CHAPITRE 6

ESPACES EUCLIDIENS ET GROUPES ORTHOGONAUX O(n)

Résumé : Ce chapitre constitue le coeur de la partie « géométrique » du cours. Dans la section 1, on introduit les espaces vectoriels euclidiens, dont le prototype est $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard, puis on démontre l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui assure que le produit scalaire donne naissance à une « norme euclidienne » (d'où une notion de « distance », cf. 6.1.5). On introduit ensuite le groupe $\mathrm{O}(n)$ des isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Dans la section 2, on on démontre l'important théorème de diagonalisation simultanée 6.2.9. Dans la section 3, on introduit les projections et symétries orthogonales, ainsi que le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Enfin, dans la section 4, on étudie en profondeur les isométries de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. En résumé, ce chapitre contient beaucoup de résultats nouveaux et importants, qu'il faut essayer d'assimiler !

On a indiqué par des symboles les définitions, exemples et résultats fondamentaux. Par ailleurs, des *compléments de cours*, pour les étudiants intéressés, sont donnés dans des appendices à la fin du chapitre ; ces passages n'interviendront pas dans les évaluations.

6.1. Espaces euclidiens. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Isométries

Définitions 6.1.1 **(Produits scalaires et espaces euclidiens)**. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie.

(1) Soient ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E et Q la forme quadratique associée (i.e. $Q(x) = \phi(x,x)$ pour tout $x \in E$). On dit que Q (ou ϕ) est **définie positive** si l'on a :

(Déf. Pos.) $$\boxed{\forall x \in E - \{0\}, \qquad Q(x) = \phi(x,x) > 0.}$$

Dans ce cas, on dit que ϕ est un **produit scalaire** et on note souvent $\phi(x,y) = (x \mid y)$.

Remarquons que si Q (ou ϕ) est définie positive, elle est non-dégénérée : en effet, si $x \in N(\phi)$, on a $0 = \phi(x,y)$ pour tout $y \in E$, en particulier $\phi(x,x) = 0$, d'où $x = 0$.

(2) Dans ce cas, on dit que : « E, *muni de* $(\ \mid\ )$ » (ou que : « *le couple* (E,ϕ) ») est un **espace euclidien**. [1] Pour abréger, on écrira souvent : « Soit E un espace euclidien », sans préciser le produit scalaire $(\ \mid\ )$, celui-ci étant sous-entendu.

Exemples 6.1.2. — (1) $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien standard :

$$(x \mid y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \qquad \text{si } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

et de la forme quadratique associée $Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, est un espace euclidien de dimension n. Pour ce produit scalaire, la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est *orthonormée*, i.e. on a $(e_i \mid e_j) = 1$ si $i = j$ et $= 0$ sinon.

[0] version du 10/7/2012

[1] En fait, on réserve d'habitude cette terminologie au cas où E est de dimension finie ; sinon on dit que E est un espace *préhilbertien réel* (voir l'explication de cette terminologie dans l'Appendice 8.6 à la fin du dernier chapitre). Nous n'utiliserons pas cette terminologie.

(2) L'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt\,,$$

est un espace euclidien, qui n'est pas de dimension finie.

***Définition et proposition 6.1.3* (Familles et bases orthonormées)**
Soit E, muni de $(\ \mid\ )$, un espace euclidien.

(1) *Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs est dite* **orthonormée** *si $(e_i \mid e_i) = 1$ et $(e_i \mid e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.*

(2) *Supposons E de dimension n. Une* **base orthonormée** *est une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E qui est une famille orthonormée, i.e. qui vérifie $(e_i \mid e_i) = 1$ et $(e_i \mid e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.*

(3) *Toute famille orthonormée est <u>libre</u>. En particulier, si $\dim E = n$, toute famille orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de cardinal n est une base orthonormée de E.*

(4) *Dans la suite, on abrégera souvent « base orthonormée » en : b.o.n. ou BON.*

Démonstration. — Prouvons (3). Supposons qu'on ait une relation $0 = t_1 e_{i_1} + \cdots + t_p e_{i_p}$, avec $i_1, \dots, i_p \in I$ deux à deux distincts, et $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$. Fixons un indice $r \in \{1, \dots, p\}$ et appliquons $(e_{i_r} \mid\ )$ à l'égalité précédente. Comme $(e_{i_r} \mid e_{i_s}) = 0$ pour $s \neq r$, on obtient $0 = t_r(e_{i_r} \mid e_{i_r}) = t_r$, d'où $t_r = 0$. Ceci prouve que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre. □

***Théorème 6.1.4* (Existence de b.o.n.).** — *Soit E un espace euclidien de dimension n. Alors E admet une base orthonormée.*

Démonstration. — D'après le théorème d'inertie de Sylvester 5.1.15, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthogonale (i.e. $(e_i \mid e_j) = 0$ pour $i \neq j$) et telle que $(e_i \mid e_i) \in \{1, -1, 0\}$; or comme $(\ \mid\ )$ est défini positif on a nécessairement $(e_i \mid e_i) = 1$, donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n. □

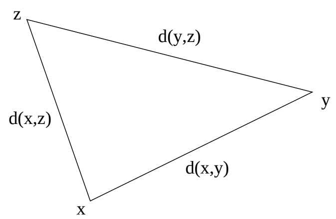
***Définition 6.1.5* (Normes).** — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une **norme** $\|\cdot\|$ sur E est une application $E \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|x\|$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in E$, on a $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$ (où $|t|$ est la valeur absolue de t).

(3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, pour tout $u, v \in E$.

Remarque. L'inégalité précédente est nommée **Inégalité triangulaire**, pour la raison suivante. Si on pose $d(x,y) = \|y - x\|$, pour tout $x, y \in E$, alors, compte-tenu de (1) et (2) ci-dessus, (3) équivaut à dire (en posant $u = y - x$, $v = z - y$) que l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ est une **distance** sur E, i.e. vérifie :
(1′) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(2′) $d(x,y) = d(y,x)$.
(3′) <u>Inégalité triangulaire</u> : pour tout $x, y, z \in E$, on a : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$



***Théorème 6.1.6* (Inégalité de Cauchy-Schwarz et norme euclidienne)**
Soit E, muni de $(\ \mid\ )$, un espace euclidien et soit $Q(x) = (x \mid x)$ la forme quadratique associée.

(1) *On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

(CS) $$\boxed{\forall x, y \in E \qquad (x \mid y)^2 \leq Q(x)Q(y)}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

(2) *Par conséquent, l'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ est une norme sur E, appelée la* **norme euclidienne** *associée à $(\ \mid\ )$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz se récrit comme suit (où dans le terme de gauche $|\cdot|$ désigne la valeur absolue dans $\mathbb{R}$) :*

(CS) $$\boxed{\forall x, y \in E \qquad |(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.}$$

Démonstration. — Si $y = \lambda x$, on a $Q(y) = \lambda^2 Q(x)$ et $(x \mid y)^2 = \lambda^2 (x \mid x)^2 = Q(y)Q(x)$, et de même si $x = \lambda y$. Donc on a l'égalité si x, y sont liés, en particulier si $x = 0$ ou $y = 0$. Supposons donc x et y non nuls ; pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$0 \leq Q(tx + y) = t^2 Q(x) + 2t\,(x \mid y) + Q(y)$$

donc le discriminant réduit $\Delta' = (x \mid y)^2 - Q(x)Q(y)$ de ce trinôme [2] en t est ≤ 0, ce qui prouve l'inégalité (CS). De plus, si $\Delta' = 0$ le trinôme ci-dessus a une racine double réelle $t_0 = -(x \mid y)/Q(x)$, et l'égalité $Q(t_0 x + y) = 0$ entraîne, puisque Q est définie positive, $t_0 x + y = 0$, i.e.

$$y = \frac{(x \mid y)}{(x \mid x)}\, x.$$

Ceci prouve (1).

Prouvons que $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ est une norme sur E. Comme $(\ \mid\ )$ est défini positif, on a $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, on a $|t| = \sqrt{t^2}$ et donc

$$\|t\,x\| = \sqrt{t^2\,(x \mid x)} = |t| \cdot \|x\|.$$

Enfin, soient $x, y \in E$. D'abord, l'inégalité de Cauchy-Schwarz équivaut (en prenant la racine carrée) à :

$$|(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,;$$

alors, multipliant par 2 et ajoutant $\|x\|^2 + \|y\|^2$ aux deux membres, on obtient

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y) &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x \mid y)| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.\end{aligned}$$

Prenant la racine carrée, ceci entraîne (et équivaut à) l'inégalité triangulaire. Le théorème est démontré. □

Récrivons certaines conséquences de l'égalité $(x + y \mid x + y) = (x \mid x) + (y \mid y) + 2(x \mid y)$ en utilisant la norme $\|\cdot\|$ (ou plutôt son carré) :

***Proposition 6.1.7* (Pythagore, parallélogramme et médiane, polarisation)**
Soit E un espace euclidien, et soit $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $(\ \mid\ )$. On a les égalités suivantes :

(Pythagore) $\qquad \|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2 \qquad$ si $x_1, \ldots, x_n$ sont orthogonaux

(Parallélogramme/Médiane) $\qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

(Polarisation) $\qquad 4(x \mid y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$

Démonstration. — L'égalité de Pythagore est immédiate si $n = 2$, et dans ce cas on a même la réciproque : si $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ alors $(x_1 \mid x_2) = 0$. L'égalité pour n vecteurs orthogonaux s'obtient par récurrence sur n. On prendra garde que la réciproque est fausse pour $n \geq 3$: prendre par exemple dans $\mathbb{R}^2$ euclidien les vecteurs $x_1 = e_1$, $x_2 = e_1 + e_2$, $x_3 = e_2 - e_1$.

Les deux autres égalités s'obtiennent en ajoutant (resp. soustrayant) les égalités :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y \mid x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)\\ \|x-y\|^2 &= (x-y \mid x-y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x \mid y)\end{aligned}$$

□

Remarques 6.1.7.1. — La deuxième égalité s'appelle « identité du parallélogramme », car elle exprime que dans le parallélograme construit sur les vecteurs x et y, la somme des carrés des longueurs des quatre côtés égale la somme des carrés des longueurs des deux diagonales (qui sont $x + y$ et $x - y$). Elle s'appelle aussi « identité de la médiane », car dans le triangle construit sur les vecteurs x et y, la « médiane » joignant 0 au milieu du côté $x - y$ est $(x + y)/2$, et l'on a donc une formule exprimant (le carré de) la longueur de la médiane en fonction de la longeur des côtés :

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2} - \frac{\|x-y\|^2}{4}\,.$$

[2] Pour un trinôme $aX^2 + 2bX + c$ dont le coefficient de X est *pair*, il est commode de considérer le discriminant réduit $\Delta' = b^2 - ac$ (au lieu du discriminant usuel $\Delta = (2b)^2 - 4ac = 4\Delta'$).

Enfin, la dernière égalité est appelée « identité de polarisation », car elle exprime en fonction de la forme quadratique $Q(x) = \|x\|^2$ le produit scalaire, qui est la « forme polaire » de Q. On l'a déjà rencontrée dans le Chap. 4 sous la forme $4\phi(x, y) = Q(x + y) - Q(x - y)$.

Avant d'introduire la définition suivante, rappelons que la fonction cosinus induit une **bijection de** $[0, \pi]$ **sur** $[-1, 1]$ (on a $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$, et cos est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$).

Définition 6.1.8 **(Angle non orienté de deux vecteurs non nuls)**. — Soit E, muni de $(\ |\ )$, un espace euclidien et soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Soient u, v deux vecteurs non nuls. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|(u \mid v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \qquad \text{d'où} \qquad -1 \leq \frac{(u \mid v)}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1$$

donc il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\boxed{\cos(\theta) = \dfrac{(u \mid v)}{\|u\| \cdot \|v\|}}$ i.e. $\boxed{(u \mid v) = \cos(\theta)\, \|u\| \cdot \|v\|.}$ On appelle θ **l'angle non-orienté** des vecteurs u et v, il ne change pas si l'on échange u et v.

Définition et proposition 6.1.9 **(Isométries vectorielles)**. — *Soient E, F deux espaces euclidiens de même dimension n, notons $(\ |\ )_E$ et $\|\cdot\|_E$ (resp. $(\ |\ )_F$ et $\|\cdot\|_F$) le produit scalaire et la norme euclidienne sur E (resp. F). Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

(1) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *f préserve la norme :* $\boxed{\forall x \in E, \quad \|x\|_E = \|f(x)\|_F}$

(b) *f préserve le produit scalaire :* $\boxed{\forall x, y \in E, \quad (x \mid y)_E = (f(x) \mid f(y))_F}$

(c) *Pour toute b.o.n. $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une b.o.n. de F.*

(d) *Il existe une b.o.n. $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ soit une b.o.n. de F.*

(2) *Sous ces conditions, on dit que f est une* **isométrie** *vectorielle de E sur F*

(3) *Dans ce cas, f est bijective, et son inverse f^{-1} est aussi une isométrie.*

Démonstration. — Supposons que f préserve la norme, et soient $x, y \in E$. Alors $\|x+y\|_E^2 = \|f(x+y)\|_F^2 = \|f(x) + f(y)\|_F^2$, et le premier (resp. dernier) membre égale :

$$\|x\|_E^2 + \|y\|_E^2 + 2(x \mid y)_E, \qquad \text{resp.} \qquad \|f(x)\|_F^2 + \|f(y)\|_F^2 + 2(f(x) \mid f(y))_F$$

et comme $\|x\|_E^2 = \|f(x)\|_F^2$ et $\|y\|_E^2 = \|f(y)\|_F^2$, on obtient que $(x \mid y)_E = (f(x) \mid f(y))_F$. Ceci prouve que (a) $\Rightarrow$ (b).

Les implications (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) sont évidentes, montrons que (d) $\Rightarrow$ (a). Supposons (d) vérifiée. Pour tout $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ dans E, on a $f(x) = \sum_i x_i f(e_i)$ et, comme $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ sont des b.o.n., on obtient

$$\|x\|_E^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|f(x)\|_F^2$$

donc (a) est vérifiée. Ceci prouve l'assertion (1).

Prouvons (3). Soit $f : E \to F$ une isométrie, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Comme $f(\mathscr{B})$ est un b.o.n. (donc une base) de F, alors f est bijective. Son inverse f^{-1} envoie la b.o.n. $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ de F sur la b.o.n. $\mathscr{B}$ de E, donc f^{-1} est une isométrie. Ceci prouve (3). La proposition est démontrée. $\square$

Terminologie 6.1.9.1. — On a introduit la terminologie isométrie « vectorielle » pour pouvoir faire plus tard la distinction avec la notion d'isométrie « affine », qu'on introduira lorsqu'on étudiera les espaces et applications affines.

