Université Pierre et Marie Curie 2009–2010
LM270, Examen 2ème session du 28 juin 2010 (3h)

Cet examen comporte 7 exercices et est noté sur 100. **Aucun document n'est autorisé**.

Dans certains des exercices, on attend des réponses citant des résultats du cours ; ceci comptera pour une partie importante des points. Dans ces exercices, une réponse basée uniquement sur un calcul ne donnera qu'une partie des points. Dans tous les exercices, les réponses correctes mais non justifiées ne donneront qu'une fraction des points.

Exercice 1 (16pts)**.** Pour chaque matrice de $M_4(\mathbb{R})$ ci-dessous, déterminez les valeurs propres et la dimension des espaces propres puis dîtes, en le justifiant, si la matrice est diagonalisable ou non.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \\ -8 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (10pts)**.** Réduire en somme de carrés puis déterminer la signature et le rang des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^4$ suivantes :

1. $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 4z^2 + t^2 - 4xz + 2xt + 2yz - 4yt - 4zt$.
2. $Q(x, y, z, t) = -x^2 - y^2 - 2xy + yz + 2yt + 3zt$.

Exercice 3 (22 pts)**.** Soient $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Si $M \in \mathcal{E}$, on écrira $M(x, y, z)$ pour indiquer que (x, y, z) sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{P}$ le plan affine passant par le point $I(-1, 0, 1)$ et de direction le plan vectoriel P engendré par $f_1 = e_1 + 2e_2$ et $f_2 = e_2 + e_3$. Soit D la droite vectorielle $P^\perp$. On note π_D (resp. π_P) la projection orthogonale sur D (resp. P) et σ la symétrie orthogonale par rapport à P.

1. Donner un vecteur non nul $f_3 \in D$.
2. Pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, rappeler les formules exprimant $\pi_D(v)$, puis $\pi_P(v)$ et $\sigma(v)$ en fonction de v et de f_3, puis écrire dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la matrice A (resp. B) de π_P (resp. σ).
3. Soient f la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ et g la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$. Pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, écrire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IM}$ puis déterminer celles (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) des points $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$.
4. Soit t_u la translation de vecteur $u = f_1 - f_2$. Pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, déterminer les coordonnées (x_1', y_1', z_1') et (x_2', y_2', z_2') des points $M_1' = t_u(M_1)$ et $M_2' = t_u(M_2)$. Déterminer, en le justifiant, la nature et les caractéristiques de la transformation affine $t_u \circ g$.

Exercice 4 (16pts)**.** Soit $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ un repère orthonormé direct du plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$. On note $\mathcal{B}$ la base (e_1, e_2) ; pour tout $M \in \mathcal{P}$, on écrira $M(x, y)$ pour indiquer que (x, y) sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$. Soient $A(1, -1)$, $B(1, 1)$ et $C(-\sqrt{2}, 0)$ et soient r_1 la rotation de centre O envoyant A sur B, et r_2 la rotation de centre C envoyant B sur A.

1. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$ puis les déterminants $\text{dét}_\mathcal{B}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $\text{dét}_\mathcal{B}(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$. En déduire les angles θ_1 et θ_2 des rotations r_1 et r_2.
2. Déterminer sans calculs, en justifiant votre réponse, la nature et les caractéristiques des transformations affines $r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_2$.
3. Pour tout $M(x, y)$, calculer les coordonnées (x_1, y_1) de $M_1 = r_1(M)$, (x_2, y_2) de $M_2 = r_2(M)$ et (x', y') de $M' = (r_2 \circ r_1)(M)$.

Exercice 5 (11pts)**.** Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ suivante : $q(x, y, z) = y^2 + 4xy - 2xz + 4yz$, et soit ϕ sa forme polaire. On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Écrire la matrice S de ϕ dans la base $\mathcal{B}_0$.
2. Déterminer les valeurs propres de S et une base orthonormée $\mathcal{B}$ de vecteurs propres.
3. Soient X, Y, Z les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ choisie, exprimer Q en fonction de X, Y, Z.

Exercice 6 (10 pts)**.** Soient $n, r \in \mathbb{N}^*$, avec $r \leq n$, et $J = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_n(\mathbb{R})$, où I_r est la matrice identité de taille r.

1. Pour tout $P = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in M_n(\mathbb{R})$, où $A \in M_r(\mathbb{R})$, $B \in M_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in M_{n-r}(\mathbb{R})$, exprimer la matrice ${}^tPJP$ sous la forme $\left(\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline M & N \end{array}\right)$ où l'on exprimera les matrices K, L, M, N en fonction de A, B, C, D.
2. Soient ϕ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ de signature $(r, 0)$ et S sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$. Déterminer une matrice $Q \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tQQ$.

Exercice 7 (15 + 2pts)**.** Soit $(\ |\ )$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, pour lequel la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée. Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, π la projection orthogonale sur E, $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_p)$ une base arbitraire de E, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_p) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, et $G \in M_p(\mathbb{R})$ la matrice $(g_{i,j})_{1 \le i,j \le p}$, où pour tout i, j, on a $g_{i,j} = (v_i \mid v_j)$.

1. Montrer que $\mathrm{dét}(G) \neq 0$.
2. À tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ on associe le vecteur $X = \begin{pmatrix} (v_1 \mid Y) \\ \vdots \\ (v_p \mid Y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$. Exprimer X en fonction de M et Y.
3. D'autre part, on pose $\pi(Y) = t_1 v_1 + \cdots + t_p v_p$ et $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $X = GT$.
4. Déduire des questions précédentes une formule exprimant T en fonction de Y, M et G.
5. On prend $n = 4$, $p = 2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice G et calculer G^{-1} ; puis, prenant $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, déterminer les réels t_1, t_2 tels que $\pi(Y) = t_1 v_1 + t_2 v_2$.
6. (bonus 2 pts) Soient v_1, v_2 et Y, t_1, t_2 comme dans la question précédente. Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan affine euclidien $\mathcal{P}$, faire un dessin représentant les points de coordonnées $(0, y_1)$, $(1, y_2)$, $(2, y_3)$, $(3, y_4)$, où $(y_1, y_2, y_3, y_4) = {}^tY = (1, 0, 3, 2)$, ainsi que la droite affine $\mathcal{D}$ d'équation $y = t_1 + t_2 x$.