Université Pierre et Marie Curie 2010–2011
LM270, Partiel du 1er avril 2011 (2h)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte 3 exercices et est noté sur 60.

Exercice 1 (20 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$.

1. (3 pts) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A.
2. (2 pts) Montrer, **sans calculs** et un citant un résultat du cours, que A est diagonalisable.
3. (9 pts) Déterminer une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A et écrire les matrices $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, puis calculer P^{-1}.
4. (3 pts) Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ une fonction de classe C^∞ vérifiant l'équation différentielle $X'(t) = A \cdot X(t)$. On pose $Y(t) = P^{-1} \cdot X(t)$. Montrer que la fonction $t \mapsto Y(t)$ est solution d'une équation différentielle $Y'(t) = B \cdot Y(t)$, pour une matrice B que l'on déterminera. Résoudre cette équation différentielle, c.-à.-d., exprimer $Y(t)$ en fonction de $Y(0)$ (on rappelle que si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ vérifiant l'équation différentielle $f'(t) = \lambda f(t)$, alors $f(t) = e^{\lambda t} f(0)$).
5. (3 pts) On suppose que $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer $Y(0)$ puis $Y(100)$ puis $X(100)$.

Exercice 2 (10 pts)**.** Soient V un k-espace vectoriel, $u \in \mathrm{End}_k(V)$, $d \in \mathbb{N}^*$ et $x \in V$ tels que $u^d(x) = 0$ mais $u^{d-1}(x) \neq 0$ (par définition, $u^0 = \mathrm{id}_V$). Montrer que la famille $\{x, u(x), u^2(x), \dots, u^{d-1}(x)\}$ est libre. (Considérer une relation de dépendance linéaire $a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{d-1} u^{d-1}(x) = 0$; on pourra soit lui appliquer u et procéder par récurrence sur d, soit appliquer u^{d-1}, etc.)

Exercice 3 (30 pts)**.** Soit $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et soit D l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ qui à tout $f \in \mathcal{E}$ associe la fonction dérivée f'. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$, on note E_P le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ formé des $f \in \mathcal{E}$ qui sont annulés par l'endomorphisme $P(D)$, c.-à.-d., si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, alors

$$E_P = \{f \in \mathcal{E} \mid D^n(f) + a_{n-1}D^{n-1}(f) + \cdots + a_1 D(f) + a_0 f = 0\}.$$

On admet que $\dim E_P = n = \deg(P)$.

1. (2 pts) Montrer que chaque sous-espace E_P est stable par D.
2. (2 pts) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, écrire, en utilisant la formule du binôme, $(D - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{E}})^p$ comme une somme de termes $a_i D^i$. Quelle est la dimension de $E_{(X-\lambda)^p}$?
3. (6 pts) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{N}$, soit $f_{\lambda,i} \in \mathcal{E}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{t^i}{i!} \exp(\lambda t)$. On pose $Q = (X - \lambda)^p$. Pour tout $i = 0, 1, \dots, p-1$, calculer $(D - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{E}})(f_{\lambda,i})$. En utilisant l'exercice 2, montrer que les fonctions $f_{\lambda,i}$, pour $i = 0, 1, \dots, p-1$, forment une base $\mathcal{C}_Q$ de E_Q.
4. (3 pts) Soit $P = \displaystyle\prod_{s=1}^{r} (X - \lambda_s)^{p_s}$ et soient $V = E_P$ et $n = \dim(V) = p_1 + \cdots + p_r$. On note u l'endomorphisme de V induit par D, c.-à.-d., $u(f) = D(f)$ pour tout $f \in V$. Montrer que λ_s est valeur propre de u, pour $s = 1, \dots, r$. On note $V_{(\lambda_s)}$ l'espace caractéristique de u correspondant à λ_s.
5. (4 pts) Pour $s = 1, \dots, r$, soit $Q_s = (X - \lambda_s)^{p_s}$. Montrer que $E_{Q_s} \subset E_P = V$.
6. (7 pts) Pour toute valeur propre λ de u, de multiplicité algébrique m, on rappelle que

   $$\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_V) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_V)^2 \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_V)^m = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_V)^{m+1} = \cdots = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_V)^n.$$

   Montrer que chaque E_{Q_s} est contenu dans l'espace caractéristique $V_{(\lambda_s)}$ de u. En utilisant un résultat du cours, en déduire qu'on a l'égalité $E_{Q_s} = V_{(\lambda_s)}$ pour tout $s = 1, \dots, r$, et que le polynôme caractéristique de u est $(-1)^n P$.

7. (3 pts) En utilisant le même résultat du cours, montrer que les fonctions

$$f_{\lambda_1,0},\dots,f_{\lambda_1,p_1-1},\ f_{\lambda_2,0},\dots,f_{\lambda_2,p_2-1},\ \cdots,\ f_{\lambda_r,0},\dots,f_{\lambda_r,p_r-1}$$

(c.-à.-d., les fonctions f_{λ_s,i_s}, pour $s=1,\dots,r$ et $0\le i_s\le p_s-1$), forment une base $\mathcal{C}$ de V.

8. (3 pts) Écrire la matrice de u dans cette base. (La présenter sous la forme d'une matrice diagonale par blocs.)