Dans la suite de ce chapitre, comme on ne considère que des applications linéaires, on dira simplement « isométrie » au lieu de « isométrie vectorielle ».

Définition et corollaire 6.1.10. — (1) *On dit que deux espaces euclidiens E et E' sont* **isométriques** *s'il existe une isométrie $f : E \xrightarrow{\sim} E'$.*

(2) *Tout espace euclidien E de dimension n est isométrique à $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien standard.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormée pour le produit scalaire standard. D'après le théorème 6.1.4, E admet une b.o.n. $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$. Alors l'application linéaire $u : \mathbb{R}^n \to E$ définie par $u(e_i) = f_i$, pour $i = 1, \dots, n$, est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ sur E. □

Définition 6.1.11. — On note $\mathrm{O}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$. Rappelons (cf. 0.5.2) que l'égalité ${}^tAA = I_n$ entraîne que A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$. Donc $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et, si $A \in \mathrm{O}(n)$, son inverse $B = A^{-1} = {}^tA$ vérifie $B^{-1} = A = {}^tB$, donc appartient aussi à $\mathrm{O}(n)$. De plus, pour tout $A, B \in \mathrm{O}(n)$, on a l'égalité ${}^t(AB)AB = {}^tB\,{}^tAAB = {}^tBB = I_n$, donc $AB \in \mathrm{O}(n)$. Donc $\mathrm{O}(n)$ est un *sous-groupe* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, appelé le **groupe orthogonal**.

Munissons $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien standard $(\ \mid\ )$. Pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$ on a $(X \mid Y) = {}^tXY$, i.e. la matrice de $(\ \mid\ )$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ est la matrice identité I_n. Donc une matrice arbitraire $A \in M_n(\mathbb{R})$ préserve le produit scalaire si et seulement si, on a, pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

$${}^tXY = (X \mid Y) = (AX \mid AY) = {}^tX\,({}^tAA)\,Y$$

ce qui équivaut à dire que ${}^tAA = I_n$ (cf. 5.1.3). Ceci montre que $\mathrm{O}(n)$ est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien standard $(\ \mid\ )$.

De plus, notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A (i.e. C_i est le vecteur $Ae_i \in \mathbb{R}^n$). Remarquons que, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, le coefficient d'indice (i, j) de ${}^tAA$ est le produit matriciel de la i-ème ligne de ${}^tA$, i.e. de ${}^tC_i$, par la colonne C_j, c.-à-d., on a $({}^tAA)_{ij} = (Ae_i \mid Ae_j)$, donc la condition ${}^tAA = I_n$ équivaut aussi à dire que les colonnes de A sont de norme 1 et deux à deux orthogonales. Tenant compte de la proposition 6.1.9, on obtient donc les caractérisations suivantes de $\mathrm{O}(n)$, chacune étant utile :

Proposition 6.1.12 **(Groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$).** — *On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien standard $(\ \mid\ )$ et l'on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Alors $\mathrm{O}(n)$ est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$; il est caractérisé par* chacune *des égalités suivantes :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{O}(n) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\} \\
&= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = {}^tA\} \\
&= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid (AX \mid AY) = (X \mid Y), \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|AX\| = \|X\|, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid (Af_1, \dots, Af_n) \text{ est une b.o.n., pour } \underline{\text{toute}} \text{ b.o.n. } (f_1, \dots, f_n)\} \\
&= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid (Ae_1, \dots, Ae_n) \text{ est une b.o.n., où } (e_1, \dots, e_n) \text{ est la base canonique de } \mathbb{R}^n\} \\
&= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{les colonnes de } A \text{ sont de norme } 1 \text{ et deux à deux orthogonales}\}
\end{aligned}$$

Les éléments de $\mathrm{O}(n)$ *sont parfois appelés* « endomorphismes orthogonaux » *(mais voir la remarque* 6.3.2.1 *plus bas).*

Remarque 6.1.13. — Il existe *d'autres* groupes orthogonaux (qui ne sont isomorphes à aucun $\mathrm{O}(n)$). Soient p, q des entiers ≥ 1 et soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^{p+q}$ définie par $\phi(X, Y) = \sum_{i=1}^p x_iy_i - \sum_{i=p+1}^q x_iy_i$, i.e. la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{p+q}$ est $J = \left(\begin{array}{c|c} I_p & \mathbf{0}_{p,q} \\ \hline \mathbf{0}_{q,p} & -I_q \end{array}\right)$. Alors

$$\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAJA = J\} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \phi(AX, AY) = \phi(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n\}$$

est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, noté $\mathrm{O}(p, q)$. On ne considérera pas ces groupes dans ce cours.

6.2. Endomorphismes auto-adjoints et théorème de diagonalisation simultanée

Commençons par introduire l'adjoint dans le cas général d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, même si on se limitera dans la suite au cas euclidien.

Théorème et définition 6.2.1 **(Adjoint d'un endomorphisme).** — *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E,* **non dégénérée**. *Pour tout $u \in \mathrm{End}(E)$, il existe un unique endomorphisme u^* de E, appelé* **l'adjoint** *de u, vérifiant :*

$$\forall x, y \in E, \qquad \boxed{\phi(u(x), y) = \phi(x, u^*(y)).} \tag{1}$$

Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, si l'on note $J = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, on a

$$\boxed{A^* = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = J^{-1}\,{}^tA\,J.} \tag{2}$$

Démonstration. — Supposons qu'il existe u^* vérifiant (1) et soient $\mathscr{B}$ une base de E, $J = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A^* = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*)$. Soient $x, y \in E$ arbitraires, et notons $X, Y \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs colonnes des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Alors on a

$$^t X\, {}^t AJY = \phi(u(x), y) = \phi(x, u^*(y)) = {}^t XJA^*Y$$

d'où ${}^tAJ = JA^*$ et donc, puisque J est inversible (car ϕ non-dégénérée), $A^* = J^{-1}\, {}^tA\, J$. Ceci montre que u^*, s'il existe, vérifie (2) et est donc unique.

Réciproquement, si l'on note u^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A^* = J^{-1}\, {}^tA\, J$, alors pour tout x, y on a :

$$\phi(x, u^*(y)) = {}^tXJA^*Y = {}^tX\, {}^tA\, JY = \phi(u(x), y)$$

donc u^* vérifie (1). Ceci prouve l'existence, et le théorème est démontré. □

Remarque 6.2.2. — Il résulte de la formule (2) (ou directement de la définition (1)) que, pour tout $u, v \in \mathrm{End}(E)$ et $s, t \in \mathbb{R}$, on a $(su + tv)^* = su^* + tv^*$, i.e. l'application $\mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E)$, $u \mapsto u^*$ est linéaire.

Remarquons aussi que si ϕ est un produit scalaire et si $\mathscr{B}$ est une b.o.n., alors la matrice de ϕ dans $\mathscr{B}$ est $J = I_n$. On peut donc énoncer le théorème dans le cas euclidien sous la forme suivante.

Théorème 6.2.3 **(Adjoint d'un endomorphisme dans le cas euclidien)**
Soit E muni de $(\ |\ )$ un espace **euclidien** *de dimension n. Pour tout $u \in \mathrm{End}(E)$, il existe un unique endomorphisme u^* de E, appelé* **l'adjoint** *de u, vérifiant :*

$$(*) \qquad \forall x, y \in E, \qquad \boxed{(u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y)).}$$

Pour toute **b.o.n.** *$\mathscr{B}$ de E, si l'on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, on a*

$$(**) \qquad \boxed{A^* = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = {}^tA.}$$

Définition 6.2.4 **(Endomorphismes auto-adjoints).** — Soit E un espace **euclidien** de dimension n. On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ est **auto-adjoint** (ou symétrique) s'il vérifie $u^* = u$. Ceci équivaut à dire que, pour toute b.o.n. $\mathscr{B}$ de E, la matrice $S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est **symétrique**.

Proposition 6.2.5 **(Endomorphismes auto-adjoints et formes bilinéaires symétriques)**
Soit E muni de $(\ |\ )$ un espace **euclidien** *de dimension n et soit ϕ une autre forme bilinéaire symétrique (arbitraire) sur E. Alors il existe un unique $u \in \mathrm{End}(E)$ auto-adjoint pour $(\ |\ )$ tel que :*

$$(\dagger) \qquad \forall x, y \in E, \qquad \boxed{\phi(x, y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)).}$$

Pour toute **b.o.n.** *$\mathscr{B}$ de E, on a*

$$(\ddagger) \qquad \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi).}$$

Démonstration. — Soient $\mathscr{B}$ une b.o.n. de E et $S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$, on a ${}^tS = S$. Pour $x, y \in E$, notons $X, Y \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. S'il existe u vérifiant (†), soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, alors l'égalité

$${}^tXSY = \phi(x, y) = (x \mid u(y)) = {}^tXAY$$

entraîne $A = S$. Ceci montre que u, s'il existe, vérifie (‡) et est donc unique.

Réciproquement, si l'on note u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est S, alors pour tout x, y on a :

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= {}^tXS\,Y = (x \mid u(y)) \\ &= {}^tX\, {}^tS\,Y = (u(x) \mid y) \end{aligned}$$

donc u vérifie (†). Ceci prouve l'existence, et la proposition est démontrée. □

On a maintenant le théorème important et utile suivant.

Théorème 6.2.6 **(Diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints)**
Soient E muni de $(\ |\ )$ un espace euclidien de dimension n, et u un endomorphisme auto-adjoint. Alors, u est diagonalisable et ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Par conséquent, il existe une b.o.n. de E formée de vecteurs propres de u.

Corollaire 6.2.7 **(Diagonalisation des matrices symétriques réelles)**
Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors S est diagonalisable dans une base orthonormée : il existe $P \in \mathrm{O}(n)$ telle que $P^{-1}SP$ soit diagonale.

Le point le plus difficile de la démonstration est la proposition suivante :

Proposition 6.2.8* (Existence d'une valeur propre réelle).** — *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$* **symétrique. Alors A admet au moins une valeur propre réelle.*

Admettons pour le moment cette proposition et démontrons le théorème, par récurrence sur $n = \dim E$. C'est ok si $n = 1$, donc on peut supposer $n \geq 2$ et le résultat établi pour $n-1$. D'après la proposition, u admet au moins une valeur propre réelle λ_1, soit f_1 un vecteur propre associé, qu'on peut supposer de norme 1 (quitte à remplacer f_1 par $\dfrac{1}{\|f_1\|} f_1$). Montrons que $E_1 = (\mathbb{R} f_1)^\perp$ est stable par u : pour tout $x \in E_1$, on a :

$$(u(x) \mid f_1) = (x \mid u^*(f_1)) = (x \mid u(f_1)) = (x \mid \lambda_1 f_1) = \lambda_1 (x \mid f_1) = 0,$$

donc $u(x) \in E_1$. La restriction u_1 de u à E_1 est encore auto-adjointe, puisque pour tout $x, y \in E_1$ on a :

$$(u_1(x) \mid y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)) = (x \mid u_1(y)).$$

Donc, par hypothèse de récurrence, il existe une b.o.n. $\mathscr{C} = (f_2, \ldots, f_n)$ de E_1 formée de vecteurs propres de u_1, donc de u. Alors, $\mathscr{B} = \{f_1\} \cup \mathscr{C}$ est une b.o.n. de E formée de vecteurs propres de u. Ceci prouve la première assertion du théorème.

Le fait que les espaces propres soient deux à deux orthogonaux peut se déduire de la démonstration précédente, mais il est plus simple de le voir directement. Soient $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres distinctes de u et soient $x \in V_\lambda$ et $y \in V_\mu$; alors

$$\lambda (x \mid y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)) = \mu (x \mid y)$$

et comme $\lambda \neq \mu$ ceci entraîne $(x \mid y) = 0$. Ceci prouve le théorème, modulo la démonstration de la proposition 6.2.8. □

Démonstration de la proposition 6.2.8. — On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle et l'on considère la **sphère unité** :

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} ;$$

celle-ci est **compacte**. D'autre part, la fonction

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (Ax \mid x)$$

est **continue**, car c'est un polynôme de degré 2 en les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$. Par conséquent, f atteint un maximum λ en un point x_0 de S^{n-1}, i.e. on a :

$$\forall x \in S^{n-1}, \qquad (Ax \mid x) \leq \lambda = (Ax_0 \mid x_0).$$

Alors, pour tout $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$, on a $\dfrac{1}{\|x\|} x \in S^{n-1}$, d'où

$$\left(\frac{Ax}{\|x\|} \mid \frac{x}{\|x\|} \right) \leq \lambda$$

et donc :

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \qquad (Ax \mid x) \leq \lambda \, (x \mid x).$$

Fixons $v \in \mathbb{R}^n$ et soit $t \in \mathbb{R}$ variable. On a, d'une part :

$$f(x_0 + tv) = \big(A(x_0 + tv) \mid A(x_0 + tv)\big) = (Ax_0 \mid x_0) + t(Ax_0 \mid v) + t(Av \mid x_0) + t^2 (Av \mid v)$$

et comme $(Av \mid x_0) = (v \mid {}^t A x_0) = (v \mid Ax_0) = (Ax_0 \mid v)$, ceci se récrit :

$$(2) \qquad f(x_0 + tv) = (Ax_0 \mid x_0) + 2t(Ax_0 \mid v) + t^2 (Av \mid v).$$

D'autre part, on a :

$$\lambda \, (x_0 + tv \mid x_0 + tv) = \lambda \underbrace{(x_0 \mid x_0)}_{=1} + 2t(\lambda x_0 \mid v) + t^2 (\lambda v \mid v).$$

D'après (1), et tenant compte de l'égalité $\lambda = (Ax_0 \mid x_0)$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad 2t(Ax_0 - \lambda x_0 \mid v) + t^2 (Av - \lambda v \mid v) \leq 0.$$

On a donc un trinôme du second degré en t, toujours négatif et qui s'annule pour $t = 0$. On en déduit que son discriminant réduit $\Delta' = (Ax_0 - \lambda x_0 \mid v)^2$ est nul, donc :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \qquad (Ax_0 - \lambda x_0 \mid v) = 0$$

et donc $Ax_0 - \lambda x_0 = 0$, i.e. $Ax_0 = \lambda x_0$. Ceci prouve que x_0 est un vecteur propre pour λ. Ceci achève la démonstration de la proposition 6.2.8 et du théorème 6.2.6. □

***Théorème 6.2.9* (Réduction simultanée).** — *Soient E muni de $(\ |\ )$ un espace euclidien de dimension n, Q une forme quadratique arbitraire sur E, ϕ sa forme polaire, $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, et u l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\phi) = A$.*

Alors il existe une base $\mathscr{B} = (f_1, \dots, f_n)$ **orthonormée** *pour $(\ |\ )$ et formée de vecteurs propres de u, i.e. $u(f_i) = \lambda_i f_i$ pour $i = 1, \dots, n$, et l'on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u ; plus précisément, la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$ est orthogonale, i.e. ${}^tP = P^{-1}$, donc la matrice ci-dessus égale à la fois ${}^tPAP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ et $P^{-1}AP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Remarque 6.2.9.1. — Ce théorème est appelé « théorème de **réduction simultanée** » ou « de **diagonalisation simultanée** » car la base $\mathscr{B}$ donnée par l'énoncé est à la fois **orthonormée** pour $(\ |\ )$ et **orthogonale** pour ϕ. En d'autres termes, si l'on note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans $\mathscr{B}$ d'un vecteur x arbitraire, la base $\mathscr{B}$ **réduit simultanément** la forme $x \mapsto (x \mid x)$ à la forme standard $x_1^2 + \cdots + x_n^2$, et la forme Q en la somme de carrés $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$.

