Université Pierre et Marie Curie 2012–2013
LM270, Devoir 2 du 22 février 2013

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **4** exercices et est noté sur **50**

Exercice 1. (9 pts) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1-t & 1+t & 0 \\ 2-t & t-2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. (2 pts) Calculer le polynôme caractéristique $P = P_A(X)$. (Ce polynôme a trois racines réelles que l'on déterminera.)
2. (2 pts) Expliquer en le justifiant pour quelles valeurs de t on peut affirmer sans calcul supplémentaire que A est diagonalisable.

Soient $t_1 < t_2$ les deux valeurs de t pour lesquelles un calcul supplémentaire est nécessaire.

3. (2,5 pts) Lorsque $t = t_1$, déterminer si A est diagonalisable.
4. (2,5 pts) Même question lorsque $t = t_2$.

Exercice 2. (8 pts) Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, soit $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients diagonaux valent 1 et ceux au-dessus (respectivement en-dessous) de la diagonale valent 9 (respectivement 4). Ainsi, $A_1 = (1)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 4 & 1 & 9 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 9 \\ 4 & 1 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, etc. On pose $D_n = \text{dét}(A_n)$.

1. (6 pts) Montrer que D_n est congru à 1 modulo 36, i.e. que $D_n = 1 + 36f(n)$, pour un certain entier $f(n)$. (On ne cherchera pas à déterminer explicitement $f(n)$). **Indication :** procéder par récurrence sur n et développer D_n par rapport à la première colonne.
2. (2 pts) Montrer que A_n est inversible.

Exercice 3. (8pts) On considère la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^4$:

$$q(x, y, z, t) = 2x^2 + 8y^2 + 2z^2 + 8xy + 4xz + 10yz + 3yt + 5zt.$$

En utilisant l'algorithme de Gauss, écrire q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes et déterminer la signature de q.

Exercice 4. (25 pts) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien standard, défini par $(x \mid y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On fixe un vecteur non nul $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et l'on note $H = (\mathbb{R}v)^{\perp}$.

1. (2,5 pts) Déterminer la dimension de H et donner une équation définissant H.
2. (2,5 pts) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}v \oplus H$.

Tout $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit donc de façon unique $x = \pi_H(x) + \lambda_x v$, avec $\pi_H(x) \in H$ et $\lambda_x \in \mathbb{R}$. L'application π_H est la projection orthogonale sur H, et l'on définit σ, la symétrie orthogonale par rapport à H, en posant $\sigma(x) = \pi_H(x) - \lambda_x v = x - 2\lambda_x v$.

3. (2 pts) Montrer que $(\lambda_x v \mid v) = (x \mid v)$ et en déduire la valeur de λ_x.
4. (3 pts) Donner une formule exprimant $\sigma(x)$ en fonction de x, $(x \mid v)$, $(v \mid v)$ et v.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormée pour $(\ \mid\ )$.

5. (3 pts) On suppose que $n = 3$ et que $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. En utilisant la formule de la question précédente, calculer $\sigma(e_i)$ pour $i = 1, 2, 3$ puis écrire la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma)$.

6. (2 + 1 = 3pts) On fixe $\theta \in \mathbb{R}$ et l'on suppose que $n = 2$ et que $v = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$. En utilisant la formule de la question 4, calculer $\sigma(e_i)$ pour $i = 1, 2$ puis écrire la matrice $S_\theta = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma)$, en faisant apparaître $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.

On revient à $\mathbb{R}^n$, avec n arbitraire.

7. (2 pts) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$(\sigma(x) \mid \sigma(x)) = \lambda_x^2\,(v \mid v) + (\pi_H(x) \mid \pi_H(x)) = (x \mid x).$$

8. (2 pts) Soient $y, z \in \mathbb{R}^n$. En appliquant la question précédente à $x = y+z$, montrer que $(\sigma(y) \mid \sigma(z)) = (y \mid z)$.
9. (1 pt) Montrer que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$.
10. (2 + 2 = 4 pts) Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma)$. Pour tout i, j, montrer que $a_{ij} = (e_i \mid \sigma(e_j))$; puis, en utilisant les questions précédentes, montrer que $a_{ij} = a_{ji}$.