $0 \le c < 1$.

Soit $q \in \Sigma$ tel que $q \neq q_0$. Posons $x = \tau_{q_0}(q)$. D'après $(**)$ on a $x = \dfrac{1+x^2}{2}q + \dfrac{1-x^2}{2}q_0$ et donc, comme $a\cdot q = c$, on a :

$$(1) \qquad a\cdot x = \frac{1+x^2}{2}\,c + \frac{1-x^2}{2}\,(a\cdot q_0) = \frac{1}{2}(c-a\cdot q_0)x^2 + \frac{1}{2}(c+a\cdot q_0)$$

et de plus, comme $x \in H$, le membre de gauche est égal à $\pi_H(a)\cdot x$, donc x vérifie l'équation :

$$(2) \qquad \frac{1}{2}(c-a\cdot q_0)x^2 - \pi_H(a)\cdot x + \frac{1}{2}(c+a\cdot q_0) = 0$$

qui est celle d'une sphère (resp. un hyperplan) $\mathscr{S}$ de H ssi $c \neq a \cdot q_0$ (resp. $c = a \cdot q_0$) i.e. ssi $q_0 \notin \Sigma$ (resp. $q_0 \in \Sigma$). Ceci montre que τ_{q_0} envoie la sphère de S^n définie par le couple (a, c) dans la sphère ou hyperplan de H définie par le triplet (p, k, h), où $p = \pi_H(a)$, $k = (c - a \cdot q_0)/2$ et $h = (c + a \cdot q_0)/2$.

Réciproquement, soient $p \in H$, $k, h \in \mathbb{R}$ tels que $p^2 - 4kh > 0$ et soit x un point de H vérifiant l'équation :

$$kx^2 - p \cdot x + h = 0. \tag{3}$$

Posons $a = p + (h - k)q_0$ et $q = \phi_{q_0}(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}\, x - \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\, q_0$. Alors on a :

$$a \cdot q = \frac{2p \cdot x - (1 - x^2)(h - k)}{1 + x^2} = \frac{2kx^2 + 2h + x^2(h - k) + k - h}{1 + x^2} = k + h,$$

la seconde égalité découlant de (3). Ceci montre que $q = \phi_{q_0}(x)$ vérifie l'équation $a \cdot q = k + h$, et comme

$$a^2 - (k + h)^2 = p^2 + (h - k)^2 - (k + h)^2 = p^2 - 4kh > 0,$$

ceci est bien l'équation d'une vraie sphère de S^n. Ceci montre que ϕ_{q_0} envoie la sphère ou hyperplan de H définie par le triplet (p, k, h) dans la sphère de S^n définie par le couple (a, c), où $a = p + (h - k)q_0$ et $c = k + h$. Combiné avec la première partie de la démonstration, ceci prouve la bijection annoncée.

De plus, chaque point a de S^n correspond au point $[a, 1]$ de $\mathscr{F}_n$ et la bijection réciproque de la précédente se prolonge en une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $S^n - \{q_0\}$, qui envoie tout $x \in \mathbb{R}^n$ sur le point $[\phi_{q_0}(x), 1]$. Cette bijection envoie le point $\infty = [0, 0, 1]$ de $\mathscr{E}_n$ (l'unique point de norme nulle qui n'est pas dans $\mathbb{R}^n$) sur le point $[q_0, 1]$. Lorsque q_0 est le pôle Sud $(0, \dots, 0, -1)$, on obtient que ∞ est envoyé sur le point $[q_0, 1] = [0, -1, 1]$. $\square$

4. Le groupe de Lie $\mathrm{SO}_+(n+1,1)$

Dans ce paragraphe d'introduction aux groupes de Lie (réels ou complexes), on donne une présentation basée sur les sous-groupes algébriques de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (et leur composante neutre), ceci afin d'éviter de parler de sous-variétés de $\mathbb{R}^N$ de classe C^∞.