Démonstration. — Notons u l'endomorphisme auto-adjoint tel que

$$\forall x, y \in E, \qquad \phi(x, y) = (u(x) \mid y) = (x \mid (u(y)),$$

cf. Proposition 6.2.5. D'après le théorème 6.2.6, il existe une base $\mathscr{B} = (f_1, \dots, f_n)$ **orthonormée** pour $(\ |\ )$ et formée de vecteurs propres de u, i.e. $u(f_i) = \lambda_i f_i$, pour tout i. Alors, pour tout i, j on a :

$$\phi(f_i, f_j) = \lambda_i (f_i \mid f_j) = \lambda_j (f_i \mid f_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \lambda_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

ce qui montre que $\mathscr{B}$ est une base **orthogonale** pour ϕ. De plus, comme $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}$ sont orthonormées, la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$ est orthogonale, i.e. ${}^tP = P^{-1}$, donc la matrice diagonale de l'énoncé égale à la fois ${}^tPAP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ et $P^{-1}AP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. □

Répétons la version matricielle du théorème précédent :

***Corollaire 6.2.10* (Réduction simultanée des matrices symétriques réelles)**
Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tS = S$. Il existe $P \in O(n)$ telle que $P^{-1}SP = {}^tPSP$ soit diagonale.

***Corollaire 6.2.11* (Calculs de signature).** — *Soient Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, ϕ sa forme polaire, A la matrice de ϕ dans la base canonique. Alors la signature de Q est donnée par le nombre de valeurs propres de A qui sont > 0 (resp. < 0).*

Exemple 6.2.12. — Illustrons ce qui précède par l'exemple suivant. Soient $n \geq 2$ et Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$Q(x_1, \dots, x_n) = 2 \sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{i \neq j} x_i x_j.$$

La matrice de sa forme polaire est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(tous les coefficients valent 1 sauf ceux de la diagonale qui sont nuls). On remarque que la matrice $A + I_n$ est de rang 1, donc l'espace propre $V_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_n)$ est de dimension $n - 1$. Donc -1 est une racine de multiplicité $\geq n - 1$ du polynôme caractéristique $P_A(X)$. Comme $0 = \mathrm{Tr}(A)$ est la somme des racines (dans $\mathbb{C}$) de $P_A(X)$, la dernière racine λ vérifie $\lambda + (n-1)(-1) = 0$, d'où $\lambda = n-1$. Donc, d'après le théorème 6.2.9, il existe $P \in O(n)$ tel que

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{pmatrix}$$

il y a donc $n-1$ valeurs propres égales à -1, et une seule valeur propre > 0 (égale à $n-1$), donc la signature de Q est $(1, n-1)$.

Remarque 6.2.13. — Pour des applications géométriques du théorème 6.2.9, voir l'étude des coniques et quadriques dans le chapitre suivant.

6.3. Orthogonalité. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

***Définition 6.3.1* (Sous-espaces d'un espace euclidien)**. — Soit E, muni de $(\ |\ )$, un espace euclidien et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors la restriction $(\ |\ )_F$ de $(\ |\ )$ à F (cf. 5.1.9) est un produit scalaire sur F, puisque $(x \mid x)_F = (x \mid x) > 0$ pour tout $x \in F - \{0\}$. Donc F muni de $(\ |\ )_F$ est un espace euclidien.

***Théorème et définition 6.3.2* (Projection orthogonale sur un sous-espace)**
Soit E, muni de $(\ |\ )$, un espace euclidien et soient F un sous-espace et $F^\perp$ son orthogonal pour $(\ |\ )$.

(1) *On a* $\boxed{E = F \oplus F^\perp.}$ *Le projecteur $\pi_F : E \to E$, d'image F et de noyau $F^\perp$, défini par cette décomposition s'appelle la* **projection orthogonale** *sur F.*

(2) *Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base* **orthonormée** *de F. Alors* $\boxed{\pi_F(v) = (v \mid e_1)e_1 + \cdots + (v \mid e_r)e_r}$ *pour tout $v \in E$.*

(3) *On a* $\boxed{(F^\perp)^\perp = F}$ *donc la projection orthogonale $\pi_{F^\perp}$ sur $F^\perp$ n'est autre que $\mathrm{id}_E - \pi_F$, i.e. on a* $\boxed{\mathrm{id}_E = \pi_F + \pi_{F^\perp}.}$

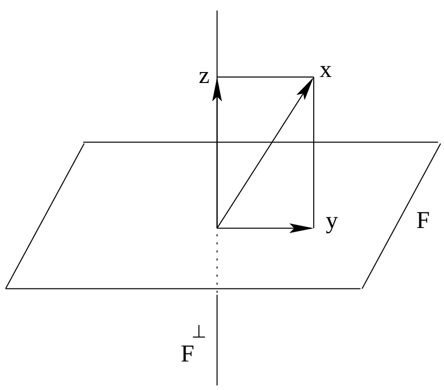
Démonstration. — Comme les formes bilinéaires symétriques $(\ |\ )$ et $(\ |\ )_F$ sont définies positives, donc non-dégénérées, on a $(F^\perp)^\perp = F$ et $E = F \oplus F^\perp$ d'après 5.1.8. Alors, tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in F^\perp$, et le projecteur π_F sur F parallèlement à $F^\perp$ (i.e. de noyau $F^\perp$) est défini par $\pi_F(x) = f$. De plus, comme $(F^\perp)^\perp = F$, alors le projecteur $\pi_{F^\perp}$ sur $F^\perp$ parallèlement à $(F^\perp)^\perp = F$ (i.e. de noyau F) est défini par $\pi_{F^\perp}(x) = g$, donc on a bien $\mathrm{id}_E = \pi_F + \pi_{F^\perp}$. Ceci prouve (1) et (3).

Prouvons (2). Soit $r = \dim F$ et soit $(e_1, \dots, e_r)$ une b.o.n. de F. Pour tout $v \in E$, notons provisoirement

$$\pi(v) = (v \mid e_1)\, e_1 + \cdots + (v \mid e_r)\, e_r \in F.$$

Alors, pour $j = 1, \dots, r$, on a $(v - \pi(v) \mid e_j) = (v \mid e_j) - \sum_{i=1}^r (v \mid e_i) \underbrace{(e_i \mid e_j)}_{\substack{=1 \text{ si } i=j \\ =0 \text{ si } i \neq j}} = 0$, d'où $v - \pi(v) \in F^\perp$, et donc $v = \pi(v) + v - \pi(v)$, avec $\pi(v) \in F$ et $v - \pi(v) \in F^\perp$. Comme $E = F \oplus F^\perp$, ceci entraîne que $\pi(v) = \pi_F(v)$, d'où l'assertion (2). $\square$

Dans la figure qui suit, on a $y = \pi_F(x)$ et $z = \pi_{F^\perp}(x)$:



Remarque 6.3.2.1. — Attention à la terminologie ! Si $F \neq E$, la projection orthogonale π_F n'est **pas une isométrie** (car une isométrie est injective, or $\mathrm{Ker}(\pi_F) = F^\perp$ est non nul, sauf si $F = E$), donc n'est **pas** un « endomorphisme orthogonal » de E (cf. 6.1.12).

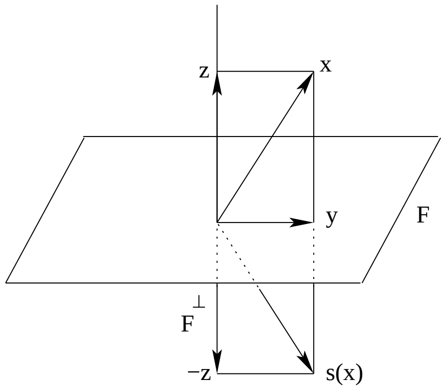
Définition et proposition 6.3.3 **(Symétries orthogonales)**. — *Soient E un espace euclidien de dimension n et F un sous-espace de dimension r.*

(1) *La* **symétrie orthogonale** s_F *par rapport à F est définie comme suit : pour tout $v \in E$, on a $v = \pi_F(v) + \pi_{F^\perp}(v)$ et l'on pose :*

$$(\star) \qquad \boxed{s_F(v) = \pi_F(v) - \pi_{F^\perp}(v) = v - 2\pi_{F^\perp}(v).}$$

Alors $s_F^2 = \mathrm{id}_E$ et s_F est une isométrie de E.

(2) *Si $\mathscr{C}_+$ est une base de F et $\mathscr{C}_-$ une base de $F^\perp$, la matrice de s_F dans la base $\mathscr{B} = \mathscr{C}_+ \cup \mathscr{C}_-$ de E est* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s_F) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{array}\right)$*. En particulier, on a* $\boxed{\text{dét}\, s_F = (-1)^{n-r}.}$



Démonstration. — D'après la définition, il est clair que $s_F^2 = \mathrm{id}_E$, donc s_F est bijective et égale à son inverse (i.e. s_F est **involutive**). Montrons que s_F est une isométrie. Comme $(\pi_F(v) \mid \pi_{F^\perp}(v)) = 0$, on a d'après l'égalité de Pythagore (cf. 6.1.7) :

$$\|v\|^2 = \|\pi_F(v)\|^2 + \|\pi_{F^\perp}(v)\|^2 = \|s_F(v)\|^2$$

et ceci prouve que s_F est une isométrie. Enfin, si si $\mathscr{B} = \mathscr{C}_+ \cup \mathscr{C}_-$ est comme dans la proposition, il est clair que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s_F)$ est comme indiquée. □

Définition 6.3.4 **(Réflexions orthogonales)**. — Un cas particulier important de symétrie orthogonale est le suivant. Soit $v_0 \in E$, $v_0 \neq 0$, alors $H = (\mathbb{R}v_0)^\perp$ est appelé un **hyperplan** de E ; d'après le théorème 6.3.2 on a

$$E = \mathbb{R}v_0 \oplus H\,,$$

explicitement, si l'on pose $u_0 = \dfrac{1}{\|v_0\|}v_0$ alors $\|u_0\| = 1$ et tout $x \in E$ s'écrit de façon unique

$$x = (x \mid u_0)u_0 + \pi_H(x), \qquad \text{où} \qquad \pi_H(x) = x - (x \mid u_0)u_0\,,$$

donc

$$\boxed{\pi_{\mathbb{R}v_0}(x) = (x \mid u_0)u_0 = \frac{(x \mid v_0)}{(v_0 \mid v_0)}\, v_0.}$$

La symétrie orthogonale s_H par rapport à H s'appelle la **réflexion orthogonale** par rapport à l'hyperplan H ; d'après ce qui précède elle est donnée par la formule :

$$(6.3.4.1) \qquad \boxed{\forall x \in E, \qquad s_H(x) = x - 2\frac{(x \mid v_0)}{(v_0 \mid v_0)}\, v_0.}$$

Si $\dim E = n$ alors $\dim H = n - 1$, et si $\mathscr{C}_+$ est une base de H, alors $\mathscr{B} = \mathscr{C}_+ \cup \{v_0\}$ est une base de E et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s_H) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \mathbf{0}_{n-1,1} \\ \hline \mathbf{0}_{1,n-1} & -1 \end{array}\right)$, d'où en particulier $\boxed{\text{dét}\, s_H = -1.}$

Théorème 6.3.5 **(Orthonormalisation de Gram-Schmidt)**. — *Soit E un espace euclidien et soient $v_1, \dots, v_n$ linéairement indépendants dans E. Alors il existe une unique famille $(e_1, \dots, e_n)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(1) *Pour tout* $i = 1, \dots, n$, $(e_1, \dots, e_i)$ *est une base orthonormée de* $V_i = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i)$.

(2) *Pour tout* $j = 1, \dots, n$, *on a* $(e_j \mid v_j) > 0$.

Démonstration. — Pour $j = 1$, on cherche $e_1 = t_1 v_1$ tel que $1 = (e_1 \mid e_1) = t_1^2 (v_1 \mid v_1)$ et $0 < (e_1 \mid v_1) = t_1 (v_1 \mid v_1)$; la 1ère condition donne $t_1^2 = 1/(v_1 \mid v_1)$, et la 2ème condition, qui implique $t_1 > 0$, donne alors :

$$t_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{e_1 = \frac{1}{\|v_1\|}\, v_1.} \tag{1}$$

Pour $j = 2$, on cherche d'abord un vecteur $e_2' \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(e_1, v_2)$, donc de la forme $e_2' = v_2 + \lambda e_1$, vérifiant la condition :

$$0 = (e_2' \mid e_1) = (v_2 \mid e_1) + \lambda \underbrace{(e_1 \mid e_1)}_{=1} = (v_2 \mid e_1) + \lambda,$$

ce qui impose $\lambda = -(v_2 \mid e_1)$. Alors le vecteur

$$\boxed{e_2' = v_2 - (v_2 \mid e_1) e_1}$$

est orthogonal à e_1, et est $\neq 0$ puisque $v_2 \notin \mathbb{R} v_1 = \mathbb{R} e_1$, donc la famille (e_1, e_2') est libre et forme une base de $V_2 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

On a $v_2 = e_2' + (v_2 \mid e_1) e_1$ et, puisque $(e_2' \mid e_1) = 0$, l'égalité de Pythagore donne

$$\|v_2\|^2 = \|e_2'\|^2 + (v_2 \mid e_1)^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\|e_2'\|^2 = \|v_2\|^2 - (v_2 \mid e_1)^2.}$$

Pour rendre e_2' unitaire (i.e. de norme 1), on le divise par sa norme, c.-à-d., on pose

$$\boxed{e_2 = \frac{1}{\|e_2'\|} e_2' = \frac{1}{\|e_2'\|} \big(v_2 - (v_2 \mid e_1) e_1\big)} \tag{2}$$

alors (e_1, e_2) est une b.o.n. de V_2, et d'après (2) ci-dessus on a $1 = (e_2 \mid e_2) = (e_2 \mid v_2)/\|e_2'\|$ donc $(e_2 \mid v_2) = \|e_2'\| > 0$. C'est bien le seul choix possible, car si $f_2 \in V_2$ est orthogonal à e_1 et unitaire, alors $f_2 = \pm e_2$, et la condition $(f_2 \mid v_2) > 0$ entraîne $f_2 = e_2$.

