Université Pierre et Marie Curie 2010–2011
LM270, Examen 2ème session du 28 juin 2011 (3h)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen est noté sur **75** et comporte **6** exercices indépendants.

Exercice 1 (10 pts)**.** Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $A_t = \begin{pmatrix} t+1 & 0 & -t-1 & 0 \\ -1 & t-1 & 2 & 2-t \\ 2 & 4 & t & t-1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Échelonner cette matrice en faisant des opérations sur les colonnes et calculer en fonction de t le déterminant et le rang de A_t ; lorsque $\operatorname{rang}(A_t) < 4$, donner une base de $\operatorname{Im}(A_t)$ et de $\operatorname{Ker}(A_t)$.

Exercice 2 (18 pts)**.** Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $c \neq 0$, et soient $\mathscr{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et E le sous-espace formé des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire

$$(*) \qquad u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n.$$

1. (1 pt) Dîtes, en le justifiant, quelle est la dimension de E.
2. (0,5 pt) Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer que la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si $P(\lambda) = 0$, pour un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 que l'on déterminera.
3. (0,5 pt) Soit $D : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ l'opérateur de décalage, qui envoie toute suite $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $D(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ (i.e. $D(\mathbf{u})_n = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Montrer que E est stable par D.
4. (2,5 pts) On suppose que P a trois racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Montrer que les suites $\mathbf{u} = (\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{v} = (\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{w} = (\lambda_3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes. (On pourra soit utiliser l'endomorphisme D, soit considérer, pour $x, y, z \in \mathbb{C}$, le système $x\lambda_1^i + y\lambda_2^i + z\lambda_3^i = 0$ pour $i = 0, 1, 2$). Que peut-on en déduire dans ce cas ?
5. (1,5 pts) On suppose que $\lambda_1 = 1 = -\lambda_2$ et $\lambda_3 = 2$. Soit $\mathbf{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'élément de E tel que $t_0 = 1$ et $t_1 = 4 = t_2$. Déterminer t_{99} et t_{100}.
6. (2 pts) Montrer qu'une suite $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si $(a_3D^3 + a_2D^2 + a_1D + a_0\mathrm{id})(\mathbf{u}) = 0$, pour un certain polynôme $Q = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ que l'on déterminera.
7. (3 pts) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et soient $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ les suites définies par $u_n = \lambda^n$, $v_n = n\lambda^{n-1}$ et $w_n = \binom{n}{2}\lambda^{n-2}$, où $\binom{n}{2}$ est le coefficient binomial $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Calculer $(D - \lambda\mathrm{id})(\mathbf{u})$, puis $(D - \lambda\mathrm{id})^i(\mathbf{v})$ pour $i = 1, 2$, puis $(D - \lambda\mathrm{id})^i(\mathbf{w})$ pour $i = 1, 2, 3$.
8. (3 pts) Déduire des questions précédentes que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est une racine double (resp. triple) de P, alors $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (resp. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$) appartiennent à E. Montrer d'autre part que les suites $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont linéairement indépendantes (considérer, pour $x, y, z \in \mathbb{C}$, le système $xu_i + yv_i + zw_i = 0$ pour $i = 0, 1, 2$).
9. (2 pts) On suppose que $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est racine triple de P. Soit $\mathbf{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'élément de E tel que $t_0 = 1$ et $t_1 = 0 = t_2$. Exprimer t_n en fonction de n et de λ. D'autre part, notant d l'endomorphisme de E induit par D, écrire la matrice de d dans la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ introduite à la question précédente.
10. (2 pts) On suppose que $P = (X - \lambda)^2(X - \mu)$ avec $\mu \neq \lambda$ et $\lambda\mu \neq 0$. Donner trois suites $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ appartenant à E et montrer qu'elles sont linéairement indépendantes.

Exercice 3 (8pts)**.** Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 4z^2 + t^2 + 4xz - 2xt - 3zt - yz + 2yt.$$

Écrire q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes et déterminer sa signature et son rang.

Exercice 4 (12 pts)**.** Soit $\mathscr{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique $\mathscr{R}_0 = (O, \mathscr{B})$, où O désigne le point $(0, 0, 0)$ et $\mathscr{B}$ la base canonique (e_1, e_2, e_3). Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ définie par : pour tout point $M = (x, y, z)$, les coordonnés (x', y', z') du point $M' = f(M)$ sont

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x + \sqrt{2}y + z \\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}z \\ x + \sqrt{2}y - z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. (1 pt) Soit $\overrightarrow{f}$ la partie linéaire de f. Écrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f})$.
2. (1,5 pts) Citer un théorème du cours assurant que les espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux et de somme égale à $\mathbb{R}^3$.
3. (4,5 pts) Montrer d'autre part que $A \in O(3)$. Que peut-on dire alors de ses valeurs propres ? Déterminer une base de chaque espace propre.
4. (1 pt) Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de $\overrightarrow{f}$.
5. (2,5 pts) Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points I tels que $\overrightarrow{If(I)} \in \mathrm{Ker}(A - I_3)$ et, pour tout $I \in \mathscr{D}$, déterminer le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{If(I)}$.
6. (1,5 pts) Déduire de ce qui précède la nature et les caractéristiques géométriques de f.

