Université Pierre et Marie Curie 2012–2013
LM270, Devoir 3 du 8 mars 2013

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **7** exercices et est noté sur **50**

Préambule. Dans les exercices 1 et 2, une matrice $M \in O(3)$ étant donnée, « déterminer les caractéristiques géométriques de M » signifie : si M est une rotation, déterminer l'axe orienté et l'angle θ, et si M est une rotation gauche (= anti-rotation), déterminer l'axe orienté des anti-invariants et l'angle θ. Pour déterminer θ on donnera la valeur de $\cos(\theta)$ et le signe de $\sin(\theta)$. De plus, si $\pm\cos(\theta) \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\}$, on attend une réponse sous la forme $\theta = \pm p\pi/q$, avec $q \in \{2, 3, 4, 6\}$ et $0 \leq p \leq q$.

Exercice 1. (10 pts) Soit $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. (2 pts) Montrer que $A \in O(3)$.
2. (2 pts) Déterminer la valeur de $\det(A)$.
3. (6 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de A.

Exercice 2. (10 pts) Soit $B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{6} & -3 \\ -\sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ -3 & -\sqrt{6} & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. (2 pts) Montrer que $B \in O(3)$.
2. (2 pts) Déterminer la valeur de $\det(B)$.
3. (6 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de B.

Exercice 3. (10 pts) On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire euclidien standard $(\ |\ )$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. (2,5 pts) Citer un théorème du cours qui assure que S est diagonalisable. Que peut-on dire des espaces propres ? Quelle propriété additionnelle peut-on imposer à une base de vecteurs propres ?
2. (2 pts) Calculer le polynôme caractéristique $P_S(X)$ et déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de S. (On prendra $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.)
3. (3 pts) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ formée de vecteurs propres de S. On notera P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
4. (2,5 pts) Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3$$

   et soit ϕ sa forme polaire. Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ puis déterminer, en le justifiant soigneusement, la signature de Q.

Exercice 4. (5 pts) On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire euclidien standard $(\ |\ )$. Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. (1 pt) Donner une équation de l'hyperplan $H = (\mathbb{R}v)^\perp$.

Soit σ la symétrie orthogonale par rapport à H.

2. (2 pts) Pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, donner la formule exprimant $\sigma(x)$ en fonction de x, $(x \mid v)$, $(v \mid v)$ et v.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, qui est orthonormée pour $(\ |\ )$.

3. (2 pts) Calculer $(v \mid v)$ puis, en appliquant la formule précédente successivement à $x = e_1, \ldots, e_4$, calculer $\sigma(e_i)$ pour $i = 1, \ldots, 4$ puis écrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma)$.

Exercice 5. (5 pts) On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire euclidien standard $(\ |\ )$. On considère les vecteurs :

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\4\\4\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\3\\3\end{pmatrix}.$$

1. (1 pts) Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.
2. $(1 + 1 + 2 = 4$ pts) En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, déterminer une famille orthonormée (f_1, f_2, f_3) de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ telle que $(f_i \mid v_i) > 0$ et $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_i) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.

Exercice 6. $(4 + 2 = 6$ pts) Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$) définie par :

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

1. (4 pts) Dans les cas $n = 2, 3, 4, 5$, utiliser l'algorithme de Gauss pour écrire Q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes et déterminer sa signature.
2. (2 pts) Déterminer la signature de Q pour n arbitraire. (On pourra traiter séparément les cas $n = 2p$ et $n = 2p + 1$.)

Exercice 7. $(2 + 2 = 4$ pts) Pour chacune des permutations suivantes de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, 9\}$, déterminez l'écriture en produit de cycles de supports disjoints. Puis, en justifiant soigneusement votre réponse, déterminez la signature de σ et τ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 9 & 7 & 1 & 0 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 4 & 9 & 0 & 7 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$