Pour $j = 3$, on cherche d'abord un vecteur $e_3' \in V_3 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, v_3)$, donc de la forme $e_3' = v_3 + \mu_2 e_2 + \mu_1 e_1$, vérifiant les relations linéaires :

$$\begin{cases} 0 = (e_3' \mid e_1) = (v_3 \mid e_1) + \mu_1 \,, \\ 0 = (e_3' \mid e_2) = (v_3 \mid e_2) + \mu_2 \end{cases}$$

(on a utilisé le fait que e_1, e_2 sont orthogonaux et unitaires), qui donnent $\mu_i = -(v_3 \mid e_i)$ pour $i = 1, 2$. Alors le vecteur

$$\boxed{e_3' = v_3 - (v_3 \mid e_2) e_2 - (v_3 \mid e_1) e_1}$$

est orthogonal à $V_2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, et est $\neq 0$ puisque $v_3 \notin V_2$, donc la famille (e_1, e_2, e_3') est libre et forme une base de V_3. Comme e_1, e_2 et e_3' sont orthogonaux, l'égalité de Pythagore donne

$$\|v_3\|^2 = \|e_3'\|^2 + (v_3 \mid e_2)^2 + (v_3 \mid e_1)^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\|e_3'\|^2 = \|v_3\|^2 - (v_3 \mid e_2)^2 - (v_3 \mid e_1)^2.}$$

Pour rendre e_3' unitaire, on le divise par sa norme, c.-à-d., on pose

$$\boxed{e_3 = \frac{1}{\|e_3'\|} e_3' = \frac{1}{\|e_3'\|} \big(v_3 - (v_3 \mid e_2) e_2 - (v_3 \mid e_1) e_1\big)} \tag{3}$$

alors (e_1, e_2, e_3) est une b.o.n. de V_3, et d'après (3) ci-dessus on a $1 = (e_3 \mid e_3) = (e_3 \mid v_3)/\|e_3'\|$ donc $(e_3 \mid v_3) = \|e_3'\| > 0$. C'est bien le seul choix possible, car si $f_3 \in V_3$ est orthogonal à V_2 et unitaire, alors $f_3 = \pm e_3$, et la condition $(f_3 \mid v_3) > 0$ entraîne $f_3 = e_3$.

En répétant ce processus on construit par récurrence, de façon unique, la famille $(e_1, \dots, e_n)$; les formules explicites pour e_n' et e_n étant :

$$\boxed{e_n' = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} (v_n \mid e_i)\, e_i} \qquad \boxed{\|e_n'\|^2 = \|v_n\|^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (v_n \mid e_i)^2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{e_n = \frac{1}{\|e_n'\|}\, e_n'}$$

□

Remarques 6.3.5.1. — (1) Ce qui précède peut aussi s'exprimer, de façon abstraite, comme suit : l'orthogonal G_n de V_{n-1} dans V_n, i.e. $G_n = \{x \in V_n \mid (x \mid e_i) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n-1\}$, est de dimension $n - (n-1) = 1$, et $\sum_{i=1}^{n-1} (v_n \mid e_i)\, e_i$ est la projection orthogonale de v_n sur V_{n-1} tandis que e'_n est la projection orthogonale de v_n sur G_n ; la droite $G_n = \mathbb{R}e'_n$ contient deux vecteurs de norme 1, à savoir $\pm e_n$, et e_n est déterminé par la condition $(e_n \mid v_n) = \|e'_n\| > 0$.

(2) La démonstration précédente fournit un algorithme pour calculer explicitement $e_1, \dots, e_n$. Illustrons ceci par l'exemple suivant.

Exemple 6.3.5.2. — On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par $(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux vecteurs $1, X, X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On va noter (e_0, e_1, e_2) au lieu de (e_1, e_2, e_3) la base orthonormée obtenue, afin d'avoir l'égalité $\deg(e_i) = i$. On a $(1 \mid 1) = 2$ donc on prend $e_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Alors $(X \mid e_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t\, dt = 0$ et $(X \mid X) = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \dfrac{2}{3}$, d'où $e_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X$.

Puis $(X^2 \mid e_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ et $(X^2 \mid e_1) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^3\, dt = 0$, d'où $e'_2 = X^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} e_0$,

$$\|e'_2\|^2 = \int_{-1}^{1} t^4\, dt - \frac{2}{9} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 9} \qquad \text{et} \qquad e_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\big(X^2 - \frac{1}{3}\big) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \left(\frac{3X^2 - 1}{2}\right).$$

6.4. Bases directes ou indirectes. Groupes $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$. Étude de $\mathrm{O}(2)$ et $\mathrm{O}(3)$

Notation 6.4.0. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Si $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ sont deux bases de E, on note $\boxed{\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')}$ le déterminant de la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

Définition et proposition 6.4.1 **(Orientations d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie)**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

(1) *On définit une relation d'équivalence $\sim$ dans l'ensemble des bases de E en posant :*

$$\mathscr{B} \sim \mathscr{B}' \quad \textit{si} \quad \mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0.$$

(2) *Il y a* **exactement deux** *classes d'équivalence.*

(3) *Chacune de ces classes est appelée une* **orientation** *de E, et «* choisir une orientation *de E », c'est choisir une base $\mathscr{B}_0$ et l'orientation « qui va avec », c.-à-d., toutes les bases $\mathscr{B}$ de E telles que* $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) > 0$. *Celles-ci sont appelées les bases (orientées)* **directes**, *les autres sont appelées les bases (orientées)* **indirectes**.

Démonstration. — (1) D'abord, on a $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$, donc $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}$ (i.e. la relation $\sim$ est réflexive). Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E. Si $\mathscr{B}''$ est une troisième base de E, on a

$$(\dagger) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'') = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'') \qquad \text{et donc} \qquad \mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'') = \mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \cdot \mathrm{dét}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'').$$

Donc si $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ et $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'')$ sont > 0, il en est de même de $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'')$; ceci montre que la relation $\sim$ est transitive. De plus, prenant $\mathscr{B}'' = \mathscr{B}$, on obtient $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\, \mathrm{dét}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$, d'où $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')^{-1}$, donc si $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$, il en est de même de $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})$; ceci montre que la relation $\sim$ est symétrique. Donc $\sim$ est bien un relation d'équivalence, ce qui prouve (1).

Prouvons (2). Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, notons $\mathscr{C}_0 = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$, c'est aussi une base de E, et $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{C}_0) = -1$, donc $\mathscr{B}_0 \not\sim \mathscr{C}_0$ donc il y a au moins deux classes d'équivalence.

En fait, ce sont les deux seules classes. En effet, soit $\mathscr{B}$ une base arbitraire ; si $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) > 0$ alors $\mathscr{B}$ est dans la classe de $\mathscr{B}_0$, et si $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) < 0$ alors

$$\mathrm{dét}_{\mathscr{C}_0}(\mathscr{B}) = \underbrace{\mathrm{dét}_{\mathscr{C}_0}(\mathscr{B}_0)}_{=-1} \cdot \underbrace{\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})}_{<0} > 0$$

donc $\mathscr{B}$ est dans la classe de $\mathscr{C}_0$. La proposition est démontrée. □

Exemple 6.4.2 **(Orientation canonique de $\mathbb{R}^n$).** — $\mathbb{R}^n$ est orienté par le choix de la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$; on dit que c'est l'**orientation canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Dans toute la suite de cette section, on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel $(x \mid y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ et l'on note $\mathrm{O}(n)$ le groupe des isométries :

$$\begin{aligned}\mathrm{O}(n) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\} \\ &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid (Ax \mid Ay) = (x \mid y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}\end{aligned}$$

(voir 6.1.12 pour d'autres caractérisations de $\mathrm{O}(n)$).

Proposition 6.4.3. — *Soit $A \in \mathrm{O}(n)$. Alors :*

(1) $\boxed{\mathrm{dét}(A) = \pm 1}$

(2) *Si A admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda = \pm 1$.*

(3) *Les espaces propres $V_+ = \mathrm{Ker}(A - I_n)$ et $V_- = \mathrm{Ker}(A + I_n)$ sont* **orthogonaux**, *c.-à-d., $(v_+ \mid v_-) = 0$ pour tout $v_+ \in V_+$, $v_- \in V_-$.*

Démonstration. — (1) On a $1 = \mathrm{dét}(I_n) = \mathrm{dét}({}^tAA) = \mathrm{dét}({}^tA) \cdot \mathrm{dét}(A)$, or on sait (cf. 2.1.1) que $\mathrm{dét}({}^tA) = \mathrm{dét}(A)$ d'où $\mathrm{dét}(A)^2 = 1$ et donc $\mathrm{dét}(A) = \pm 1$.

(2) Si A admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $v \neq 0$ un vecteur propre associé, alors

$$(v \mid v) = (Av \mid Av) = (\lambda v \mid \lambda v) = \lambda^2 (v \mid v).$$

Comme $(v \mid v) \neq 0$ (car > 0), ceci entraîne $\lambda^2 = 1$, d'où $\lambda = \pm 1$.

(3) Soient $v_+ \in V_+$ et $v_- \in V_-$, alors

$$(v_+ \mid v_-) = (Av_+ \mid Av_-) = (v_+ \mid -v_-) = -(v_+ \mid v_-)$$

d'où $(v_+ \mid v_-) = 0$. $\square$

***Définition 6.4.4* (Groupe SL_n)**. — On rappelle qu'on note

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{dét}(A) \neq 0\},$$

on l'appelle le **G**roupe **L**inéaire (en anglais : **G**eneral **L**inear group). On appelle groupe **S**pécial **L**inéaire (en anglais : **S**pecial **L**inear group) le sous-groupe

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{dét}(A) = 1\}.$$

(Ceci explique le S dans la notation $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \mathrm{dét}(A) = 1\}$ introduite ci-dessous.)

***Définition 6.4.5* (Groupe $\mathrm{SO}(n)$)**. — (1) On pose $\boxed{\mathrm{SO}(n) = \{A \in O(n) \mid \mathrm{dét}(A) = 1\},}$ c'est un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$, appelé le groupe **spécial orthogonal**. On le note aussi parfois $\mathrm{O}^+(n)$. Les éléments de $\mathrm{SO}(n)$ s'appellent les isométries **directes** de $\mathbb{R}^n$.

(2) On pose aussi : $\boxed{\mathrm{O}^-(n) = \{A \in O(n) \mid \mathrm{dét}(A) = -1\},}$ ce n'est **pas** un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ (car si $A, B \in \mathrm{O}^-(n)$ alors $\mathrm{dét}(AB) = 1$ donc $AB \in \mathrm{SO}(n)$), mais d'après la proposition précédente, on a

$$\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \cup \mathrm{O}^-(n). \qquad \text{(réunion disjointe).}$$

(3) Pour tout $\sigma \in \mathrm{O}^-(n)$, l'application $f \mapsto f\sigma$ est une **bijection** de $\mathrm{SO}(n)$ sur $\mathrm{O}^-(n)$, dont l'inverse est l'application $g \mapsto g\sigma^{-1}$ (en effet, $\mathrm{dét}(\sigma^{-1}) = \mathrm{dét}(\sigma)^{-1} = -1$ donc pour tout $g \in \mathrm{O}^-(n)$ on a $\mathrm{dét}(g\sigma^{-1}) = 1$ d'où $g\sigma^{-1} \in \mathrm{SO}(n)$).

Proposition 6.4.6. — *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et soit P la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) \in \mathrm{O}(n)$. On a les équivalences suivantes :*

$$\begin{cases} \mathscr{B} \text{ est une b.o.n. } \textbf{directe} \text{ (i.e. dét}(P) > 0) & \Longleftrightarrow \quad P \in \mathrm{SO}(n) \\ \mathscr{B} \text{ est une b.o.n. } \textbf{indirecte} \text{ (i.e. dét}(P) < 0) & \Longleftrightarrow \quad P \in \mathrm{O}^-(n). \end{cases}$$

Démonstration. — On sait, d'après 6.1.12, que $P \in \mathrm{O}(n)$, d'où $\mathrm{dét}(P) = \pm 1$, d'après 6.4.3. Donc $\mathrm{dét}(P)$ est > 0 (resp. < 0) si et seulement si il égale 1 (resp. -1). La proposition en découle. $\square$

On rappelle que les fonctions cosinus et sinus sont de période 2π et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1} \qquad \boxed{\cos(-t) = \cos(t)} \qquad \boxed{\sin(-t) = -\sin(t).}$$

On note $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ le groupe abélien quotient de $\mathbb{R}$ par le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$: deux réels t, t' définissent le même élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t' - t = 2k\pi$. Rappelons le lemme suivant.

Lemme 6.4.7. — *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\cos(\theta) = a$ et $\sin(\theta) = b$.*

Démonstration. — Comme cosinus et sinus sont de période 2π, il suffit de montrer l'existence et l'unicité modulo 2π dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Rappelons que la fonction cosinus est paire et induit une bijection décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Distinguons les trois cas suivants.

(1) Si $a = 1$ alors $b = 0$; dans ce cas, 0 est l'unique élément θ de $[-\pi, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = 1$ et $\sin(\theta) = 0$.

(2) Si $a = -1$ alors $b = 0$; dans ce cas, les seuls éléments θ de $[-\pi, \pi]$ tels que $\cos(\theta) = -1$ et $\sin(\theta) = 0$ sont $\pm\pi$, qui sont égaux modulo 2π.

