Université Pierre et Marie Curie 2012–2013
LM270, Devoir 4 du 22 mars 2013

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **6** exercices indépendants et est noté sur **50**

Dans les exercices 1 à 3, $(\mathcal{E}, E)$ désigne un espace affine euclidien de dimension 3. On note $(\ |\ )$ le produit scalaire sur E. On munit $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et l'on note (x, y, z) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$. On oriente E par le choix de $\mathcal{B}$.

Exercice 1. (10 pts) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine qui à tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ associe le point $M' = f(M)$ de coordonnées : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9} \begin{pmatrix} 4x + 4y + 7z \\ -8x + y + 4z \\ x - 8y + 4z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, et soit $\overrightarrow{f}$ la partie linéaire de f.

1. (0,5 pt) Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$. On notera C_1, C_2, C_3 ses colonnes.
2. (1,5 pt) En calculant explicitement les produits scalaires $(C_i \mid C_j)$, pour $1 \leq i \leq j \leq 3$, montrer que $A \in O(3)$.
3. (1,5 pt) Déterminer la valeur de $\mathrm{dét}(A)$.
4. (3 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de A.
5. (1 pt) Déterminer le vecteur $T = \overrightarrow{Of(O)}$, puis sa projection orthogonale u sur $F = \mathrm{Ker}(A - I_3)$.
6. (2,5 pts) Déterminer les points fixes de $g = t_{-u} \circ f$, puis déterminer les caractéristiques géométriques de f.

Exercice 2. (10 pts) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine qui à tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ associe le point $M' = f(M)$ de coordonnées : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} x + 2y - 2z \\ 2x + y + 2z \\ -2x + 2y + z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, et soit $\overrightarrow{f}$ la partie linéaire de f.

1. (0,5 pt) Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$. On notera C_1, C_2, C_3 ses colonnes.
2. (1,5 pt) En calculant explicitement les produits scalaires $(C_i \mid C_j)$, pour $1 \leq i \leq j \leq 3$, montrer que $A \in O(3)$.
3. (1,5 pt) Déterminer la valeur de $\mathrm{dét}(A)$.
4. (3 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de A.
5. (1 pt) Déterminer le vecteur $T = \overrightarrow{Of(O)}$, puis sa projection orthogonale u sur $F = \mathrm{Ker}(A - I_3)$.
6. (2,5 pts) Déterminer les points fixes de $g = t_{-u} \circ f$, puis déterminer les caractéristiques géométriques de f.

Exercice 3. (10 pts) Soit I le point de coordonnées $(1, 1, 0)$ et soit v_1 (resp. v_2) le vecteur $e_1 + e_3$ (resp. $e_1 - e_3$). Pour $i = 1, 2$, soit $\mathcal{P}_i$ le plan affine $I + (\mathbb{R}v_i)^\perp$, soient s_i la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}_i$, et g_i la symétrie orthogonale glissée par rapport à $\mathcal{P}_i$, de vecteur de glissement $u = e_2$. Soit σ_i la partie linéaire de g_i.

1. (2 pts) En utilisant une formule connue, déterminer les matrices $S_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma_1)$ et $S_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma_2)$.
2. (2 pts) Pour tout point $M(x, y, z)$, déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{Is_1(M)} = \sigma_1(\overrightarrow{IM})$, puis celles (x_1, y_1, z_1) du point $g_1(M)$.
3. (2 pts) Déterminer de même les coordonnées (x_2, y_2, z_2) du point $g_2(M)$.
4. (1,5 pt) Soit $r = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Calculer $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$ et montrer que r est une rotation dont on déterminera les caractéristiques géométriques.
5. (2,5 pts) Soit $h = g_2 \circ g_1$. Calculer $h(I)$ puis le vecteur $\overrightarrow{Ih(I)}$. Puis, combinant ceci à la question précédente, déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de h.

Exercice 4. (6 pts) Soient A, B, C trois points distincts du plan affine $\mathcal{P}$.

1. (1 pt) On fixe $O \in \mathcal{P}$. Soit G le point de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$. Montrer que pour tout $P \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$.
2. (1 pt) Soit I le milieu du segment $[A, B]$. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$.
3. (1 pt) Montrer que $2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GC} = 0$.

4. (2 pts) Soit J (resp. K) le milieu du segment $[B, C]$ (resp. $[C, A]$). Montrer que G appartient à chacune des droites (CI), (AJ) et (BK).
5. (1 pt) Faire un dessin représentant 3 points non alignés A, B, C, puis placer approximativement les points I, J, K et déterminer graphiquement le point G.

Exercice 5. (9 pts) Soient $(\mathcal{P}, P)$ un plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B}_0)$. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère. Soit

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 8x - 8y - 4 = 0\}.$$

Soit ϕ la forme polaire de la forme quadratique $Q(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy$.

1. (1 pt) Écrire la matrice $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi)$.
2. (1 pt) Calculer le polynôme caractéristique $P_S(X)$ et déterminer ses racines $\lambda_1 < \lambda_2$.
3. (2 pts) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ où u_1 (resp. u_2) est un vecteur propre de S pour la valeur propre λ_1 (resp. λ_2). Écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$.
4. (2 pts) On note (x_1, x_2) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$. Écrire la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$, puis écrire l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$.
5. (1,5 pt) Écrire l'équation de $\mathcal{C}$ sous la forme $\dfrac{X^2}{a^2} \pm \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$, en déterminant explicitement l'expression de X (resp. Y) en fonction de x_1 (resp. x_2).
6. (0,5 + 1 = 1,5 pt) Soit I le centre de $\mathcal{C}$. Déterminer les coordonnées de I dans le repère $\mathcal{R}$, puis dans le repère $\mathcal{R}_0$.

Exercice 6. (5 pts) Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine de dimension 3 et soient A_0, A_1, A_2, A_3 quatre points non coplanaires de $\mathcal{E}$, i.e. tels que le sous-espace affine $\mathrm{Aff}(A_0, A_1, A_2, A_3)$ qu'ils engendrent soit égal à $\mathcal{E}$. Soient B_0, B_1, B_2, B_3 quatre points arbitraires de $\mathcal{E}$. Montrer qu'il existe une unique application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $f(A_i) = B_i$ pour $i = 0, 1, 2, 3$. (On pourra commencer, supposant f donnée, par montrer l'unicité de $u = \overrightarrow{f}$ puis celle de f, et montrer ensuite l'existence de f.)