Définition 4.1. — Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le groupe $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$ (défini par la condition dét $\neq 0$) et la multiplication $G \times G \to G$, de même que l'application $g \mapsto g^{-1}$, sont des applications de classe C^∞, qui sont même « polynomiales ». On dit que c'est un **groupe de Lie** (réel ou complexe), qui est de plus un « groupe de Lie algébrique ».

Définition 4.2. — L'**algèbre de Lie** de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{K})$. Il est muni du crochet de Lie défini par $[X, Y] = XY - YX$, pour tout $X, Y \in M_n(\mathbb{K})$. Ce crochet est *alterné*, i.e. $[X, X] = 0$, donc *antisymétrique*, i.e. $[Y, X] = -[X, Y]$, et il vérifie *l'identité de Jacobi* :

$$\forall X, Y, Z \in M_n(\mathbb{K}), \qquad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

(Observer que les $[,]$ ne bougent pas et les lettres sont permutées cycliquement.) Une autre façon de l'écrire (et de la mémoriser) est de dire que l'application $\mathrm{ad}(X) : Y \mapsto [X, Y]$ est une *dérivation* du crochet de Lie, i.e. :

$$\forall Y, Z \in M_n(\mathbb{K}), \qquad \mathrm{ad}(X)\big([Y, Z]\big) = [\mathrm{ad}(X)(Y), Z] + [Y, \mathrm{ad}(X)(Z)].$$

Définition 4.3. — Un **groupe de Lie algébrique** est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ défini par des équations polynomiales : par exemple $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \text{dét}(A) = 1\}$ est un tel groupe.

Définition 4.4. — Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ défini par des équations polynomiales $P_1, \dots, P_r$. Pour $i = 1, \dots, r$, notons f_i la différentielle de P_i au point I_n (matrice identité) ; ce sont des formes linéaires sur $M_n(\mathbb{K})$. Par définition, l'**algèbre de Lie** de G, notée $\mathrm{Lie}(G)$, est l'intersection des $\mathrm{Ker}(f_i)$. On peut montrer, et on l'admettra, que $\mathrm{Lie}(G)$ est une **sous-algèbre de Lie** de $M_n(\mathbb{K})$, i.e. pour tout $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$, on a $XY - YX \in \mathrm{Lie}(G)$.(2)

Exemple 4.5. — Soit ε une variable de carré nul, i.e. ε désigne l'image de T dans l'anneau quotient $\mathbb{K}[T]/(T^2)$, noté $\mathbb{K}[\varepsilon]$. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$ on a

$$\mathrm{dét}(I_n + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon\, \mathrm{Tr}(A).$$

On en déduit que la différentielle de dét en I_n est la trace Tr, donc $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}))$ est le sev de $M_n(\mathbb{K})$ formé des matrices de trace nulle, qu'on note $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. C'est bien une sous-algèbre de Lie de $M_n(\mathbb{K})$ car, comme $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$ on a $\mathrm{Tr}(XY - YX) = 0$ pour tout X, Y.

Exemple 4.6. — Soit Q une forme quadratique *non dégénérée* sur $V = \mathbb{K}^n$, ϕ sa forme polaire et J sa matrice dans la base canonique ; c'est une matrice symétrique (i.e. ${}^tJ = J$) et *inversible*. On définit le groupe orthogonal et le groupe spécial orthogonal de Q :

$$\begin{aligned} O(Q) &= \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid \phi(gu, gv) = \phi(u, v), \quad \forall u, v \in V\} \\ &= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tAJA = J\} \\ \mathrm{SO}(Q) &= \{A \in O(Q) \mid \mathrm{dét}(A) = 1\}. \end{aligned}$$

Ce sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ définis par des équations polynomiales. L'algèbre de Lie de $O(Q)$ est formée des matrices $A \in M_n(\mathbb{K})$ telles que

$$J = (I_n + \varepsilon\, {}^tA)J(I_n + \varepsilon A) = J + \varepsilon({}^tAJ + JA)$$

i.e. telles que ${}^tA = -JAJ^{-1}$. Notons que cette égalité entraîne $\mathrm{Tr}({}^tA) = -\mathrm{Tr}(A)$, d'où $\mathrm{Tr}(A) = 0$ puisque $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$. On en déduit que $\mathrm{Lie}(O(Q))$ coïncide avec $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(Q))$.