(3) Enfin, si $a \neq \pm 1$ alors $b = \pm\sqrt{1 - a^2} \neq 0$. Dans ce cas, il existe dans $[-\pi, \pi]$ deux éléments, opposés, θ et $-\theta$, tels que $\cos(\pm\theta) = a$, et comme la fonction sinus vérifie $\sin^2 = 1 - \cos^2$ et est impaire, alors θ est uniquement déterminé par la condition $\sin(\theta) = b$. $\square$

Dans ce qui suit, on munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel $(\ |\ )$, de la norme euclidienne associée $\|\cdot\|$, et de l'orientation définie par la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$.

***Définition et proposition 6.4.8* (Angle orienté de deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$)** *Soient $w, w' \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

(1) $(w \mid w') = \cos(\theta)\, \|w\| \cdot \|w'\|$

(2) $\sin(\theta)$ *est du même signe* (> 0, $= 0$ *ou* < 0) *que* $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(w, w')$.

*On appelle θ l'**angle orienté** de w à w' et on le note $\overset{\frown}{ww'}$. On a $\overset{\frown}{w'w} = -\overset{\frown}{ww'}$.*

Démonstration. — Remplaçons d'abord w et w' par les vecteurs unitaires $u = \dfrac{1}{\|w\|} w$ et $v = \dfrac{1}{\|w'\|} w'$, alors la condition (1) devient : $\cos(\theta) = (u \mid v)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que $(u \mid v) \in [-1, 1]$ et que :

$$(u \mid v) = \pm 1 \iff u \text{ et } v \text{ sont liés} \iff \mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, v) = 0.$$

Par conséquent, notant $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ le « signe » de $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, v)$, on voit que les conditions (1) et (2) équivalent à dire que $\cos(\theta) = (u \mid v) = a \in [-1, 1]$ et $\sin(\theta) = \varepsilon\sqrt{1 - a^2} = b$; d'après le lemme précédent, ceci détermine un unique $\theta \in \mathbb{R}$ modulo 2π.

Enfin, si $\theta = \overset{\frown}{ww'}$, alors $-\theta$ vérifie (1) et est du même signe que $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(w', w) = -\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(w, w')$, d'où $-\theta = \overset{\frown}{w'w}$. La proposition est démontrée. $\square$

Rappelons les formules trigonométriques :

$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{\cos(\theta + \theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')} \qquad \boxed{\sin(\theta + \theta') = \cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')}$$

En particulier, comme $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$, on a $\cos(\theta + \dfrac{\pi}{2}) = -\sin(\theta)$ et $\sin(\theta + \dfrac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$.

Notation 6.4.9. — Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, introduisons le vecteur $\boxed{u_\theta = \cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_2.}$ C'est l'unique vecteur unitaire u tel que $\overset{\frown}{e_1 u} = \theta$. En effet, soit $u = a e_1 + b e_2$ un tel vecteur, alors $a = (u \mid e_1) = \cos(\theta)$, d'où $b = \pm\sin(\theta)$; de plus,

$$\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(e_1, u) = \mathrm{dét} \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ 0 & b \end{pmatrix} = b$$

est du signe de $\sin(\theta)$, d'où $b = \sin(\theta)$.

Isométries de $\mathbb{R}^2$ ***euclidien.*** — On peut maintenant aborder l'étude du groupe O(2) des isométrie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathrm{O}(2)$, écrivons $f(e_1) = ae_1 + be_2$, alors $a^2 + b^2 = \|f(e_1)\| = 1$. D'autre part, comme f préserve le produit scalaire, on a

$$(f(e_2) \mid f(e_1)) = (e_2 \mid e_1) = 0$$

donc $f(e_2)$ appartient à la droite $(\mathbb{R}f(e_1))^\perp$, qui est engendrée par le vecteur unitaire $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, et comme $f(e_2)$ est aussi un vecteur unitaire de cette même droite, on a nécessairement $f(e_2) = \pm \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, donc deux cas sont possibles :

1er cas. $f(e_2) = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, dans ce cas, la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$ est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, et son déterminant est $a^2 + b^2 = 1$.

2ème cas. $f(e_2) = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$, dans ce cas, la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$ est $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, et son déterminant est $-a^2 - b^2 = 1$.

On voit que ces deux cas sont exclusifs l'un de l'autre : f appartient à SO(2) (resp. à $\mathrm{O}^-(2)$) si et seulement si on est dans le 1er cas (resp. 2ème cas). Étudions séparément ces deux cas.

Définition 6.4.10 **(Rotations dans** $\mathbb{R}^2$**).** — On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire standard $(\ \mid\ )$ et de l'orientation canonique. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

(1) On appelle **rotation d'angle** θ, et l'on note r_θ, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$ est

$$(\star) \qquad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(2) On a $\boxed{\det(r_\theta) = 1}$ et $\boxed{\mathrm{Tr}(r_\theta) = 2\cos(\theta)}$ d'où $P_{r_\theta}(X) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$. Le discriminant réduit de ce trinôme est $\Delta' = \cos^2(\theta) - 1$ qui est < 0 sauf si $\theta = 0$ ou π (modulo 2π), c.-à-d., sauf dans le cas de $r_0 = \mathrm{id}$ et de $r_\pi = -\mathrm{id}$. En dehors de ces cas, r_θ n'a pas de valeurs propres réelles.

Proposition 6.4.11 **(Le groupe** SO(2)**).** — (1) *Pour tout* $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, *on a* $\boxed{r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta+\theta'} = r_{\theta'} \circ r_\theta.}$ *Par conséquent, le groupe* $\mathrm{SO}(2) = \{r_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ *est* commutatif.

(2) *Plus précisément, l'application* $\rho : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(2)$, $\theta \mapsto r_\theta$, *est un morphisme de groupes, et son noyau est le sous-groupe* $2\pi\mathbb{Z}$ *de* $\mathbb{R}$.

Démonstration. — D'après les deux cas étudiés plus haut, on sait que les éléments de SO(2) sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$. Or, d'après le lemme 6.4.7, pour chaque telle matrice il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π, tel que $\cos(\theta) = a$ et $\sin(\theta) = b$. D'autre part, on a :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -\cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta') \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') & \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'},$$

et l'assertion (1) en résulte.

D'autre part, dire que ρ est un morphisme de groupes équivaut à dire que $r_{\theta+\theta'} = r_\theta \circ r_{\theta'}$, ce qu'on vient de vérifier. Enfin, le noyau de ρ est formé des $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $R_\theta = I_2$, i.e. tels que $\cos(\theta) = 1$ et $\sin(\theta) = 0$, ce qui équivaut à $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. □

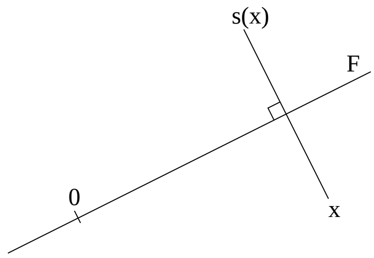
Étudions maintenant le cas des éléments de $\mathrm{O}^-(2)$, i.e. des matrices de la forme

$$(\dagger) \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } a^2 + b^2 = 1$$

c.-à-d., d'après le lemme 6.4.7, des matrices

$$(\ddagger) \qquad J_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice est de déterminant -1 et de trace nulle ; son polynôme caractéristique est donc $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, donc $\mathbb{R}^2$ est la somme directe des espaces propres $D_+ = \mathrm{Ker}(A - I_2)$ et $D_- = \mathrm{Ker}(A - I_2)$, chacun d'eux étant de dimension 1 (i.e. une droite vectorielle). De plus, d'après la proposition 6.4.3, D_+ et D_- sont orthogonaux, donc A est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $F = D_+ = \mathrm{Ker}(A - I_2)$:



Réciproquement, pour $c, d \in \mathbb{R}$ avec $(c,d) \neq (0,0)$, déterminons la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de la symétrie orthogonale s_Δ par rapport à la droite Δ engendré par le vecteur $u = ce_1 + de_2$. Alors Δ est la droite orthogonale au vecteur $v = \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$ donc, d'après 6.3.4, s_Δ est définie par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \qquad s_\Delta(x) = x - 2\frac{(x \mid v)}{(v \mid v)}\, v.$$

On a $(v \mid v) = c^2 + d^2$, $(e_1 \mid v) = -d$ et $(e_2 \mid v) = c$ donc, appliquant la formule ci-dessus à $x = e_1$ puis $x = e_2$, on obtient

$$s_\Delta(e_1) = e_1 + 2\frac{d}{c^2+d^2}(-de_1 + ce_2), \qquad s_\Delta(e_2) = e_2 - 2\frac{c}{c^2+d^2}(-de_1 + ce_2)$$

d'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(s_\Delta) = \dfrac{1}{c^2+d^2}\begin{pmatrix} c^2 - d^2 & 2cd \\ 2cd & d^2 - c^2 \end{pmatrix}$.

Appliquons ce qui précède dans le cas suivant. Notons s_φ la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $u_\varphi = \cos(\varphi)e_1 + \sin(\varphi)e_2$. (Notons que u_φ et $u_{\varphi+\pi} = -u_\varphi$ engendrent la même droite, donc φ n'est déterminé que modulo $\pi\mathbb{Z}$.) D'après ce qui précède, la matrice de s_φ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ est :

$$\begin{pmatrix} \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) & 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) & \sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} = J_{2\varphi}$$

On peut donc résumer ce qui précède dans la :

***Proposition 6.4.12* (Description de $\mathrm{O}^-(2)$).** — *L'ensemble $\mathrm{O}^-(2) = \{A \in \mathrm{O}(2) \mid \mathrm{dét}(A) = -1\}$ est formé des matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$; dans ce cas, A est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D_+ = \mathrm{Ker}(A - I_2)$. D'autre part, il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = J_\theta$$

et A est la symétrie orthogonale $s_{\theta/2}$ par rapport à la droite $\mathbb{R}u_{\theta/2}$.

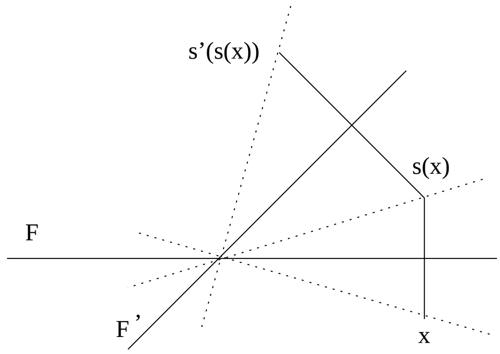
Enfin, on peut vérifier par un calcul matriciel (que le lecteur est invité à faire !) que $\boxed{J_{\theta'} J_\theta = R_{\theta' - \theta}}$ d'où

$$(*) \qquad \forall \varphi, \varphi' \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{s_{\varphi'} \circ s_\varphi = r_{2(\varphi' - \varphi)}.}$$

Ceci peut aussi se voir géométriquement comme suit. Posons $f = s_{\varphi'} \circ s_\varphi$; Comme $\mathrm{dét}(f) = 1$, alors f appartient à $\mathrm{SO}(2)$ donc est une rotation r_θ. Pour déterminer l'angle θ, il suffit de voir de combien « tourne » un vecteur x arbitraire. Or si on prend $x = u_\varphi$, alors $s_\varphi(x) = x$ et donc $f(x) = s_{\varphi'}(x)$ est le symétrique de x par rapport à la droite $\mathbb{R}u_{\varphi'}$, d'où

$$\varphi' - \varphi = \widehat{x u_{\varphi'}} = \widehat{u_{\varphi'} f(x)} \qquad \text{et donc} \qquad \widehat{x f(x)} = 2(\varphi' - \varphi).$$

(Dans la figure ci-dessous, prendre x sur la droite F.)



Observons que dans le terme de droite de $(*)$, la rotation obtenue ne dépend que de la différence $\varphi' - \varphi$ et donc, pour obtenir r_θ, on peut choisir arbitrairement φ ou bien φ', c.-à-d., on a, pour tout $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$:

$$(**) \qquad \boxed{r_\theta = s_{\varphi+\frac{\theta}{2}} \circ s_\varphi = s_\varphi \circ s_{\varphi-\frac{\theta}{2}}}$$

Comme $s_\varphi^2 = \mathrm{id}$, ceci permet de décrire complètement la « table de multiplication » dans O(2) (noter que O(2) n'est **pas** commutatif) :

***Proposition 6.4.13* (Structure de O(2)).** — *Pour tout $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, on a* $\boxed{r_\theta \circ r_\varphi = r_{\theta+\varphi} = r_\varphi \circ r_\theta}$ $\boxed{s_\theta \circ s_\varphi = r_{2(\theta-\varphi)}}$ *et*

$$\boxed{r_\theta \circ s_\varphi = s_{\varphi+\frac{\theta}{2}}} \qquad \boxed{s_\varphi \circ r_\theta = s_{\varphi-\frac{\theta}{2}}}$$

Terminons ce paragraphe avec la proposition suivante. Par définition, la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$ est orthonormée directe. La base $\mathscr{C}_0 = (e_2, e_1)$ est orthonormée indirecte puisque $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{C}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de déterminant -1.

Proposition 6.4.14. — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit r_θ la rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$* (cf. 6.4.10).

(1) *La matrice de r_θ dans* **toute b.o.n. directe** *est* $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

(2) *La matrice de r_θ dans la base $\mathscr{C}_0 = (e_2, e_1)$ et dans* **toute b.o.n. indirecte** *est $R_{-\theta}$.*

Démonstration. — (1) On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(r_\theta) = R_\theta$. Si $\mathscr{B}$ est une b.o.n. directe, la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$ appartient à SO(2), et comme SO(2) est commutatif, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta) = P^{-1} R_\theta P$ égale R_θ.

(2) On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_0}(r_\theta) = R_{-\theta}$. Si $\mathscr{C}$ est une b.o.n. indirecte, la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_0}(\mathscr{C})$ appartient à SO(2), et comme SO(2) est commutatif, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(r_\theta) = P^{-1} R_{-\theta} P$ égale $R_{-\theta}$. □

***Description des éléments de** $O(3)$.* — Commençons par une remarque sur $M_3(\mathbb{R})$. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$, alors $P_A(X) \in \mathbb{R}[X]$ est de degré 3 donc a dans $\mathbb{C}$:

(a) ou bien une racine réelle λ_1 et deux racines $z, \overline{z} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$,

(b) ou bien trois racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (pas nécessairement distinctes).

