Université Pierre et Marie Curie 2011–2012
LM270, Devoir 2 du 9 mars 2012

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **5** exercices et est noté sur **50**

Exercice 1 (10 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1) (2,5 pts) Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses racines.
2) (3 pts) Peut-on dire si A est diagonalisable ? Justifier votre réponse.
3) (4,5 pts) Déterminer une base de chaque espace propre V_λ en faisant des opérations sur les colonnes de $A - \lambda I_3$.

Exercice 2 (10 pts)**.** Soit $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1) (4 pts) Calculer le polynôme caractéristique $P_B(X)$ et déterminer ses racines et leur multiplicité.
2) (4 pts) Compte tenu du résultat obtenu en 1), quel calcul faut-il faire pour savoir si B est diagonalisable ?
3) (2 pts) Effectuer ce calcul, et déterminer si B est diagonalisable ou non.

Exercice 3 (10 pts)**.** Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$.

1) (2 pts) Pour $i = 1, 2, 3, 4$, exprimer les vecteurs Je_i dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer J^2e_i, J^3e_i et J^4e_i.
2) (1 pt) Écrire les matrices J^2, J^3, J^4.
3) (4 pts) Soit $A \in M_4(\mathbb{C})$; on suppose que $A^2 = J$. Que peut-on dire des valeurs propres de A ? Par conséquent, quel est le polynôme caractéristique de A ?
4) (3 pts) Appliquer alors le théorème de Cayley-Hamilton à A pour obtenir une contradiction. Qu'en conclut-on ?

Exercice 4 (12 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$.

1) (3 pts) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ et déterminer ses racines et leur multiplicité.
2) (8 pts) Pour chaque racine λ, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_4)$, puis de $\mathrm{Ker}\left((A - \lambda I_4)^2\right)$, etc. jusqu'à obtenir l'espace caractéristique $V_{(\lambda)}$.
3) (1 pt) Dire, en le justifiant, si A est diagonalisable ou non.

Exercice 5 (8 pts)**.** Soit $u \in M_{10}(\mathbb{R})$ un endomorphisme nilpotent tel que $u^3 = 0$, $\mathrm{rang}(u^2) = 2$ et $\mathrm{rang}(u) = 5$.

1) (3 pts) Déterminer la partition $\mathbf{q}$ associée à la suite des noyaux de u et dessiner son diagramme.
2) (1 pt) Déterminer la partition transposée $\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{q}}$.
3) (4 pts) Écrire la matrice de la forme normale de Jordan de u.