Par exemple, si $J = I_n$ alors $O(Q)$ (resp. $\mathrm{SO}(Q)$) est noté $O(n)$ (resp. $\mathrm{SO}(n)$) et leur algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n)$ est formé des matrices A telles que ${}^tA = -A$, i.e. des matrices *antisymétriques*. Dans le cas général, l'égalité $-JA = {}^tAJ = {}^t(JA)$ équivaut au fait que JA soit antisymétrique, donc l'application $A \mapsto JA$ est un isomorphisme linéaire entre $\mathrm{Lie}(O(Q))$ et l'espace des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{K})$.

On admettra les propositions suivantes.

Proposition 4.7. — *Si $H \subset G$ sont des groupes de Lie algébriques sur $\mathbb{K}$, H étant un sous-groupe* distingué*, le groupe quotient G/H est un groupe de Lie algébrique sur $\mathbb{K}$ et son algèbre de Lie est* $\mathrm{Lie}(G)/\mathrm{Lie}(H)$.

Par exemple, le quotient $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/(\mathbb{K}^\times I_n)$ *est un groupe de Lie algébrique sur $\mathbb{K}$ et son algèbre de Lie est l'espace vectoriel quotient $M_n(\mathbb{K})/\mathbb{K}I_n$.*

Proposition 4.8. — *Tout sous-groupe fini Γ de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est un groupe de Lie algébrique et l'on a* $\mathrm{Lie}(\Gamma) = \{0\}$.

Définition 4.9. — Si G est un groupe de Lie algébrique sur $\mathbb{K}$, on pose $\dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Lie}(G))$.

Exercice 4.10. — Quelle est la dimension sur $\mathbb{K}$ de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$? de $\mathrm{SO}(Q)$ (Q non dégénérée) ? de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K})$? d'un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$?

(2)En général, XY et YX ne sont pas dans $\mathrm{Lie}(G)$; c'est uniquement leur différence i.e. le crochet $[X, Y]$ qui y est.

Remarquons que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, en tant qu'ouvert de $M_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{n^2}$ est muni d'une topologie « canonique », et si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ défini par des équations polynomiales, c'est un fermé pour cette topologie (car les fonctions polynomiales sont continues).

Rappel 4.11. — (i) Un espace topologique X est dit **connexe** si les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont $\varnothing$ et X. Ceci équivaut à dire que toute application continue $f : X \to \{0,1\}$ est constante.

(ii) L'image par une application continue d'un espace connexe est connexe.

(iii) Soit $x \in X$. La réunion des parties connexes contenant x est une partie connexe de X, appelée la *composante connexe* de x dans X. C'est une partie fermée de X.

Exemple 4.12. — $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times$ n'est pas connexe. La composante connexe de l'élément neutre est $\mathbb{R}_+^\times$, qui est un **sous-groupe** fermé. (Noter que l'autre composante, $\mathbb{R}_-^\times$, n'est pas un sous-groupe !)

Plus généralement, pour tout $n \geq 1$ on peut montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes, données par dét > 0 ou < 0. La composante connexe de la matrice identité I_n est $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{dét}(A) > 0\}$ et c'est un **sous-groupe** fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ceci est un fait général, i.e. on peut démontrer la :

Proposition 4.13. — *Soit G un groupe de Lie algébrique.*

(i) *La composante connexe de l'élément neutre est un* **sous-groupe** *fermé de G, noté G^0 et appelé la* composante connexe (ou neutre) *de G.*

(ii) *On pose* $\mathrm{Lie}(G^0) = \mathrm{Lie}(G)$.