Comme A est trigonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$, on a

$$\mathrm{d\acute{e}t}(A) = \begin{cases} \lambda_1\, z\, \overline{z} & \text{dans le cas (a)} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & \text{dans le cas (b).} \end{cases}$$

Supposons maintenant $A \in \mathrm{O}(3)$ et notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ correspondant à A. Alors on sait que $\mathrm{d\acute{e}t}(A) = \pm 1$, et que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A, alors $\lambda = \pm 1$. Dans le cas (a), on a $z = x + iy$ avec $y \neq 0$, donc $z\overline{z} = x^2 + y^2$ est un réel > 0, et donc l'égalité $\mathrm{d\acute{e}t}(A) = \lambda_1 z \overline{z}$ entraîne que $\mathrm{d\acute{e}t}(A)$ et λ_1 (tous deux $\in \{-1, 1\}$) sont de même signe, donc sont égaux. Dans le cas (b), on a $\lambda_i = \pm 1$, et les λ_i ne peuvent être tous les trois égaux à $-\mathrm{d\acute{e}t}(A)$, car sinon leur produit vaudrait $-\mathrm{d\acute{e}t}(A)$ au lieu de $\mathrm{d\acute{e}t}(A)$.

Ceci montre déjà que, dans les deux cas, $\text{dét}(A) = \pm 1$ est une valeur propre de A. Étudions les cas selon que $\text{dét}(A) = 1$ ou -1.

1er cas : $\text{dét}(A) = 1$, i.e. $A \in \text{SO}(3)$. Le cas $A = I_3$ étant trivial, supposons de plus que $A \neq I_3$. On a vu que 1 est valeur propre de A ; soit f_3 un vecteur propre associé, quitte à diviser f_3 par sa norme, on peut supposer que $\|f_3\| = 1$.

Soit $P = (\mathbb{R}f_3)^\perp$, c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, i.e. un plan. Pour tout $x \in P$, on a (puisque $Af_3 = f_3$ et que A préserve le produit scalaire) :

$$(Ax \mid f_3) = (Ax \mid Af_3) = (x \mid f_3) = 0.$$

Ceci montre que $Ax \in P$, i.e. P est stable par A, donc A induit une isométrie u_P de P. Soit $\mathscr{C} = (f_1, f_2)$ une base de P, alors $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et

$$(\star) \qquad \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \text{Mat}_{\mathscr{C}}(u_P) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

d'où $\text{dét}(u_P) = \text{dét}(A) = 1$, donc u_P est une rotation de P. Notons θ son angle. On a $\theta \neq 0$, car sinon on aurait $u_P = \text{id}_P$ et donc, d'après $(\star)$, $u = \text{id}$ d'où $A = I_3$, cas trivial qu'on a exclu. De plus, comme $u_P \neq \text{id}_P$ alors 1 n'est pas valeur propre de u_P (cf. 6.4.10), et donc $u_P - \text{id}_P$ et $A - I_3$ sont de rang 2. Par conséquent, $\text{Ker}(A - I_3)$ est de dimension 1, donc engendré par f_3. On dit que $\mathbb{R}f_3 = \text{Ker}(A - I_3)$ est **l'axe** de la rotation $A \neq I_3$.

D'autre part, on peut déterminer $\theta \in [-\pi, \pi]$ au signe près en prenant la trace. En effet, l'égalité précédente nous montre que $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(u) = 1 + \text{Tr}(u_P)$; d'autre part, on sait que $\text{Tr}(u_P) = 2\cos(\theta)$ (cf. 6.4.10) donc, combinant ces deux égalités, on obtient que :

$$\boxed{\text{Tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta),} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\cos(\theta) = \frac{\text{Tr}(A) - 1}{2}}$$

ce qui détermine $\cos(\theta)$, et détermine donc θ au signe près.

Pour fixer le signe de θ, il faut choisir une **orientation** de P (cf. 6.4.14). On la choisit en disant qu'une b.o.n. (f_1, f_2) de P est **directe** si la b.o.n. (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ (muni de l'orientation canonique) est directe, c.-à-d., si $\text{dét}_{\mathscr{B}_0}(f_1, f_2, f_3) = 1$.

Soit (f_1, f_2) une telle b.o.n. directe de P. Alors on sait qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$, tel que

$$\text{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'on dira alors que A (ou u) est la **rotation d'axe orienté par** f_3 **et d'angle** θ.

Remarquons tout de suite que si on change f_3 en $-f_3$, alors la base $(f_2, f_1, -f_3)$ est directe et l'on a

$$\text{Mat}_{(f_2,f_1,-f_3)}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc A est aussi la **rotation d'axe orienté par** $-f_3$ **et d'angle** $-\theta$.

Définition 6.4.15. — Soit $A \neq I_3$ une rotation d'axe $\mathbb{R}f_3$ et d'angle θ. Lorsque $\theta = \pi$ (i.e. lorsque $\cos(\theta) = -1$, ce qui équivaut à $\text{Tr}(A) = -1$), l'orientation de l'axe n'a pas d'importance, puisque $-\pi = \pi$ modulo 2π ; dans ce cas on dit que A est le **demi-tour d'axe** $\mathbb{R}f_3$.

Pour déterminer explicitement le signe de $\sin(\theta)$ (lorsque $\theta \neq \pi$), on dispose du lemme suivant.

Lemme 6.4.16. — *Soit $A \neq I_3$ une rotation d'axe D, orienté par un vecteur $v_3 \neq 0$, et d'angle θ. Soit $x \in \mathbb{R}^3 - D$. Alors le signe de $\sin(\theta)$ est le même que celui du déterminant $\text{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, v_3)$.*

Démonstration. — Notons f_3 le vecteur unitaire $\dfrac{1}{\|v_3\|}v_3$ et écrivons $x = y + \mu f_3$, où y est la projection orthogonale de x sur $P = D^\perp$ (et $\mu = (x \mid f_3)$). Comme $x \notin D$, on a $y \neq 0$, posons $\rho = \|y\|$, alors $f_1 = \dfrac{1}{\rho}y$ est un vecteur unitaire de P. Il existe dans le plan P deux vecteurs unitaires orthogonaux à f_1 et seul l'un d'eux, f_2, est tel que la matrice $Q = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f_1, f_2, f_3)$ vérifie $\mathrm{dét}(Q) = 1$, i.e. tel que (f_1, f_2) soit une b.o.n. directe de P. Alors, notant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par A, on a :

$$\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $u(x) = u(\rho f_1 + \mu f_3)$ égale $(\rho\cos\theta)f_1 + (\rho\sin\theta)f_2 + \mu f_3$, donc la matrice

$$M = \mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(x, u(x), f_3) = \begin{pmatrix} \rho & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & \rho\sin\theta & 0 \\ \mu & \mu & 1 \end{pmatrix}$$

a pour déterminant $\rho^2\sin\theta$. Comme $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, f_3)$ égale QM, et $\mathrm{dét}(Q) = 1$, on obtient que

$$\mathrm{dét}(M') = \mathrm{dét}(Q)\,\mathrm{dét}(M) = \mathrm{dét}(M) = \rho^2\sin\theta$$

est du même signe que $\sin\theta$, et il en est de même pour $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, v_3) = \|v_3\| \cdot \mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, f_3)$. □

Remarquons que puisque le résultat ci-dessus est valable pour *tout* $x \in \mathbb{R}^3 - D$, on aura intérêt à choisir, en pratique, un tel x de façon à ce que le calcul du déterminant $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, v_3)$ soit « le plus simple possible ». On récapitulera plus loin les résultats obtenus dans le cas où $A \in \mathrm{SO}(3)$; traitons maintenant le cas où $A \in \mathrm{O}^-(3)$.

2ème cas : $\mathrm{dét}(A) = -1$, i.e. $A \in \mathrm{O}^-(3)$. Le cas $A = -I_3$ étant trivial, supposons de plus que $A \neq -I_3$. On a vu que $-1 = \mathrm{dét}(A)$ est valeur propre de A ; soit f_3 un vecteur propre associé, quitte à diviser f_3 par sa norme, on peut supposer que $\|f_3\| = 1$.

On montre comme précédemment que le plan $P = (\mathbb{R}f_3)^\perp$ est stable par u, et que la restriction u_P de u à P est de déterminant 1, donc une rotation. On fait le même choix d'orientation de P, c.-à-d., on choisit une b.o.n. (f_1, f_2) de P telle que (f_1, f_2, f_3) soit une b.o.n. directe de $\mathbb{R}^3$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$, tel que

$$(\dagger) \qquad \mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a $\theta \neq \pi$, car sinon on aurait $u = -\mathrm{id}$ d'où $A = -I_3$, cas trivial qu'on a exclu. De plus, comme $u_P \neq -\mathrm{id}_P$ alors -1 n'est pas valeur propre de u_P (cf. 6.4.10), et donc $u_P + \mathrm{id}_P$ et $A + I_3$ sont de rang 2. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(A + I_3)$ est de dimension 1, donc engendré par f_3. On dit que $D = \mathrm{Ker}(A + I_3)$ est la droite des **anti-invariants** de A.

D'autre part, on peut déterminer $\theta \in [-\pi, \pi]$ au signe près en prenant la trace. En effet, $(\dagger)$ nous montre que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(u)$ égale $-1 + 2\cos(\theta)$, donc :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A) = -1 + 2\cos(\theta),} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Tr}(A) + 1}{2}}$$

ce qui détermine $\cos(\theta)$, et détermine donc θ au signe près. Dans le cas particulier où $\theta = 0$, i.e. $u_P = \mathrm{id}_P$, A est la **symétrie orthogonale** σ_P par rapport au plan P (cf. 6.3.3 et 6.3.4).

Dans le cas général (i.e. lorsque $\theta \neq 0$), on voit que

$$\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(u\sigma_P) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(\sigma_P u)$$

donc $u\sigma_P = \sigma_P u$ est la rotation R d'axe D orienté par f_3 et d'angle θ, et donc $u = R\sigma_P = \sigma_P R$ est la composée commutative de σ_P et de R. On dit alors que A est la **rotation gauche d'axe D orienté par f_3 et d'angle θ.**

Remarquons tout de suite que si on change f_3 en $-f_3$, alors la base $(f_2, f_1, -f_3)$ est directe et l'on a

$$\mathrm{Mat}_{(f_2,f_1,-f_3)}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc A est aussi la **rotation gauche d'axe D orienté par $-f_3$ et d'angle $-\theta$.**

Pour déterminer explicitement le signe de $\sin(\theta)$ (lorsque $\theta \neq 0$), on dispose du lemme suivant.

Lemme 6.4.17. — *Soit $A \neq -I_3$ une rotation gauche d'axe D, orienté par un vecteur $v_3 \neq 0$, et d'angle $\theta \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^3 - D$. Alors le déterminant $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, v_3)$ est de* **même signe** *que $\sin(\theta)$.*

Démonstration. — Notons f_3 le vecteur unitaire $\dfrac{1}{\|v_3\|}v_3$ et écrivons $x = y + \mu f_3$, où y est la projection orthogonale de x sur $P = D^\perp$. Comme $x \notin D$, on a $y \neq 0$, posons $\rho = \|y\|$, alors $f_1 = \dfrac{1}{\rho}y$ est un vecteur unitaire de P. Il existe dans le plan P deux vecteurs unitaires orthogonaux à f_1 et seul l'un d'eux, f_2, est tel que la matrice $Q = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f_1, f_2, f_3)$ vérifie $\mathrm{dét}(Q) = 1$. Alors, notant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par A, on a

$$\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc $u(x) = u(\rho f_1 + \mu f_3)$ égale $(\rho\cos\theta)f_1 + (\rho\sin\theta)f_2 - \mu f_3$, donc la matrice

$$M = \mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(x, u(x), f_3) = \begin{pmatrix} \rho & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & \rho\sin\theta & 0 \\ \mu & -\mu & 1 \end{pmatrix}$$

a pour déterminant $\rho^2\sin\theta$. Comme $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, f_3)$ égale QM, et $\mathrm{dét}(Q) = 1$, alors

$$\mathrm{dét}(M') = \mathrm{dét}(Q)\,\mathrm{dét}(M) = \mathrm{dét}(M) = \rho^2\sin\theta$$

est de même signe que $\sin\theta$, et il en est de même pour $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, v_3) = \|v_3\| \cdot \mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, f_3)$. ☐

En résumé, on a obtenu le théorème suivant.

Théorème 6.4.18 **(Classification des éléments de** $\mathrm{O}(3)$**).** — *On a $\mathrm{O}(3) = \mathrm{SO}(3) \cup \mathrm{O}^-(3)$ (réunion disjointe).*

(1) *Si $A \in \mathrm{SO}(3)$, alors $A = I_3$ ou bien $D = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ est de dimension 1 et A est une rotation d'axe D. Dans le second cas, l'angle de rotation θ est déterminé au signe près par l'égalité $2\cos(\theta) = \mathrm{Tr}(A) - 1$. Pour fixer le signe, on choisit un générateur v_3 de D, ce qui détermine une orientation du plan $P = D^\perp$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^3 - D$ arbitraire, $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, v_3)$ est du même signe que $\sin(\theta)$, et l'on dit que A est la* **rotation d'axe orienté par** v_3 **et d'angle** θ. *Dans le cas particulier où $\theta = \pi$, on dit que A est le* **demi-tour d'axe** D.

(2) *Si $A \in \mathrm{O}^-(3)$, alors $A = -I_3$ ou bien $D = \mathrm{Ker}(A + I_3)$ est de dimension 1 et A est une rotation gauche d'axe D. Dans le second cas, l'angle de rotation θ est déterminé au signe près par l'égalité $2\cos(\theta) = \mathrm{Tr}(A) + 1$. Pour fixer le signe, on choisit un générateur v_3 de D, ce qui détermine une orientation du plan $P = D^\perp$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^3 - D$ arbitraire, $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, v_3)$ est de même signe que $\sin(\theta)$, et l'on dit que A est la* **rotation gauche d'axe orienté par** v_3 **et d'angle** θ. *Dans le cas particulier où $\theta = 0$, A est la* **symétrie orthogonale** *par rapport au plan P.*

6.4.19. Produit vectoriel et déterminant des éléments de $O(3)$. — Dans ce paragraphe, on donne une définition « intrinsèque » du produit vectoriel $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, qui utilise la structure euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Ceci a pour conséquence qu'on peut calculer le produit vectoriel dans n'importe quelle base orthonormée *directe*. De plus, ceci donne un moyen de calcul très simple du déterminant (égal à ± 1) d'un élément A de $O(3)$: il suffit pour cela de calculer un mineur (= sous-déterminant) de taille 2. On présente ces résultats sous la forme d'un exercice corrigé.

