CHAPITRE 7

ESPACES AFFINES, CONIQUES ET QUADRIQUES

Résumé : Dans ce chapitre, on introduit la notion importante d'espace affine. De façon imagée, un espace affine $\mathscr{E}$ est « la même chose » qu'un espace vectoriel E dont on a oublié l'origine ; c'est le cadre naturel pour faire de la géométrie. Dans la section 1, on commence par introduire les notions de repère, de changement de repère, et d'application affine. Dans la section 2, on introduit les barycentres, et la notion de sous-espace affine. Dans la section 3, on incorpore les résultats du Chap. 6 en introduisant les « *espaces affines euclidiens* » et leurs isométries ; en particulier on étudie en profondeur les isométries du plan affine et de l'espace affine de dimension 3. On termine le chapitre par l'étude des coniques (dans le plan) et des quadriques (dans l'espace). Comme le précédent, ce chapitre contient beaucoup de résultats nouveaux et importants, qu'il faut essayer d'assimiler !

On a indiqué par des symboles les définitions, exemples et résultats fondamentaux.

7.1. Espaces affines réels

Exemple 7.1.1. — Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\mathscr{D}_1$ la « droite affine » d'équation $x_1 + x_2 = 1$, ce n'est **pas un sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^2$: si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ appartiennent à $\mathscr{D}_1$, alors $x + y \notin \mathscr{D}_1$ (car $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 2$), et si $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 1$, alors $tx = (tx_1, tx_2) \notin \mathscr{D}_1$. Mais le vecteur $y - x = \binom{y_1 - x_1}{y_2 - x_2}$ appartient à la droite vectorielle D d'équation $z_1 + z_2 = 0$, engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u} = e_1 - e_2$. On a donc une application

$$\mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_1 \to D, \qquad (x, y) \mapsto y - x.$$

Notons $\overrightarrow{xy}$ le vecteur $y - x \in \mathbb{R}^2$, alors pour $x, y, z \in \mathscr{D}_1$ on a

$$(1) \qquad \overrightarrow{xz} = z - x = (y - x) + (z - y) = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz}.$$

D'autre part, pour tout $x = (x_1, x_2)$ appartenant à $\mathscr{D}_1$, et pour tout vecteur $\overrightarrow{v} = t\overrightarrow{u} \in D$, il existe un unique $y \in \mathscr{D}_1$ tel que $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{v}$, à savoir $y = (x_1 + t, x_2 - t)$, et l'on notera $y = x + \overrightarrow{v}$. Donc :

$$(2) \qquad \text{pour tout } x \in \mathscr{D}_1, \text{ l'application } \{x\} \times \mathscr{D}_1 \to D, \quad (x, y) \mapsto \overrightarrow{xy} \text{ est bijective}$$

et ceci équivaut aussi à dire que :

$$(2') \qquad \text{l'application } \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_1 \to \mathscr{D}_1 \times D, \quad (x, y) \mapsto (x, \overrightarrow{xy}) \text{ est bijective ;}$$

son inverse est notée $(x, \overrightarrow{v}) \mapsto (x, x + \overrightarrow{v})$.

Remarque 7.1.2. — Ce qui précède est une propriété intrinsèque de $\mathscr{D}_1$, et ne dépend pas des coordonnées (x_1, x_2) choisies. Par exemple, soient $f_1 = (e_1 - e_2)/2$ et $f_2 = (e_1 + e_2)/2$, alors

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(f_1, f_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible, donc $\mathscr{C} = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et les coordonnées (y_1, y_2) dans la base $\mathscr{C}$ sont données par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Avec ces nouvelles coordonnées, $\mathscr{D}_1$ est la « droite affine » d'équation $y_2 = 1$ et D est la droite vectorielle d'équation $y_2 = 0$; si P et Q, de coordonnées $(p, 1)$ et $(q, 1)$, appartiennent à $\mathscr{D}_1$, le vecteur $\overrightarrow{PQ} = (q - p)f_1$

[0] version du 9/7/2012

appartient à D, et réciproquement, pour tout $\overrightarrow{v} = tf_1 \in D$, le point $P + tf_1 = (p+t, 1)$ est l'unique point Q de $\mathscr{D}_1$ tel que $\overrightarrow{PQ} = tf_1$.