Exemples 4.14. — a) On peut montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.

b) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K})$ sont connexes, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

c) Soit Q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{K}^n$ et J sa matrice dans la base canonique. Si $A \in O(Q)$, l'égalité ${}^tAJA = J$ entraîne $\mathrm{dét}(A)^2 = 1$ d'où $\mathrm{dét}(A) = \pm 1$. De plus, il existe des éléments de déterminant -1, par exemple la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à un vecteur non isotrope. Donc il existe au moins deux composantes connexes. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si Q est de signature $(n,0)$ ou $(0,n)$, on peut montrer qu'il n'y en a que deux et la composante neutre est $\mathrm{SO}(Q)$. Par contre si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si Q est de signature (p,q) avec $p+q = n$ et $pq \neq 0$, on verra plus bas que $O(Q)$ a quatre composantes connexes. Par un changement de base, on peut supposer que $Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$, auquel cas $O(Q)$ est noté $O(p,q)$.

Remarque 4.15. — Revenons à l'exemple de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On voit que sa composante neutre n'est pas un sous-groupe *algébrique*, car elle est définie par l'inégalité $\mathrm{dét}(A) > 0$, qui n'est pas une égalité polynomiale. Ceci montre qu'il faut élargir un peu notre classe des « groupes de Lie algébriques ».

Une définition plus générale est la suivante :

Définition 4.16. — Tout sous-groupe **fermé** de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est appelé un groupe de Lie.

En fait, chaque groupe de Lie qu'on va rencontrer sera soit algébrique, soit la composante neutre d'un groupe de Lie algébrique, donc on n'a pas besoin de rentrer dans la théorie générale des groupes de Lie.

Lemme 4.17. — *Soient $p, q > 0$ et soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}$ un élément de $O(p,q)$, où A_1 (resp. A_2) appartient à $M_p(\mathbb{R})$ (resp. $M_q(\mathbb{R})$) et A_{12} (resp. A_{21}) appartient à $M_{pq}(\mathbb{R})$ (resp. $M_{qp}(\mathbb{R})$). Alors :*

(i) $\text{dét}(A) = \text{dét}(A_1)\,\text{dét}(A_2)^{-1} = \pm 1$.

(ii) $|\,\text{dét}(A_1)| = |\,\text{dét}(A_2)| \geq 1$.

(iii) *Donc $O(p,q)$ a au moins quatre composantes connexes. En fait, il y en a exactement quatre et la composante neutre* $\mathrm{SO}_+(p,q)$ *est donnée par* $\text{dét}(A) = 1 \leq \text{dét}(A_1)$.

Démonstration. — On a ${}^tA = \begin{pmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_{21} \\ {}^tA_{12} & {}^tA_2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ donc ${}^tAJA$ égale :

$$\begin{pmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_{21} \\ {}^tA_{12} & {}^tA_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ -A_{21} & -A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA_1A_1 - {}^tA_{21}A_{21} & {}^tA_1A_{12} - {}^tA_{21}A_2 \\ {}^tA_{12}A_1 - {}^tA_2A_{21} & {}^tA_{12}A_{12} - {}^tA_2A_2 \end{pmatrix}$$

et l'égalité ${}^tAJA = J$ équivaut aux trois égalités :

(1) ${}^tA_1A_1 = I_p + {}^tA_{21}A_{21}$,
(2) ${}^tA_2A_2 = I_q + {}^tA_{12}A_{12}$,
(3) ${}^tA_1A_{12} = {}^tA_{21}A_2$.

La matrice $S = {}^tA_{21}A_{21}$ est symétrique, donc diagonalisable[3]. De plus, chaque valeur propre λ est ≥ 0 car pour tout $B \in M_n(\mathbb{R})$ et $u, v \in \mathbb{R}^n$ on a $Bu \cdot v = u \cdot {}^tBv$ donc si v est un vecteur propre de S, on a

$$\lambda v^2 = Sv \cdot v = A_{21}v \cdot A_{21}v \geq 0.$$

Par conséquent, toutes les valeurs propres de $I_p + S$ sont ≥ 1 donc $\text{dét}(A_1)^2 = \text{dét}(I_p + S)$ est ≥ 1. De même, $\text{dét}(A_2)^2 \geq 1$.