On munit $E = \mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et de la norme euclidienne associée $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$. Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique (qui est orthonormée) et soit $E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$ l'espace dual de E. Pour tout $x \in E$, soit $\phi_x \in E^*$ l'application $w \mapsto (x \mid w)$.

(1) Montrer que l'application $\theta : E \to E^*$, $x \mapsto \phi_x$ est linéaire et bijective.

Solution : D'abord, il résulte de la bilinéarité de $(\ |\ )$ que, pour tout $x \in E$, l'application $\phi_x : w \mapsto (x \mid w)$ est une forme linéaire sur E, i.e. un élément de E^*, et que l'application $\theta : E \to E^*$, $x \mapsto \phi_x$ est linéaire. Son noyau est

$$\mathrm{Ker}(\theta) = \{x \in E \mid \phi_x = 0\} = \{x \in E \mid \forall y \in E, \quad (x \mid y) = 0\}$$

qui est le noyau de $(\ |\ )$. Or ce noyau est nul, puisque $(x \mid x) = 0$ entraîne $x = 0$. Ceci montre que θ est injective. Comme $\dim E^* = \dim E = 3$, il résulte du théorème du rang que θ est aussi surjective, donc bijective.

(2) Pour tout $u, v \in E$, montrer qu'il existe un unique vecteur $f(u,v) \in E$ tel que $\text{dét}_{\mathscr{B}_0}(u,v,w) = (f(u,v) \mid w)$ pour tout $w \in E$. On note $f(u,v) = u \wedge v$ et on l'appelle le produit vectoriel de u et v.

Solution : u, v étant fixés, l'application $\gamma_{u,v} : E \to \mathbb{R}$, $w \mapsto \text{dét}_{\mathscr{B}_0}(u,v,w)$ est linéaire, i.e. est un élément de E^*. Donc, d'après la question précédente, il existe un unique vecteur $f(u,v) \in E$ tel que $\gamma_{u,v} = \phi_{f(u,v)}$, i.e. tel que

$$\forall w \in E, \qquad \text{dét}_{\mathscr{B}_0}(u,v,w) = (f(u,v) \mid w).$$

Désormais, on note $f(u,v) = u \wedge v$.

(3) Écrivant $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et prenant $w = e_1$, puis $w = e_2$ et $w = e_3$, déterminer les coordonnées (f_1, f_2, f_3) de $u \wedge v$ dans la base $\mathscr{B}_0$.

Solution : On a $f_1 = (u \wedge v \mid e_1) = \text{dét}_{\mathscr{B}_0}(u,v,e_1) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{vmatrix} = u_2v_3 - u_3v_2$. On montre de même que $f_2 = (u \wedge v \mid e_2) = u_3v_1 - u_1v_3$ et $f_3 = (u \wedge v \mid e_3) = u_1v_2 - u_2v_1$. On peut aussi procéder « par identification », i.e. pour u, v fixés et pour un vecteur $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ variable, on a :

$$(f(u,v) \mid w) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\, w_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)\, w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\, w_3$$

(en développant par rapport à la 3e colonne), d'où par identification :

$$\begin{cases} f_1 = u_2v_3 - u_3v_2, \\ f_2 = -(u_1v_3 - u_3v_1) \ = u_3v_1 - u_1v_3, \\ f_3 = u_1v_2 - u_2v_1. \end{cases}$$

(4) Montrer que l'application $E \times E \to E$, $(u,v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire, et qu'elle est alternée (i.e. $u \wedge u = 0$ pour tout $u \in E$).

Solution : La bilinéarité de l'application $(u,v) \mapsto u \wedge v$ ainsi que l'égalité $u \wedge u = 0$ peuvent se déduire de l'égalité

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

établie dans la question précédente. Ceci peut aussi se voir directement, comme suit. Soient $u, u', v, v' \in E$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $w \in E$, on a

$$\begin{aligned}(tu \wedge v + u' \wedge v \mid w) &= t(u \wedge v \mid w) + (u' \wedge v \mid w) = t\, \text{dét}_{\mathscr{B}_0}(u,v,w) + \text{dét}_{\mathscr{B}_0}(u',v,w) \\ &= \text{dét}_{\mathscr{B}_0}(tu + u', v, w) = ((tu + u') \wedge v \mid w).\end{aligned}$$

Comme $(\ \mid\ )$ est non dégénéré (i.e. de noyau nul), ceci entraîne $tu \wedge v + u' \wedge v = (tu + u') \wedge v$. On montre de même que $u \wedge (tv + v') = tu \wedge v + u \wedge v'$. Donc l'application $E \times E \to E$, $(u,v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire. De plus, pour tout $u \in E$, on a $0 = \text{dét}_{\mathscr{B}_0}(u,u,u \wedge u) = (u \wedge u \mid u \wedge u)$, d'où $u \wedge u = 0$.

(5) Soient $u, v, w \in E$. Pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E, montrer que $\text{dét}_{\mathscr{B}}(u,v,w) = \text{dét}_{\mathscr{B}_0}(u,v,w)$.

Solution : Si $\mathscr{C} = \{f_1, f_2, f_3\}$ et $\mathscr{D}$ sont deux bases de E et si $g \in \text{End}(E)$, on note $\text{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{C}}(g)$ la matrice de g en prenant $\mathscr{C}$ comme « base de départ » et $\mathscr{D}$ comme « base d'arrivée », i.e. la matrice qui exprime $g(f_i)$ $(i = 1,2,3)$ dans la base $\mathscr{D}$. Soit $P = \text{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$ et soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $g(e_1) = u$, $g(e_2) = v$ et $g(e_3) = w$. On a

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u,v,w) = \text{Mat}_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_0}(g) = \text{Mat}_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}}(\text{id}) \cdot \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_0}(g) = P \cdot \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u,v,w)$$

d'où $\text{dét}_{\mathscr{B}_0}(u,v,w) = \text{dét}(P) \cdot \text{dét}_{\mathscr{B}}(u,v,w)$. Or par hypothèse $P \in \text{SO}(3)$, d'où $\text{dét}(P) = 1$ et donc $\text{dét}_{\mathscr{B}_0}(u,v,w) = \text{dét}_{\mathscr{B}}(u,v,w)$.

(6) Soient $u, v \in E$ deux vecteurs unitaires orthogonaux et soit $p \in E$ l'unique vecteur tel que $\mathscr{B} = (u, v, p)$ soit une base orthonormée directe de E. En utilisant la question précédente montrer que, pour tout $w \in E$, on a $(u \wedge v \mid w) = (p \mid w)$. Que peut-on en conclure ?

Solution : Tout $w \in E$ s'écrit de façon unique $w = au+bv+cp$, avec $c = (p \mid w)$ (et de même $a = (u \mid w)$, etc.) donc

$$(u \wedge v \mid w) = \text{dét}_{\mathscr{B}}(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & (p \mid w) \end{vmatrix} = (p \mid w).$$

Comme $(\ \mid\ )$ est non dégénéré (car défini positif), il en résulte que $p = f(u, v)$. Donc : *étant donnés deux vecteurs unitaires orthogonaux u, v, le produit vectoriel $u \wedge v$ est l'unique vecteur p tel que (u, v, p) soit une base orthonormée directe.* Et donc si $\mathscr{B}' = (u, v, p')$ est une base orthonormée, on a les équivalences :

$$\mathscr{B}' \text{ directe } \Leftrightarrow p' = p, \qquad \mathscr{B}' \text{ indirecte } \Leftrightarrow p' = -p.$$

(7) Soit $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & t_1 \\ u_2 & v_2 & t_2 \\ u_3 & v_3 & t_3 \end{pmatrix} \in O(3)$ et soient C_1, C_2, C_3 les colonnes de A. Déduire de la question précédente que $A \in \mathrm{SO}(3) \Leftrightarrow C_3 = C_1 \wedge C_2$, et aussi que $A \in O^-(3) \Leftrightarrow C_3 = -C_1 \wedge C_2$. (Remarque : on a donc $C_3 = \text{dét}(A)\, C_1 \wedge C_2$.)

Si par exemple $t_3 \neq 0$, en déduire, en utilisant la formule explicite pour $C_1 \wedge C_2$ obtenue dans la question 3, que $A \in \mathrm{SO}(3) \Leftrightarrow u_1v_2 - u_2v_1 = t_3$ (et donc $A \in O^-(3) \Leftrightarrow u_1v_2 - u_2v_1 = -t_3$).

Solution : A est la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_0$ à la base orthonormée $\mathscr{C} = (C_1, C_2, C_3)$. Donc, d'après la question précédente, on sait que :

$$\begin{cases} A \in \mathrm{SO}(3) \Leftrightarrow \mathscr{C} \text{ est directe } \Leftrightarrow C_3 = C_1 \wedge C_2, \\ A \in O^-(3) \Leftrightarrow \mathscr{C} \text{ est indirecte } \Leftrightarrow C_3 = -C_1 \wedge C_2. \end{cases}$$

En particulier, si $t_3 \neq 0$ alors on a les équivalences :

$$\begin{cases} t_3 = u_1v_2 - u_2v_1 \Leftrightarrow C_3 = C_1 \wedge C_2 \Leftrightarrow \text{dét}(A) = 1, \\ t_3 = -(u_1v_2 - u_2v_1) \Leftrightarrow C_3 = -C_1 \wedge C_2 \Leftrightarrow \text{dét}(A) = -1. \end{cases}$$

On a bien sûr des résultats analogues si $t_1 \neq 0$ ou si $t_2 \neq 0$, mais **attention**, pour t_2 le « mineur » correspondant est $u_3v_1 - u_1v_3 = -(u_1v_3 - u_3v_1)$, voir le calcul fait dans la question 3.

(8) Soient $x, y \in E$ deux vecteurs linéairement indépendants, et soient $r = \|x\|$ et $r' = \|y\|$. Soit P le plan engendré par x et y, soit (u, v) une base orthonormée de P, où $u = \frac{1}{r}x$ et soit θ l'unique élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $y = r'(\cos(\theta)u + \sin(\theta)v)$. Montrer que $\|x \wedge y\| = rr'\,|\sin(\theta)|$. Indication : Utiliser la question 4 pour exprimer $x \wedge y$ en fonction de $u \wedge v$ puis, notant $\mathscr{B}$ la base orthonormée directe $(u, v, u \wedge v)$, calculer $\text{dét}_{\mathscr{B}}(x, y, x \wedge y)$ et utiliser la question 5.

Solution : Par hypothèse, on a $x = r\,u$ et $y = r'(\cos(\theta)u + \sin(\theta)v)$ donc, comme $\wedge$ est bilinéaire et alterné, on a :

$$x \wedge y = r\,u \wedge r'(\cos(\theta)u + \sin(\theta)v) = rr'\sin(\theta)u \wedge v.$$

Par conséquent, notant $\mathscr{B}$ la base orthonormée directe $(u, v, u \wedge v)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x, y, x \wedge y) = \begin{pmatrix} r & r'\cos(\theta) & 0 \\ 0 & r'\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & rr'\sin(\theta) \end{pmatrix},$$

donc $\text{dét}_{\mathscr{B}}(x, y, x \wedge y) = (rr')^2 \sin(\theta)^2$. Or, d'après la question 5, ceci égale $\text{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, y, x \wedge y) = (x \wedge y \mid x \wedge y) = \|x \wedge y\|^2$. On en déduit que $\|x \wedge y\| = rr'\,|\sin(\theta)|$.

(9) Montrer qu'une base orthonormée $\mathscr{C} = (u, v, f)$ est directe si et seulement si la base $\mathscr{D} = (f, u, v)$ est directe.

Solution : La matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{D}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de déterminant 1, donc $\mathscr{C}$ est directe si et seulement si $\mathscr{D}$ l'est. On pouvait aussi dire que le déterminant change de signe lorsqu'on échange deux colonnes, d'où :

$$\text{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, v, f) = -\,\text{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, f, v) = \text{dét}_{\mathscr{B}_0}(f, u, v)$$

et donc (u, v, f) est directe si et seulement si (f, u, v) l'est.

(10) Soient $f \in E$ un vecteur unitaire et P le plan orthogonal à f. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$ et soit θ l'unique élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\cos\theta = a$ et $\sin\theta = b$. Soit R la rotation d'axe $\mathbb{R}f$ orienté par f et d'angle θ. Montrer que :

$$(*) \qquad \forall y \in P, \qquad R(y) = a\,y + b\,(f \wedge y),$$

(si $y = 0$ c'est clair, et si $y \neq 0$ écrire $y = r\,u$ avec u unitaire et $r = \|y\|$), puis que :

$$(**) \qquad \forall x \in E, \qquad R(x) = (x \mid f)f + a\,\pi(x) + b\,f \wedge \pi(x) = (x \mid f)f + a\,\pi(x) + b\,f \wedge x,$$

où $\pi(x) = x - (x \mid f)f$ est la projection orthogonale de x sur P. Enfin, si $f = \begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix}$, écrire $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(R)$ sous la forme $aI_3 + (1-a)S + bA$, pour deux matrices S, A à déterminer.

Solution : Si $y = 0$, l'égalité $(*)$ est $0 = 0$, donc on peut supposer $y \neq 0$ et poser $y = ru$, où u est unitaire et $r = \|y\|$. Les deux membres de $(*)$ étant linéaires en y, il suffit d'établir $(*)$ lorsque $y = u$. Soit alors v l'unique vecteur de P tel que (u, v, f) soit une base orthonormée directe de E. D'après la définition de R, on a $\mathrm{Mat}_{(u,v,f)}(R) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $R(u) = \cos(\theta)u + \sin(\theta)v$. Or, d'après la question précédente, la base (f, u, v) est directe, donc d'après la question 6, on a $v = f \wedge u$. On a donc : $R(u) = \cos(\theta)u + \sin(\theta)f \wedge u$, et revenant au cas de $y \in P$ arbitraire, on a donc obtenu que :

$$(*) \qquad \forall y \in P, \qquad R(y) = \cos(\theta)u + \sin(\theta)f \wedge y = a\,y + b\,(f \wedge y).$$

Soit maintenant $x \in E$, sa projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}f$ est $(x \mid f)f$, et sa projection orthogonale sur P est $\pi(x) = x - (x \mid f)f$. On a bien sûr $R(\lambda f) = \lambda f$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et donc on déduit de la question précédente que :

$$R(x) = (x \mid f)f + R(\pi(x)) = (x \mid f)f + a\,\pi(x) + b\,f \wedge \pi(x),$$

De plus, comme $x = (x \mid f)f + \pi(x)$ et que $\wedge$ est bilinéaire et alterné, on a $f \wedge x = f \wedge \pi(x)$, et l'on obtient l'égalité désirée :

$$(**) \qquad \forall x \in E, \qquad R(x) = (x \mid f)f + a\,\pi(x) + b\,f \wedge x.$$

Enfin, écrivons $f = \begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix}$, avec $\|f\|^2 = p^2 + q^2 + t^2 = 1$. Alors, on a

$$R(e_1) = p\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix} + a\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - p\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix}\right) + b\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-a)\begin{pmatrix} p^2 \\ pq \\ pt \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -q \end{pmatrix}$$

$$R(e_2) = q\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix} + a\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - q\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix}\right) + b\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-a)\begin{pmatrix} pq \\ q^2 \\ qt \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

$$R(e_3) = t\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix} + a\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix}\right) + b\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-a)\begin{pmatrix} pt \\ qt \\ t^2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} q \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0} = aI_3 + (1-a)\begin{pmatrix} p^2 & pq & pt \\ pq & q^2 & qt \\ pt & qt & t^2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -t & q \\ t & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}.$$

6.5. Appendice (†) : mesure des angles dans $\mathbb{R}^2$

Dans cet appendice, on donne une démonstration (parmi d'autres) de l'existence et des propriétés des fonctions cosinus et sinus.