Ce qui précède est un cas particulier de, et conduit à, la définition suivante :

***Définition 7.1.3* (Espaces affines réels).** — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un **espace affine $\mathscr{E}$ de direction E** est un ensemble non-vide $\mathscr{E}$ muni d'une application

$$\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E, \qquad (x,y) \mapsto \overrightarrow{xy}$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

(1) $\boxed{\text{Relation de Chasles : } \quad \overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz}} \qquad \forall x,y,z \in \mathscr{E}.$

(2) L'application $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathscr{E} \times E, \quad (x,y) \mapsto (x, \overrightarrow{xy})$ est **bijective**.

On notera $(x, \overrightarrow{u}) \mapsto (x, x + \overrightarrow{u})$ la **bijection inverse**, c.-à-d., pour tout $x \in \mathscr{E}$ et $\overrightarrow{u} \in E$, $x + \overrightarrow{u}$ désigne l'unique $y \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{u}$.

<u>Vocabulaire</u> : les éléments de $\mathscr{E}$ sont appelés « points », ceux de E sont appelés « vecteurs ». Si E est de dimension finie n, ce que nous supposerons par la suite, on pose $\dim \mathscr{E} = \dim E$.

Remarque 7.1.4. — Dans la définition précédente, on peut remplacer $\mathbb{R}$ par un corps arbitraire k, on obtient ainsi la notion d'espace affine sur k. Comme nous ne considérerons que des espaces affines sur $\mathbb{R}$, nous dirons simplement « espaces affines », sans préciser « réels ». De plus, pour abréger, on écrira souvent : « soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine », ou même : « soit $\mathscr{E}$ un espace affine (de dimension n) », sans préciser l'espace vectoriel E (appelé la « direction » de $\mathscr{E}$).

Exemple 7.1.5. — Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un espace affine, pour l'application $E \times E \to E$, $(x,y) \mapsto \overrightarrow{xy} = y - x$.

***Définition 7.1.6* (Repères cartésiens d'un espace affine de dimension finie)**
Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, avec $\dim E = n$. Un **repère** (cartésien) $\mathscr{R}$ de $\mathscr{E}$ est un couple $(O, \mathscr{B})$, où O est un point de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E ; on dira aussi que le $(n+1)$-uplet $(O, e_1, \dots, e_n)$ est un repère de $\mathscr{E}$. Dans ce cas, pour tout point P de $\mathscr{E}$, il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\overrightarrow{OP} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

et l'on dit que $(x_1, \dots, x_n)$ sont les **coordonnées** de P dans le repère $\mathscr{R}$.

Exemple 7.1.7. — Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, posons

$$\mathscr{E} = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i = 1, \dots, n, \quad x_i \in \mathbb{R}\}$$

considéré comme espace affine de direction $E = \mathbb{R}^n$, c.-à-d., muni de l'application $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E$, $(x,y) \mapsto \overrightarrow{xy} = y - x = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) e_i$. Notons O le point $(0, \dots, 0)$ de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{R}$ le repère $(O, \mathscr{B})$. Alors pour tout point $P = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathscr{E}$, ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ sont $(x_1, \dots, x_n)$. Si on fixe un point arbitraire $A = (a_1, \dots, a_n)$ de $\mathscr{E}$ et qu'on considère le repère $\mathscr{R}' = (A, \mathscr{B})$, alors les coordonnées $(x'_1, \dots, x'_n)$ de P dans $\mathscr{R}'$ sont données par l'égalité $\overrightarrow{AP} = x'_1 e_1 + \cdots x'_n e_n$, et comme par définition $\overrightarrow{AP} = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) e_i$, on obtient $x'_i = x_i - a_i$ pour tout i.