D'autre part, les égalités (1), (2) et (3) entraînent l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} {}^tA_1 & 0 \\ {}^tA_{12} & -{}^tA_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA_1A_1 & {}^tA_1A_{12} \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

Prenant les déterminants, on obtient $\text{dét}(A_1)(-1)^q\,\text{dét}(A_2)\,\text{dét}(A) = \text{dét}(A_1)^2(-1)^q$, d'où $\text{dét}(A) = \text{dét}(A_1)\,\text{dét}(A_2)^{-1}$. Comme $\text{dét}(A) = \pm 1$, on en déduit que $|\,\text{dét}(A_1)| = |\,\text{dét}(A_2)|$. Ceci prouve (i) et (ii).

On en déduit qu'il y a au moins quatres composantes connexes, données par les signes de $\text{dét}(A)$ et $\text{dét}(A_1)$. On peut montrer que ces quatre sous-ensembles sont connexes, et la composante neutre est donc donnée par $\text{dét}(A) = 1 \leq \text{dét}(A_1)$. □

5. L'isomorphisme $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_+(3,1)$

Le but de ce paragraphe, qu'on peut omettre en première lecture, est de montrer qu'on a un isomorphisme de groupe de Lie réels $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_+(3,1)$. Commençons par la remarque suivante.

Remarque 5.1. — On peut identifier $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$: plus précisément, si $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$, alors les vecteurs $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$ forment une base $\mathscr{C}$ de $V = \mathbb{C}^n$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La matrice dans cette base de la multiplication par i est $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ et un élément A de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ est $\mathbb{C}$-linéaire ssi il commute à J, i.e. si $AJ = JA$. On en déduit que

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \simeq \{A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid AJ = JA\}$$

est un sous-groupe de Lie algébrique de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$. Son algèbre de Lie $M_n(\mathbb{C}) \simeq \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid AJ = JA\}$ est de dimension n^2 sur $\mathbb{C}$ donc $2n^2$ sur $\mathbb{R}$.

On peut déduire de cette remarque le :

[3] dans une base orthonormée.

Corollaire 5.2. — *Si G est un groupe de Lie algébrique sur $\mathbb{C}$ c'est aussi un groupe de Lie algébrique sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on pose :*

$$\dim_{\mathbb{R}}(G) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Lie}(G)) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Lie}(G)) = 2\dim_{\mathbb{C}}(G).$$

On admettra la proposition suivante.

Proposition 5.3. — *Soit G un groupe de Lie* **connexe**. *Si H est un sous-groupe de Lie de G tel que* $\dim(H) = \dim(G)$ *alors $H = G$.*

Définition 5.4. — Soient G, G' deux groupes de Lie algébriques. Un morphisme de groupes de Lie algébriques $\phi : G \to G'$ est un morphisme de groupes qui est donné par des applications polynomiales. On en verra un exemple plus bas.

On admet la proposition suivante :

Proposition 5.5. — *Soit $\phi : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie algébriques.*

(i) $K = \mathrm{Ker}(\phi)$ *et* $G' = \mathrm{Im}(\phi)$ *sont des groupes de Lie algébriques, ainsi que le quotient G/K.*

(ii) *On a des isomorphismes $G/K \simeq G'$ et* $\mathrm{Lie}(G)/\mathrm{Lie}(K) \simeq \mathrm{Lie}(G')$. *En particulier, on a* $\dim(G') = \dim(G) - \dim(K)$.

Corollaire 5.6. — *On a un isomorphisme* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_+(3,1)$

Démonstration. — Soit V le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des matrices $A \in M_2(\mathbb{C})$ qui sont hermitiennes, i.e. $A^* = A$, où A^* désigne ${}^t\overline{A}$ (noter que $(A_1A_2)^* = A_2^*A_1^*$). On a donc

$$V = \left\{ A = \begin{pmatrix} u & x+iy \\ x-iy & v \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, u,v,x,y \in \mathbb{R} \right\}$$

et $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 4$. Noter que pour A ci-dessus on a $\mathrm{dét}(A) = uv - x^2 - y^2$. D'autre part, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit sur V par $B \cdot A = BAB^*$, car $(BAB^*)^* = B^{**}A^*B^* = BAB^*$, i.e. BAB^* est bien hermitienne .