On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel et on note (e_1, e_2) la base canonique. Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = x + iy$, où i est une racine carrée de -1, fixée une fois pour toutes. Ceci permet d'identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, en identifiant $z = x + iy$ au vecteur de coordonnées (x, y). Si $z = x + iy$, son **conjugué** est $\overline{z} = x - iy$. Soit

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid z\overline{z} = 1\},$$

S^1 s'appelle le **cercle unité**.

On « rappelle » (ou l'on admet) les faits suivants : l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it} = \exp(it)$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) c'est un morphisme de groupes :

$$\text{(1)} \qquad \forall t, t' \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{e^{i(t+t')} = e^{it}e^{it'}}$$

(b) pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\overline{\exp(it)} = \exp(-it) = \exp(it)^{-1}$, par conséquent, f est à valeurs dans S^1.

(c) f est dérivable et sa dérivée est l'application $f' : t \mapsto ie^{it}$.

On note alors $\cos(t)$, resp. $\sin(t)$, la partie réelle, resp. imaginaire, de e^{it}, c.-à-d., on pose

$$\text{(2)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{e^{it} = \cos(t) + i\sin(t).}$$

Alors, (a), (b) et (c) se récrivent :

$$\text{(3)} \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}, \qquad \cos(t + t') = \cos(t)\cos(t') - \sin(t)\sin(t'), \qquad \sin(t + t') = \sin(t)\cos(t') + \cos(t)\sin(t'),$$

$$\text{(4)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos(-t) = \cos(t), \qquad \sin(-t) = -\sin(t), \qquad \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1,$$

$$\text{(5)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos'(t) = -\sin(t), \qquad \sin'(t) = \cos(t).$$

On montre alors le :

Théorème 6.5.1. — (1) *Le morphisme de groupes* $f : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{it}$ *est surjectif.*

(2) $\mathrm{Ker}(f)$ *est le sous-groupe* $2\pi\mathbb{Z}$ *de* $\mathbb{R}$ *et* $\cos, \sin$ *sont périodiques de période* 2π.

Démonstration. — On a $\cos(0) = 1$ donc $\cos(t) > 0$ pour t voisin de 0, donc sin est strictement croissante au voisinage de 0, et comme $\sin(0) = 0$ on a $\sin(t) > 0$ pour $t > 0$ voisin de 0, et donc $\cos(t) < 1$ pour $t > 0$ voisin de 0.

Montrons d'abord qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $\cos(t_0) = 0$. Supposons au contraire que $\cos(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Alors $\sin(t)$ serait croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc ≥ 0 sur $\mathbb{R}_+$, et comme $\cos'(t) = -\sin(t)$, alors $\cos(t)$ serait décroissante et ≥ 0 sur $\mathbb{R}_+$ donc tendrait en $+\infty$ vers une limite $\ell \in [0, 1[$ ($\ell < 1$ car $\cos(t) < 1$ pour $t > 0$ voisin de 0). Mais alors $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ tendrait aussi vers ℓ, donc ℓ serait racine du polynôme

$$2X^2 - X - 1 = 2(X - 1)(X + \frac{1}{2}),$$

ce qui est impossible puisque $\ell \in [0, 1[$. Cette contradiction montre qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $\cos(t_0) = 0$. On note alors $\dfrac{\pi}{2}$ le plus petit réel $t_0 > 0$ tel que $\cos(t_0) = 0$. Tenant compte du fait que $\cos(-t) = \cos(t)$, on a donc :

$$\text{(6)} \qquad \cos\Big(\pm\frac{\pi}{2}\Big) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \Big]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big[, \quad \cos(t) > 0.$$

Donc sin est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$, d'où $\sin(\pi/2) = 1$ (étant ≥ 0 et de carré $= 1$), donc sin est une bijection strictement croissante de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, et l'on a

$$\text{(7)} \qquad e^{i\pi/2} = i,$$

et $t \mapsto e^{it}$ est une bijection de $[0, \pi/2]$ sur le quart de cercle $\{(x, y) \in S^1 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$. D'après (1) ou (3), il résulte de (7) que :

$$\text{(8)} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \exp\big(i(t + \frac{\pi}{2})\big) = ie^{it}, \qquad \text{d'où} \quad \cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin(t), \qquad \sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos(t).$$

En particulier, on a $e^{i\pi} = -1$, et $\sin(t) > 0$ pour tout $t \in]0, \pi[$, donc cos est une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Il en résulte que $t \mapsto e^{it}$ est une bijection de $[0, \pi]$ sur le demi-cercle supérieur $\{(x, y) \in S^1 \mid y \geq 0\}$, et de $[-\pi, 0]$ sur le demi-cercle inférieur $\{(x, y) \in S^1 \mid y \leq 0\}$. Ceci prouve la surjectivité.

D'autre part, on a l'inclusion et les égalités suivantes :

$$(\dagger) \qquad \begin{aligned} 2\pi\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Ker}(f) = \{T \in \mathbb{R} \mid e^{i(T+t)} = e^{it}, \quad \forall t \in \mathbb{R}\} &= \{T \in \mathbb{R} \mid \cos(T+t) = \cos(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{T \in \mathbb{R} \mid \sin((T+t) = \sin(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

En effet, comme $e^{2i\pi} = 1$ on a $2\pi\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. D'autre part, si $T \in \mathrm{Ker}(f)$ i.e. si $e^{iT} = 1$ alors, d'après (1), on a $e^{i(T+t)} = e^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où la première égalité.

D'autre part, comme on a $\cos(t) = \sin(t + \dfrac{\pi}{2})$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on obtient que

$$\{T \in \mathbb{R} \mid \cos(T+t) = \cos(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}\} = \{T \in \mathbb{R} \mid \sin(T+t) = \sin(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$$

et cet ensemble égale donc $\{T \in \mathbb{R} \mid e^{i(T+t)} = e^{it}, \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Enfin, soit $T \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(T+t) = \cos(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; montrons que $T \in 2\pi\mathbb{Z}$. Quitte à changer T en $-T$, on peut supposer $T \geq 0$, soit alors n le plus grand entier ≥ 0 tel que $2n\pi \leq T$, alors $T - 2n\pi$ vérifie la même propriété que T et appartient à $[0, 2\pi[$. Donc, pour obtenir que $T = 2n\pi$, il suffit de montrer que 2π est le plus petit réel $s > 0$ tel que $\cos(s) = 1$.

Or, d'après ce qui précède, on sait que $1 > \cos(t) > -1$ pour tout $t \in]0, \pi[$. Supposons que $s \in]0, 2\pi[$ vérifie $\cos(s) = 1$, alors $\sin(s) = 0$ donc $e^{is} = 1$, donc $x = e^{is/2}$ vérifie $x^2 = 1$, d'où $x = \pm 1$ et donc $\cos(s/2) = \pm 1$, impossible puisque $s/2 \in]0, \pi[$. Ceci montre que 2π est le plus petit réel $s > 0$ tel que $\cos(s) = 1$.

Il en résulte que l'inclusion dans (†) plus haut est une égalité. Ceci montre que cos et sin sont périodiques de période 2π, et que $\mathrm{Ker}(f) = 2\pi\mathbb{Z}$. Le théorème est démontré. □

Remarque 6.5.2. — Dans ce qui précède, on a **défini** 2π comme le générateur positif du groupe $\mathrm{Ker}(f)$ (i.e. le plus petit élément > 0 de $\mathrm{Ker}(f)$). On retrouve que 2π est la longueur du cercle de rayon 1 comme suit. Pour toute fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto g(t) = (x(t), y(t))$ continûment dérivable, on peut montrer que la longueur dans $\mathbb{R}^2$ euclidien de la courbe $\gamma = \{g(t) \mid t \in [a, b]\}$ est donnée par la formule :

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(g'(t) \mid g'(t))}\, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\,.$$

Appliquant ceci à $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto e^{it} = (\cos(t), \sin(t))$, on obtient

$$L(S^1) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1}\, dt = 2\pi.$$

6.6. Appendice (†) : décomposition d'Iwasawa de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Afin d'énoncer un corollaire matriciel au théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, introduisons les notations suivantes. D'abord, notons $\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont > 0.

Lemme 6.6.1. — *$\mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. — Soient $N, N' \in \mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$, notons $t_1 \ldots, t_n$ et $t'_1, \ldots, t'_n$ leurs coefficients diagonaux. Alors NN' est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $t_i t'_i > 0$, d'où $NN' \in \mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$. Donc il suffit de montrer que $N^{-1} \in \mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$. Soient $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de N. Montrons par récurrence sur $r \leq n$ que $e_r = (1/t_r)C_r + \sum_{i<r} b_{ir} C_i$. C'est OK pour $r = 1$, car $C_1 = t_1 e_1$ d'où $e_1 = (1/t_1)C_1$. On peut donc supposer $r \geq 2$ et l'assertion établie pour $r - 1$. En particulier, on a $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{r-1}) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_{r-1})$. Comme $C_r - t_r e_r \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{r-1})$, on en déduit qu'il existe des coefficients b'_{ir}, pour $i = 1, \ldots, r - 1$, tels que

$$t_r e_r = C_r + \sum_{i=1}^{r-1} b'_{ir} C_i\,,$$

d'où le résultat voulu au cran r, en divisant par t_r et en posant $b_{ir} = b'_{ir}/t_r$. Il en résulte que N^{-1} est triangulaire supérieure, de termes diagonaux les $1/t_i$, qui sont > 0. Ceci prouve le lemme. □

On déduit alors du théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt le :

Corollaire 6.6.2 **(Décomposition d'Iwasawa)**. — *L'application ci-dessous est* *bijective* *:*

$$\mathrm{O}(n) \times \mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \qquad (K, N) \mapsto KN$$

(Attention, ce n'est pas un morphisme de groupes, i.e. $(KN)(K'N') \neq KK'NN'$ *en général.)*

Démonstration. — Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, notons $v_1, \dots, v_n$ les vecteurs colonnes de P. Alors $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$, où $\mathscr{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème de Gram-Schmidt, il existe une base orthonormée $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $r = 1, \dots, n$, on ait $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_r) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_r)$, et $(v_r \mid f_r) > 0$, et ceci équivaut à dire que la matrice de passage $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$ appartient à $\mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$. D'autre part, comme $\mathscr{C}$ est orthonormée, la matrice de passage $K = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{C})$ appartient à $\mathrm{O}(n)$. D'après la formule de changement de base, on a

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{C}) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = KN$$

ce qui prouve l'existence.

Montrons l'unicité : supposons qu'on ait $P = K' M$ avec $K' \in \mathrm{O}(n)$ et $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$, et notons $f_1, \dots, f_n$ les colonnes de la matrice $K' = PM^{-1}$. Alors $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ est une b.o.n. de $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{C}) = K'$ et la matrice exprimant $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{C}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_0) \cdot Mat_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) = K'^{-1} P = M\,.$$

Alors, pour tout $r = 1, \dots, n$, on a $v_r = \sum_{i=1}^r m_{ir}\, f_i$, avec $(v_r \mid f_r) = m_{rr} > 0$. De plus, d'après le lemme précédent (ou par un calcul direct), pour tout $i = 1, \dots, n$, les vecteurs $f_1, \dots, f_i$ appartiennent à $V_i = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i)$, donc en forment une base orthonormée. Donc la base $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ vérifie les conditions du théorème de Gram-Schmidt, d'où par unicité $M = N$, puis $K' = PN^{-1} = K$. □

Remarques 6.6.3. — (1) En appliquant ce qui précède à P^{-1}, on voit qu'il existe un couple unique $(K, N) \in O(n) \times \mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1} = KN$, i.e. $P = N^{-1}K^{-1}$. Comme l'application $g \mapsto g^{-1}$ est une bijection sur chaque groupe, il en résulte que l'application $\mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}(n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $(N, K) \mapsto NK$ est aussi une bijection.

(2) L'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ a une structure naturelle d'espace topologique, définie par la distance associée à n'importe quelle norme sur $M_n(\mathbb{R})$, par exemple $\|(a_{ij})\|_\infty = \mathrm{Max}_{i,j} |a_{ij}|$ ou $\|(a_{ij})\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$, et donc les sous-ensembles $\mathrm{O}(n), \mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ héritent d'une structure d'espace topologique. Il est facile de voir que l'application (de multiplication) $(K, N) \mapsto KN$ est continue, et on peut montrer que c'est un homéomorphisme. D'abord, l'application $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$ est continue, car $A^{-1} = (1/\det(A))\, {}^t\widetilde{A}$, où $\widetilde{A}$ désigne la matrice des cofacteurs de A (cf. 1.4.3). Il suffit donc de montrer que, si $A = KN$, l'application $f : A \mapsto N^{-1}$ est continue, car alors les applications $A \mapsto N$ et $A \mapsto K = AN^{-1}$ le seront aussi. Or, si l'on note $v_1, \dots, v_n$ les colonnes de A, la continuité de $f : A \mapsto N^{-1}$ résulte de la démonstration du théorème de Gram-Schmidt, car les coefficients de $N^{-1} = \mathrm{Mat}_{(v_1, \dots, v_n)}(e_1, \dots, e_n)$ sont des fonctions continues des produits scalaires $(v_i \mid v_j)$.