Ce qui précède est un cas particulier du théorème suivant :

***Théorème 7.1.8* (Changement de repère).** — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E, soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ la matrice de passage, et soient $O, O' \in \mathscr{E}$. Posons $\overrightarrow{OO'} = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n$. Pour $M \in \mathscr{E}$ arbitraire, notons $(x_1, \dots, x_n)$ (resp. $(x'_1, \dots, x'_n)$) ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ (resp. $\mathscr{R}' = (O', \mathscr{C})$). Alors on a*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}, \qquad \text{et donc} \qquad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - t_1 \\ \vdots \\ x_n - t_n \end{pmatrix}.$$

De façon abrégée, si l'on note X, X' et T les vecteurs colonnes ci-dessus, on a

$$\boxed{X = PX' + T} \qquad \boxed{X' = P^{-1}(X - T)}$$

Démonstration. — Soient X, X' comme ci-dessus et notons Y le vecteur colonne PX'. Alors, d'après la formule de changement de base dans E, on a :

$$\overrightarrow{O'M} = x'_1 f_1 + \cdots + x'_n f_n = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n,$$

et comme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ on obtient

$$X = \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} (t_i + y_i) e_i = T + PX'$$

et l'on a donc aussi $X' = P^{-1}(X - T)$, ce que l'on peut aussi retrouver en écrivant que

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i f_i = \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - t_i) e_i$$

d'où $X' = P^{-1}(X - T)$. $\square$

***Définition et proposition 7.1.9* (Applications affines).** — *Soient $(\mathscr{E}, E)$ et $(\mathscr{E}', E')$ deux espaces affines. Une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est une* **application affine** *s'il existe un point $O \in \mathscr{E}$ tel que l'application $\phi : E \to E$ définie par :*

$$\forall P \in \mathscr{E}, \qquad \phi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)}$$

soit **linéaire**. *Dans ce cas, on note $\phi = \overrightarrow{f}$, et les égalités ci-dessus sont vraies pour tout couple de points (I, P), c.-à-d., on a* **pour tout** *$I \in \mathscr{E}$:*

$$\boxed{\forall P \in \mathscr{E}, \quad \overrightarrow{f(I)f(P)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IP})} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\forall \overrightarrow{u} \in E, \quad f(I + \overrightarrow{u}) = f(I) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}).}$$

On dit alors que $\overrightarrow{f}$ est la **partie linéaire** *de f.*

Démonstration. — Fixons un point $O \in \mathscr{E}$. Comme l'application $\theta : E \to \mathscr{E}$, $\overrightarrow{u} \mapsto O + \overrightarrow{u}$ est une bijection, d'inverse $P \mapsto \overrightarrow{OP}$ alors l'application $\theta^{-1} \circ f \circ \theta$ est l'unique application $\phi : E \to E$ telle que

$$\forall \overrightarrow{u} \in E, \qquad f(O + \overrightarrow{u}) = f(O) + \phi(\overrightarrow{u}) \qquad (\text{i.e. } \overrightarrow{f(O)f(P)} = \phi(\overrightarrow{OP}), \text{ pour tout } P \in \mathscr{E}).$$

On suppose que, pour ce choix de O, l'application $\phi : E \to E$ est **linéaire**. Soit $I \in \mathscr{E}$ arbitraire. D'après la relation de Chasles, et la définition de ϕ, on a, pour tout $P \in \mathscr{E}$:

$$\overrightarrow{f(I)f(P)} = \overrightarrow{f(O)f(P)} - \overrightarrow{f(O)f(I)} = \phi(\overrightarrow{OP}) - \phi(\overrightarrow{OI})$$

et comme ϕ est supposée linéaire, ceci égale $\phi(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OI})$. D'après la relation de Chasles, à nouveau, on a $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{IP}$. Posant $\overrightarrow{f} = \phi$, on a donc obtenu :

$$\forall I, P \in \mathscr{E}, \qquad \overrightarrow{f(I)f(P)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IP}).$$

La proposition est démontrée. $\square$

Remarque 7.1.10. — Pour $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ arbitraire, et $O \in \mathscr{E}$, l'application $\phi : E \to E$ définie plus haut n'a aucune raison d'être linéaire : prendre par exemple $\mathscr{E} = E = \mathbb{R}$, $O = 0$ et $f(t) = t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $\phi(t) = f(t)$ n'est pas linéaire.