Comme $\mathrm{dét}(BAB^*) = \mathrm{dét}(A)$ (puisque $\mathrm{dét}(B) = 1 = \mathrm{dét}(B^*)$, on voit que l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ préserve la forme quadratique $Q(A) = -\mathrm{dét}(A) = x^2+y^2-uv$, qui est de signature $(3,1)$. On obtient donc un morphisme de groupes algébriques $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to O(3,1)$.

Il est clair que $\mathrm{Ker}(\phi)$ contient $\{\pm I_2\}$ et l'on peut vérifier par un calcul direct que si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ appartient à $\mathrm{Ker}(\phi)$ alors en prenant pour $A \in V$ les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient $c = 0 = b$, $d = a^{-1} = \overline{a}$ puis $a^2 = 1$, donc $A = \pm I_2$. (On pourrait aussi utiliser que le groupe quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\} \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est *simple*.)

Comme $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est connexe, il en résulte que ϕ induit un isomorphisme de G sur un sous-groupe G' de $\mathrm{SO}_+(3,1)$ tel que $\dim_{\mathbb{R}}(G') = \dim_{\mathbb{R}}(G) = 2 \cdot 3 = 6$ (cf. 5.2 et 4.10). Or $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{SO}_+(3,1)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{SO}(3,1)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{SO}(4)) = 6$ (cf. 4.10), donc $G' = \mathrm{SO}_+(3,1)$ d'après la proposition 5.3. □

6. L'application exponentielle d'un groupe de Lie

Définition 6.1. — Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ on définit $\exp(A) \in M_n(\mathbb{K})$ par :

$$\exp(A) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} A^k.$$

(Cette série est normalement convergente.) En particulier, $\exp(0) = I_n$. Si $B \in M_n(\mathbb{K})$ commute à A, i.e. si $BA = AB$, on démontre en utilisant la formule du binôme que $\boxed{\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B).}$[(4)] En particulier $\exp(A)\exp(-A) = I_n$ donc $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $t \in \mathbb{K}$, posons $f_A(t) = \exp(tA)$. Alors $f_A(s+t) = f_A(s)f_A(t)$ donc f_A est un morphisme de groupes de $(\mathbb{K},+)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. De plus, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors $t \mapsto f_A(t) = \exp(tA)$ est l'unique solution de l'équation différentielle $f'(t) = Af(t)$, $f(0) = I_n$, où $f : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ est une fonction de classe C^∞.

Lemme 6.2. — *Pour tout* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *on a* $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$.

Démonstration. — Comme $M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$, il suffit de le prouver lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dans ce cas, d'après la décomposition de Jordan, on peut écrire $A = D + N$ où D est une matrice diagonale et N une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale, et $DN = ND$. Alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$ donc il suffit de prouver le résultat pour D et pour N. Notant λ_i les coefficients diagonaux de D, $\exp(D)$ est diagonale de termes diagonaux $\exp(\lambda_i)$, donc

$$\mathrm{d\acute{e}t}(\exp(D)) = \prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i) = \exp\big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\big) = \exp\big(\mathrm{Tr}(D)\big).$$

D'autre part, N est nilpotente : chaque puissance N^i est triangulaire supérieure avec au moins i diagonales de 0 en partant de la diagonale principale, d'où en particulier $N^n = 0$. Donc $\exp(N)$ est la somme finie

$$\exp(N) = I_n + N + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} N^{n-1}$$

et c'est une matrice triangulaire avec des 1 sur la diagonale donc $\mathrm{d\acute{e}t}(\exp(N)) = 1 = \exp(\mathrm{Tr}(N))$ (puisque $\mathrm{Tr}(N) = 0$). □

On voit ainsi que pour tout $A \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}))$ on a $\exp(A) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Ceci est un fait général, i.e. on admettra la :

Proposition 6.3. — *Soit G un sous-groupe de Lie algébrique de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(i) *Pour tout* $A \in \mathrm{Lie}(G)$ *on a* $\exp(A) \in G^0$.