Exercice 5 (12 pts)**.** Soit $\mathscr{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique $\mathscr{R}_0 = (O, \mathscr{B})$, où O désigne le point $(0,0,0)$ et $\mathscr{B}$ la base canonique (e_1, e_2, e_3). Soient I le point $(0,2,0)$, w le vecteur $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$, et $\mathscr{D}$ la droite affine $I + \mathbb{R}w$. Soit f le vissage d'axe $\mathscr{D}$ orienté par w, d'angle $\pi/4$ et de vecteur de vissage $\sqrt{2}w = e_1 - e_3$, et soit $\overrightarrow{f}$ sa partie linéaire.

1. (4 pts) Déterminer un vecteur unitaire v tel que $\mathscr{C} = (e_2, v, w)$ soit une BON directe. Écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ et son inverse P^{-1}.
2. (4 pts) Écrire la matrice $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\overrightarrow{f})$, puis la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f})$ (on écrira B sous la forme $B = \dfrac{1}{4}A$, où tous les coefficients de A sont de la forme $p + q\sqrt{2}$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$).
3. (3 pts) Soit g la rotation d'axe $\mathscr{D}$ orienté par w, et d'angle $\pi/4$. Pour tout point $M = (x, y, z)$, déterminer les vecteurs $\overrightarrow{Ig(M)}$ puis $\overrightarrow{If(M)}$.
4. (1 pt) Déterminer les coordonnées (x', y', z') du point $M' = f(M)$.

Exercice 6 (15 pts)**.** Soit $\mathscr{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$, muni du repère orthonormé canonique $\mathscr{R}_0 = (O, \mathscr{B})$, où O désigne le point $(0,0)$ et $\mathscr{B}$ la base canonique (e_1, e_2). On fixe un réel $h > 0$. Pour tout réel $e > 0$ soit alors $\mathscr{C}_e = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = e^2(x+h)^2\}$.

1. (1 pt) Montrer que l'intersection de $\mathscr{C}_e$ avec la droite d'équation $x = 0$ est formée de deux points D_e^+ et D_e^- que l'on déterminera.
2. (3 pts) Écrire l'équation de $\mathscr{C}_e$ sous la forme $q(x,y) + \alpha x + \beta y = k$, où q est une forme quadratique et α, β, k des réels que l'on déterminera, puis déterminer les valeurs de e pour lesquelles $\mathscr{C}_e$ est une parabole, resp. une ellipse, resp. une hyperbole.
3. (0,5 pt) On suppose que $\mathscr{C}_e$ est une parabole. Montrer que l'intersection de $\mathscr{C}_e$ avec la droite d'équation $y = 0$ est un point P que l'on déterminera.
4. (2,5 pts) On suppose que $\mathscr{C}_e$ est une ellipse. Écrire l'équation de $\mathscr{C}_e$ sous la forme
$$\frac{(x-\mu)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
pour des réels μ, a, b (avec $a, b > 0$) que l'on déterminera. Soit C_e le point $(\mu, 0)$. Calculer les abscisses $x_e^- < x_e^+$ des points d'intersection $S_e^- = (x_e^-, 0)$ et $S_e^+ = (x_e^+, 0)$ de $\mathscr{C}_e$ avec la droite $y = 0$, puis montrer que $\mathscr{C}_e$ coupe la droite $\Delta_e = C_e + \mathbb{R}e_2$ en deux points T_e^- et T_e^+ que l'on déterminera.
5. (4 pts) On suppose que $\mathscr{C}_e$ est une hyperbole. Écrire l'équation de $\mathscr{C}_e$ sous la forme
$$\frac{(x-\mu)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
pour des réels μ, a, b (avec $a, b > 0$) que l'on déterminera. Soit C_e le point $(\mu, 0)$. Calculer les abscisses $x_e^- < x_e^+$ des points d'intersection $S_e^- = (x_e^-, 0)$ et $S_e^+ = (x_e^+, 0)$ de $\mathscr{C}_e$ avec la droite $y = 0$. D'autre part, soit $\mathscr{D}_e^+$ (resp. $\mathscr{D}_e^-$) la droite affine passant par le point C_e et de vecteur directeur $ae_1 + be_2$ (resp. $ae_1 - be_2$), et soit $A_e^+ = (0, y_e^+)$ (resp. $A_e^- = (0, y_e^-)$) le point d'intersection de $\mathscr{D}_e^+$ (resp. $\mathscr{D}_e^-$) avec la droite $x = 0$. Déterminer y_e^+ et y_e^-.
6. (4 pts) On prend maintenant $h = 3$ et l'on fixe e_0 tel que $\mathscr{C}_{e_0}$ soit une parabole. Représenter sur un même dessin les coniques $\mathscr{C}_e$ pour $e = e_0/2, e_0, \sqrt{2}e_0$, en faisant figurer les points $D_e^\pm$ de la question 1), le point P de la question 3), les points $S_e^\pm$, C_e et $T_e^\pm$ des questions 4) et 5), ainsi que les points $A_e^\pm$ et les droites $\mathscr{D}_e^\pm$ de la question 5). (Lorsque $\mathscr{C}_e$ est une hyperbole, on pourra ne représenter que la partie de $\mathscr{C}_e$ et de $\mathscr{D}_e^\pm$ contenue dans le demi-plan $x \geq \mu$. D'autre part, on rappelle que $\sqrt{2} \simeq 1,4$ et $\sqrt{3} \simeq 1,7$.)