***Proposition 7.1.11* (Écriture d'une application affine dans des repères cartésiens)** *Soient $(\mathscr{E}, E)$ et $(\mathscr{E}', E')$ deux espaces affines, avec $\dim E = m$ et $\dim E' = n$, et soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ une application affine. Soient $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ et $\mathscr{R}' = (O', \mathscr{C})$ des repères de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$, soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\overrightarrow{f}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et soient $(b'_1, \ldots, b'_n)$ les coordonnées de $f(O)$ dans $\mathscr{R}'$.*

Alors, pour tout $P \in \mathscr{P}$, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_m)$ dans $\mathscr{R}$, les coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ de $f(P)$ dans $\mathscr{R}'$ sont données par :

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}.}$$

Démonstration. — En effet, on a $\begin{pmatrix} y_1 - b'_1 \\ \vdots \\ y_n - b'_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OP}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$. $\square$

Définition et proposition 7.1.12 **(Translations de $\mathscr{E}$).** — *Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, on appelle* **translation de vecteur** $\overrightarrow{u}$ *l'application $t_{\overrightarrow{u}} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, qui à tout $x \in \mathscr{E}$ associe le point $x + \overrightarrow{u}$. C'est une application* **affine**, *dont la partie linéaire est* id_E.

Démonstration. — On fixe $O \in \mathscr{E}$ et pour tout $P \in \mathscr{E}$ on pose $P' = P + \overrightarrow{u}$. Alors

$$\overrightarrow{O'P'} = \underbrace{\overrightarrow{O'O}}_{=-\overrightarrow{u}} + \overrightarrow{OP} + \underbrace{\overrightarrow{PP'}}_{=\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{OP}.$$

Avec les notations de 7.1.9, ceci montre que l'application ϕ égale id_E, qui est linéaire. Donc $t_{\overrightarrow{u}}$ est une application affine, de partie linéaire id_E. □

Lemme 7.1.13. — *Pour tout $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, on a* $\boxed{t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}}$. *Donc l'ensemble des translations est un groupe commutatif ; en particulier, toute translation $t_{\overrightarrow{u}}$ est* **bijective, d'inverse** $t_{-\overrightarrow{u}}$.

Démonstration. — Pour tout $P \in \mathscr{E}$, on a $(t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}})(P) = t_{\overrightarrow{u}}(P + \overrightarrow{v}) = P + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}(P)$. Ceci prouve la première assertion, et la seconde en découle facilement. □

Proposition 7.1.14 **(Composée d'applications affines).** — *Soient $\mathscr{E} \xrightarrow{f} \mathscr{E}' \xrightarrow{g} \mathscr{E}''$ deux applications affines, alors la composée $g \circ f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}''$ est affine, et sa partie linéaire est* $\boxed{\overrightarrow{(g \circ f)} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}.}$

Démonstration. — Fixons $O \in \mathscr{E}$ et posons $O' = f(O)$. Pour tout $M \in \mathscr{E}$ et $P \in \mathscr{E}'$, on a :

$$\overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{g(O')g(P)} = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{O'P}).$$

En particulier, appliquant la deuxième égalité au cas où $P = f(M)$, on obtient :

$$\overrightarrow{(g \circ f)(O)(g \circ f)(M)} = \overrightarrow{g(f(O))g(f(M))} = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f(O)f(M)}) = \overrightarrow{g}\Big(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})\Big) = (\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f})(\overrightarrow{OM}).$$

D'après 7.1.9, ceci prouve que $g \circ f$ est affine, de partie linéaire $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$. □

Théorème et définition 7.1.15 **(Transformations affines et groupe** $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$**)**
Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine.

(1) *On note $\mathrm{TAff}(\mathscr{E})$ l'ensemble des transformations affines de $\mathscr{E}$, i.e. applications affines $\mathscr{E} \to \mathscr{E}$; il est stable par composition, c.-à-d., si $f, g \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E})$ alors $g \circ f \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E})$.*

(2) *Pour tout $O \in \mathscr{E}$, tout $f \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E})$ s'écrit $f = t_{\overrightarrow{Of(O)}} \circ \phi_O$, où ϕ_O est l'application affine définie par $\phi_O(P) = O + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OP})$.*

(3) *Soit $f \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E})$, alors* $\boxed{f \text{ bijective} \Longleftrightarrow \overrightarrow{f} \text{ bijective.}}$