(ii) *L'application* exp *est un difféomorphisme local entre* $(\mathrm{Lie}(G), 0)$ *et* (G, I_n), *i.e. il existe des voisinages ouverts U de 0 dans* $\mathrm{Lie}(G)$ *et V de I_n dans G tels que* exp *soit un difféomorphisme de U sur V.*

L'application exponentielle n'est en général ni injective (par exemple $\exp(2i\pi) = 1$) ni surjective. Toutefois on connaît des cas où elle est surjective (cf. [DH] et [Ni]) :

Proposition 6.4. — *L'application exponentielle est surjective dans les cas suivants :*

(i) *G est un groupe de Lie réel* compact, *par exemple* $\mathrm{SO}(n)$ *ou* $\mathrm{SU}(n)$.

(ii) $G = \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$.

(iii) $G = \mathrm{SO}_+(n,1)$.

---

(4) Attention, ce n'est en général pas vrai si $AB \neq BA$!

7. Pseudo-inverse de Moore-Penrose

Définition 7.1. — Soit $f : V \to W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels euclidiens, de dimensions n et p. Son **pseudo-inverse de Moore-Penrose** f^+ est l'application linéaire qui à tout $y \in W$ associe une solution approchée x de l'équation $f(x) = y$ qui est la « meilleure possible » au sens euclidien ; i.e. soient $F = \mathrm{Im}(f)$, $E = \mathrm{Ker}(f)^\perp$ et π la projection orthogonale de W sur F. Alors f induit un isomorphisme $f' : E \xrightarrow{\sim} F$ et, notant $g : F \xrightarrow{\sim} E$ l'isomorphisme inverse, f^+ est défini par $\boxed{f^+ = g \circ \pi.}$

Alors, pour tout $y \in W$, $x = f^+(y)$ est la meilleure approximation d'une solution de $f(x) = y$ au sens suivant. D'abord, l'équation $f(x) = y$ a une solution ssi $y \in F$, donc pour $y \in W$ arbitraire on remplace y par l'élément de F le plus proche, i.e. la projection orthogonale $z = \pi(y)$ de y sur F. Puis, comme $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus E$, il existe un unique $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = z$ et l'ensemble des solutions de $f(x) = z$ est $x_0 + E = \{x_0 + u \mid u \in E\}$; pour une telle solution on a $x^2 = x_0^2 + u^2$, donc on voit que x_0 est l'unique solution de norme minimale.

L'inverse de Moore-Penrose vérifie les propriétés suivantes :

(1) $f \circ f^+ \circ f = f$
(2) $f^+ \circ f \circ f^+ = f^+$
(3) $(f^+ \circ f)^* = f^+ \circ f$
(4) $(f \circ f^+)^* = f \circ f^+$.

où A^* désigne l'adjoint de A pour le produit scalaire $(\ \mid\ )$ sur V ou W, i.e. l'unique endomorphisme de V (resp. W) tel que $(Ax \mid x') = (x \mid A^*x')$ pour tout x, x' dans V (resp. W). En effet, les égalités (1) et (2) découlent immédiatement de la définition. Pour prouver (3) et (4), on observe que $f^+ \circ f$ (resp. $f \circ f^+$) est la projection orthogonale P de V sur E (resp. π de W sur F) et que celles-ci sont bien auto-adjointes, puisque pour tout $x, x' \in V$ on a $(Px \mid x') = (Px \mid Px') = (x \mid Px')$ et de même dans W.

Références :

[AJ] Christian Arber & Frédéric Jean, La mécanique des sphères de Lie : un futur pour la CAO ?, pp. 1-16 *in* : Journée Annuelle Soc. Math. France 2015.

[DH] Dragomir Doković & Karl Hofmann, The surjectivity question for the exponential function of real Lie groups : a status report, J. Lie Theory **7** (1997), 171-199.

[Ni] Mitsuru Nishikawa, On the exponential map of the group $O(p,q)^0$, Memoirs Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, **37** (1983), n°1, 63-69.