Université Pierre et Marie Curie 2012–2013
LM270, Devoir 1 du 8 février 2013

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **2** exercices et est noté sur **50**

Exercice 1 (42 pts)**.** [1] Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et soit $P_M(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 4 & -4 \\ 1 & -X & 2 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$ son polynôme caractéristique. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à M.

1. (4 pts) En faisant des opérations sur les colonnes, calculer $P_M(X)$. (On trouvera $P_M(X) = (a-X)(b-X)(c-X)$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $a < 0 < b < c$.)
2. (4,5 pts) Déterminer un vecteur propre v_a (resp. v_b, resp. v_c) associé à la valeur propre a (resp. b, resp. c).
3. (4 pts) Écrire la matrice $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_a, v_b, v_c)$ et calculer son inverse P^{-1}.
4. (2,5 pts) Montrer que $\mathcal{C} = (v_a, v_b, v_c)$ est une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^3$. (On pourra citer un résultat du cours, ou bien utiliser la question précédente.)
5. (2 pts) Pour tout vecteur $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X \in \mathbb{R}^3$, rappeler la formule matricielle (vue en L1) exprimant X en fonction de P et des coordonnées X' de v dans la base $\mathcal{C}$. (Pour retrouver cette formule, si nécessaire, écrire $v = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i = \sum_{j=1}^{3} x'_j f_j$, où $(f_1, f_2, f_3) = (v_a, v_b, v_c)$ et exprimer les f_j en fonction des e_i.)
6. (2 + 2 pts) Que représente la matrice $P^{-1}MP$? Sans faire de calcul supplémentaire, écrire la matrice $D = P^{-1}MP$.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $U = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, i.e. pour tout $U \in \mathcal{S}$, chaque terme $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathbb{R}^3$. Alors $\mathcal{S}$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall U, V \in \mathcal{S}, \qquad (\lambda U + V)_n = \lambda U_n + V_n.$$

Soit $E = \{U = (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = MU_n\}$, où M est la matrice des questions précédentes.

7. (2 pts) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.
8. (4,5 pts) Construire un isomorphisme d'espaces vectoriels $\phi : E \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$. (En expliquant pourquoi ϕ est surjective, et pourquoi ϕ est injective).
9. (4,5 pts) Les valeurs propres de M étant, comme plus haut, $a < b < c$, déterminer des suites non nulles $A, B, C \in E$ telles que $A_{n+1} = aA_n$ (resp. $B_{n+1} = bB_n$, resp. $C_{n+1} = cC_n$), pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis donner une formule explicite pour la valeur de A_n, B_n, C_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. (4 pts) En utilisant les questions 4 et 8, montrer que (A, B, C) est une base de E.
11. (6pts) Soit U l'élément de E défini par $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. En utilisant les questions 5 et 8, exprimer U dans la base (A, B, C), puis en déduire une formule explicite donnant la valeur de U_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (8 pts)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $V = \mathbb{R}^5$, soit V^* l'espace dual de V et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*, e_5^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$.

1. (4 pts) Soit P le plan de V engendré par les vecteurs $v_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ et $v_2 = e_2 + e_3 + e_4 + e_5$. Pour $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$, sous quelles conditions la forme linéaire $f = a_1e_1^* + a_2e_2^* + a_3e_3^* + a_4e_4^* + a_5e_5^*$ s'annule-t-elle sur P ?
2. (4 pts) Déterminer une base $(f_1, \ldots, f_d)$ du sous-espace $P^\perp = \{f \in V^* \mid f(v) = 0, \quad \forall v \in P\}$ de V^* (où $d = \dim P^\perp$). Puis, de façon équivalente, donner d équations linéaires, linéairement indépendantes, définissant P.

[1] Les questions 7 et 8 sont indépendantes des questions 1 à 6.