(4) *On note $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) = \{f \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E}) \mid f \text{ bijective}\}$; c'est un* **groupe**, *et l'application $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) \to \mathrm{GL}(E)$, $f \mapsto \overrightarrow{f}$ est un morphisme de groupes.*

(5) *Pour tout $f \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E})$ et $\overrightarrow{u} \in E$, on a $f \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})} \circ f$; en particulier si $f \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ alors $f \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ f^{-1} = t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})}$.*

Démonstration. — (1) découle de 7.1.14. Prouvons (2). Soient $O \in \mathscr{E}$ et $f \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E})$, posons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Of(O)}$ et $g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E})$. Alors g est affine, sa partie linéaire est $\mathrm{id}_E \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}$, et l'on a $g(O) = O$. Donc, pour tout $P \in \mathscr{E}$, on a $\overrightarrow{Og(P)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OP})$ donc g égale ϕ_O, et l'on a $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ \phi_O$, ce qui prouve (2). De plus, comme $t_{\overrightarrow{u}}$ est bijective et $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ \phi_O$, on a :

$$f \text{ bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad \phi_O \text{ bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{f} \text{ bijective}$$

ce qui prouve (3).

Prouvons (4). Soit $f \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ et soient $O, P \in \mathscr{E}$. Posons $O' = f^{-1}(O)$ et $P' = f^{-1}(P)$, comme f est affine et $f(O') = O$, $f(P') = P$, on a :

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{O'P'}) = \overrightarrow{f(O')f(P')} = \overrightarrow{OP}$$

et comme $\overrightarrow{f}$ est bijective, d'après (3), on obtient que

$$\overrightarrow{f^{-1}(O)f^{-1}(P)} = \overrightarrow{O'P'} = (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{OP})$$

et ceci prouve que f^{-1} est affine, de partie linéaire $(\overrightarrow{f})^{-1}$. Le reste du point (4) découle alors de 7.1.14.

Prouvons (5). Pour tout $P \in \mathscr{E}$, on a

$$(f \circ t_{\overrightarrow{u}})(P) = f(P + \overrightarrow{u}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = (t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})} \circ f)(P)$$

ce qui prouve le premier point de (5), et le second en découle. $\square$

Remarque 7.1.16. — Soient $(\mathscr{E}, E)$ et $(\mathscr{E}', E')$ deux espaces affines de dimension finie, et soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ une application affine bijective. Alors $\overrightarrow{f} : E \to E'$ est une application linéaire bijective, donc E et E' sont isomorphes ; en particulier ils ont même dimension, donc $\dim \mathscr{E} = \dim \mathscr{E}'$.

7.2. Barycentres et sous-espaces affines

***Théorème et définition 7.2.1* (Barycentres)**. — *Soit $\mathscr{E}$ un espace affine, soient $P_1, \ldots, P_n \in \mathscr{E}$ et $t_1, \ldots, t_n$ des réels* **tels que** $\boxed{t_1 + \cdots + t_n = 1}$. *Alors il existe un unique point $G \in \mathscr{E}$ tel que :*

$$(*) \qquad \boxed{\forall I \in \mathscr{E}, \qquad \overrightarrow{IG} = t_1\overrightarrow{IP_1} + \cdots + t_n\overrightarrow{IP_n}}$$

et G s'appelle le **barycentre** *des points pondérés (P_i, t_i) (i.e. chaque point P_i est affecté du « poids » t_i). On notera :*

$$(**) \qquad \boxed{G = t_1P_1 + \cdots + t_nP_n.}$$

Lorsque $t_1 = \cdots = t_n$, d'où $t_1 = \cdots = t_n = 1/n$, on dit que G est le **centre de gravité** *ou* **isobarycentre** *des points $P_1, \ldots, P_n$.*

Démonstration. — Fixons une origine $O \in \mathscr{E}$. Si G existe, il vérifie nécessairement

$$(\dagger) \qquad \overrightarrow{OG} = t_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + t_n\overrightarrow{OP_n}$$

d'où l'unicité de G (s'il existe). Réciproquement, définissons G par l'égalité ci-dessus et montrons que G vérifie $(*)$ pour tout $I \in \mathscr{E}$. D'après la relation de Chasles et $(\dagger)$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} t_i\overrightarrow{IP_i} = \sum_{i=1}^{n} t_i(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OP_i}) = \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i\Big)}_{=1}\overrightarrow{IO} + \sum_{i=1}^{n} t_i\overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{IG}.$$

Ceci prouve le théorème. $\square$

Remarque 7.2.1.1. — La démonstration du théorème montre que si un point G' vérifie l'égalité $(*)$ pour *un* point I, alors G' égale G et vérifie l'égalité $(*)$ pour *tout* point I.

