Université Pierre et Marie Curie 2009–2010
LM270, Examen du 10 juin 2010 (3h)

Cet examen comporte 7 exercices et est noté sur 100. **Aucun document n'est autorisé**.

Dans certains des exercices, on attend des réponses citant des résultats du cours ; ceci comptera pour une partie importante des points. Dans ces exercices, une réponse basée uniquement sur un calcul ne donnera qu'une partie des points.
Dans tous les exercices, les réponses correctes mais non justifiées ne donneront qu'une fraction des points.

Exercice 1 (20pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.

1. Pour chaque matrice de $M_3(\mathbb{R})$ ci-dessous, déterminez une base orthonormée de vecteurs propres, ou bien montrez qu'il n'en existe pas :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 4x_1x_3$.

Exercice 2 (10pts)**.** On rappelle la formule pour le déterminant de Vandermonde :

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Calculer $D = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1/2 \\ 2 & 5 & 10 & 17 & 5/4 \\ 2 & 9 & 28 & 65 & 9/8 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$ en utilisant les propriétés de multilinéarité du déterminant.

Exercice 3 (10pts)**.** Réduire en somme de carrés et donner la signature et le rang des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^4$:

1. $q(x, y, z, t) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 2xy + xz + 5yz - 4yt - 4zt$.
2. $Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 4yz + 2yt - zt$.

Exercice 4 (20pts)**.** Soit $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine telle que, pour tout $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$, $M' = f(M)$ a pour coordonnées :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}\Big(x + y + \sqrt{2}z\Big) + 1 \\ y' &= \frac{1}{2}\Big(x + y - \sqrt{2}z\Big) + 1 \\ z' &= \frac{1}{2}\Big(-\sqrt{2}x + \sqrt{2}y\Big) + 1 \end{aligned}$$

1. Déterminer la partie linéaire ϕ de f et donner sa matrice A dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
2. Montrer que ϕ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$. Déterminer sa nature et préciser ses caractéristiques.
3. Soit $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les projections orthogonales u et v de w sur $F = \mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{id})$ et sur $F^\perp$. Soit t_{-u} la translation de vecteur $-u$; déterminer un point fixe I de $g = t_{-u} \circ f$.
4. Déterminer la nature de f et préciser ses caractéristiques.

Exercice 5 (15pts)**.** Soit $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Si $M \in \mathcal{E}$, on écrira $M(x, y, z)$ pour indiquer que (x, y, z) sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{P}$ le plan affine passant par le point $I(-1, 0, 2)$ et de direction le plan vectoriel P engendré par $f_1 = 2e_1 - e_2$ et $f_2 = e_2 - 2e_3$. Soit h la symétrie orthogonale glissée par rapport à $\mathcal{P}$, de vecteur $u = 2f_1 - f_2$.

1. Donner un vecteur $f_3 \neq 0$ orthogonal à P.
2. Soit σ la partie linéaire de h. Pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, rappeler la formule exprimant $\sigma(v)$ en fonction de v et f_3, puis écrire la matrice A de σ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
3. Pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, déterminer les coordonnées (x', y', z') dans $\mathcal{R}$ du point $M' = h(M)$.

Exercice 6 (10 pts)**.** Soit E muni de $(\ |\ )$ un espace euclidien et soit $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée.

1. Soient $\mathcal{B}$ une base arbitraire de E, $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Déterminer la matrice A du produit scalaire $(\ |\ )$ dans $\mathcal{B}$, puis montrer que dét $A > 0$.
2. Soient $u_1, \dots, u_r \in E$ des vecteurs linéairement indépendants, et soit B la matrice
$$\begin{pmatrix} (u_1 \mid u_1) & \cdots & (u_1 \mid u_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (u_r \mid u_1) & \cdots & (u_r \mid u_r) \end{pmatrix},$$
montrer que $\text{dét}(B) > 0$.
3. Pour $r = 2$, en déduire une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ de signature $(1, 1)$, soient $\mathcal{B}$ une base arbitraire de $\mathbb{R}^2$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$. Montrer que $\text{dét}(A) < 0$, puis montrer que pour $u, v \in \mathbb{R}^2$ non liés, on a $\phi(u, v)^2 > \phi(u, u)\phi(v, v)$.

Exercice 7 (15pts)**.** On munit $E = \mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel $(\ |\ )$, pour lequel la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est orthonormée. Soit $E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$ l'espace dual. Pour tout $x \in E$, soit $\phi_x \in E^*$ l'application $w \mapsto (x \mid w)$.

1. Montrer que l'application $\theta : E \to E^*$, $x \mapsto \phi_x$ est bijective.
2. Soient $u, v \in E$, montrer qu'il existe un unique vecteur $f(u, v) \in E$ tel que $\text{dét}_{\mathcal{B}_0}(u, v, w) = (f(u, v) \mid w)$ pour tout $w \in E$.
3. Montrer que l'application $E \times E \to E$, $(u, v) \mapsto f(u, v)$ est bilinéaire et alternée.
4. Écrivant $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et considérant un vecteur $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ variable, déterminer les coordonnées dans $\mathcal{B}_0$ de $f(u, v)$.