Université Pierre et Marie Curie 2011–2012
LM270, Devoir 1 du 24 février 2012

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **5** exercices et est noté sur **50**

Exercice 1 (13 pts)**.** Soient $t \in \mathbb{R}$ et $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t & 2t \\ t & t^2+t & t^2 & t^2+t \\ 0 & t-1 & 2 & t-1 \\ t & 2t & t^2+t & 3t^2-t \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Déterminer, en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$, le rang de A_t et une base de $\mathrm{Im}(A_t)$ et de $\mathrm{Ker}(A_t)$.

Exercice 2 (10 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Calculer A^{-1} en effectuant des opérations sur les colonnes ou bien les lignes.

Exercice 3 (10 pts)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $V = \mathbb{R}^4$, soit V^* l'espace dual de V et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$.

1. (3 pts) Soit P le plan de V engendré par les vecteurs $v_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$ et $v_2 = e_2 + e_3 + e_4$. Pour $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, sous quelles conditions la forme linéaire $f = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^* + a_4 e_4^*$ s'annule-t-elle sur P ?
2. (4 pts) Déterminer une base $(f_1, \ldots, f_d)$ du sous-espace $P^\perp = \{f \in V^* \mid f(v) = 0, \quad \forall v \in P\}$ de V^* (où $d = \dim P^\perp$). Puis, de façon équivalente, donner d équations linéaires, linéairement indépendantes, définissant P.
3. (3 pts) Considérons maintenant les formes linéaires $\phi = e_1^* + e_2^* - e_3^*$ et $\psi = e_1^* + e_4^*$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace $E = \{v \in V \mid \phi(v) = 0 = \psi(v)\}$ de V.

Exercice 4 (11 pts)**.** Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant la relation de récurrence linéaire $u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0$.

1. (4 pts) Montrer que l'application $\phi : E \to \mathbb{C}^2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$ est linéaire, puis montrer que ϕ est injective et surjective. En déduire la dimension de E.
2. (1 pt) Déterminer $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tel que la suite géométrique $\mathbf{u} = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartienne à E.
3. (2 pts) Soit $\mathbf{v}$ la suite définie par $v_n = n\lambda^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbf{v}$ appartient à E.
4. (2 pts) Montrer que les suites $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont linéairement indépendantes. Que peut-on en déduire ?
5. (2 pts) Soit $\mathbf{w}$ l'élément de E défini par $w_0 = 2$ et $w_1 = -2$. Exprimer $\mathbf{w}$ en fonction de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, puis donner une formule explicite pour la valeur de w_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 (6 pts)**.** Pour chacune des permutations suivantes, déterminer l'écriture comme produit de cycles de supports disjoints, puis la signature :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 9 & 7 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 5 & 9 & 8 & 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$