***Définition 7.2.2* (Segments)**. — Soient $A, B \in \mathscr{E}$, on définit le **segment** $[A, B]$ comme l'ensemble des points qui sont « entre » A et B, i.e. l'ensemble des points P de la forme

$$P = A + t\overrightarrow{AB} = B + (1-t)\overrightarrow{BA}, \qquad \underline{\text{avec } t \in [0,1]},$$

c'est donc aussi l'ensemble des barycentres $P = (1-t)A + tB$, avec $t \in [0,1]$. En particulier, le *centre de gravité* de A, B (qui correspond à $t = 1/2$) est le **milieu** du segment $[A, B]$.

***Proposition 7.2.3* (Associativité des barycentres)**. — *Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{E}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ tels que $t_1 + \cdots + t_n = 1$, et G le barycentre des points pondérés (A_1, t_1), …, (A_n, t_n).*

(1) *On suppose que $\mu = t_1 + \cdots + t_{n-1} = 1 - t_n$ est non nul. Soit H le barycentre des points pondérés $(A_1, t_1/\mu)$, …, $(A_{n-1}, t_{n-1}/\mu)$, alors* $\boxed{G \text{ est le barycentre de } (H, \mu) \text{ et de } (A_n, t_n).}$

(2) *En particulier, si $t_1 = \cdots = t_n = 1/n$, soit G (resp. H) le centre de gravité G de $A_1, \ldots, A_n$ (resp. de $A_1, \ldots, A_{n-1}$), alors G est le barycentre de $(H, (n-1)/n)$ et de $(A_n, 1/n)$.*

Démonstration. — Soit $O \in \mathscr{E}$. Alors H est défini par $\overrightarrow{OH} = \dfrac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n-1} t_i\overrightarrow{OA_i}$ et le barycentre G' de (H, μ) et de (A_n, t_n) est défini par

$$\overrightarrow{OG'} = \mu\overrightarrow{OH} + t_n\overrightarrow{OA_n} = \sum_{i=1}^{n-1} t_i\overrightarrow{OA_i} + t_n\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OG}$$

d'où $G' = G$. $\square$

***Exemple 7.2.4* (Centre de gravité d'un triangle).** — Dans le plan affine $\mathscr{P}$, soient A, B, C trois points non alignés, soit G le centre de gravité des points A, B, C, et soit $O \in \mathscr{P}$ arbitraire. Notons I le milieu du segment $[BC]$, alors la droite (AI) s'appelle la **médiane** du triangle **issue de** A. Appliquons la proposition précédente à $A_1 = B$, $A_2 = C$, $A_3 = A$, alors on a $\mu = 2/3$ et $t_i/\mu = 1/2$ pour $i = 1, 2$, donc $H = I$ et l'on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}.$$

Prenant $O = G$, on obtient $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$: ceci montre que G est situé sur le segment $[AI]$, aux deux-tiers du segment en partant du sommet A. On a le même résultat si l'on introduit les milieux J et K de $[BC]$ et $[CA]$, donc on obtient le résultat suivant : « *les médianes d'un triangle se coupent aux deux-tiers de leur longueur (en partant des sommets), et le point d'intersection est le centre de gravité du triangle* ».

***Théorème 7.2.5* (Applications affines et barycentres).** — *Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ une application affine. Alors f* **préserve les barycentres** *: si $G \in \mathscr{E}$ est le barycentre des points (A_i, t_i) alors $f(G) \in \mathscr{E}'$ est le barycentre des points $(f(A_i), t_i)$.*

Démonstration. — Fixons $O \in \mathscr{E}$ et pour tout $P \in \mathscr{E}$ notons $P' = f(P)$. Par définition, on a $\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n t_i\overrightarrow{OA_i}$ d'où, puisque $\overrightarrow{f}$ est linéaire :

$$\overrightarrow{O'G'} = \overrightarrow{f}\,(\sum_{i=1}^n t_i\overrightarrow{OA_i}) = \sum_{i=1}^n t_i\,\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{OA_i}) = \sum_{i=1}^n t_i\overrightarrow{O'A'_i}.$$

Ceci montre que G' est le barycentre des points (A'_i, t_i). □

Définition et proposition 7.2.6* (Sous-espaces affines).** — *Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et $\mathscr{F}$ un sous-ensemble* **non-vide. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Pour tous $M_0, M_1, \dots, M_p \in \mathscr{F}$ et tous $t_0, t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$ tels que $t_0 + \cdots + t_p = 1$, le barycentre $G = t_0M_0 + \cdots + t_pM_p$ appartient à $\mathscr{F}$.*

(2) *Pour tous $M_0, M_1, \dots, M_p \in \mathscr{F}$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, le point $M_0 + \lambda_1\overrightarrow{M_0M_1} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{M_0M_p}$ appartient à $\mathscr{F}$.*

(3) *Il existe $M_0 \in \mathscr{F}$ tel que $F = \{\overrightarrow{M_0M} \mid M \in \mathscr{F}\}$ soit un sous-espace vectoriel de E.*

(4) *Pour tout $M_0 \in \mathscr{F}$, $F = \{\overrightarrow{M_0M} \mid M \in \mathscr{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E, indépendant du choix de $M_0 \in \mathscr{F}$.*

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on dit que $\mathscr{F}$ est un **sous-espace affine** *(en abrégé :* **sea***),* **de direction** *F, et l'on pose* $\dim\mathscr{F} = \dim F$.

Démonstration. — Montrons que (1) ⇔ (2) : en prenant M_0 comme origine, G est défini par l'égalité

$$\overrightarrow{M_0G} = \sum_{i=1}^p t_i\overrightarrow{M_0M_i} \qquad \text{i.e.} \qquad G = M_0 + \sum_{i=1}^p t_i\overrightarrow{M_0M_i}$$

et l'équivalence (1) ⇔ (2) en découle (si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont donnés, on prend $t_i = \lambda_i$ pour $i = 1, \dots, p$ et $t_0 = 1 - \sum_{i=1}^p \lambda_i$).

Il est clair que (2) ⇒ (3). Supposons (3) vérifié pour un point M_0 fixé et soit $M'_0 \in \mathscr{F}$, notons provisoirement

$$F' = \{\overrightarrow{M'_0M} \mid M \in \mathscr{F}\}.$$

Posons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{M_0M'_0}$. Comme $M'_0 \in \mathscr{F}$, on a $\overrightarrow{u} \in F$, et comme F est un sous-espace vectoriel de E, l'application $\overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$ est une bijection de F sur lui-même (d'inverse $\overrightarrow{w} \mapsto \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}$). D'après la relation de Chasles, pour tout $M \in \mathscr{F}$ on a

$$\overrightarrow{M'_0M} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0M'_0} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{u}$$

et donc

$$F' = \{\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \in F\} = F.$$

Ceci prouve que (3) ⇒ (4). Enfin, il est clair que (4) ⇒ (2). La proposition est démontrée. □

Remarque 7.2.7. — Soient $(\mathscr{F}, F)$ comme dans la proposition précédente, alors $\mathscr{F}$ est un espace affine de direction F, ce qui justifie la terminologie « sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction F ». En effet, l'application

$$\mathscr{F} \times \mathscr{F} \to F, \qquad (M_0, M) \mapsto \overrightarrow{M_0M}$$

est la restriction à $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ de l'application $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E$, donc vérifie la relation de Chasles. D'autre part, d'après le point (4) de la proposition, pour tout $M_0 \in \mathscr{F}$, l'application $\mathscr{F} \to F$, $M \mapsto \overrightarrow{M_0M}$ est bijective. Ceci prouve que $\mathscr{F}$ est bien un espace affine de direction F (cf. définition 7.1.3).

Définition 7.2.8 **(Sea de direction F passant par un point A).** — Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et F un sev de E. Pour tout $A \in \mathscr{E}$, il existe un unique sea de direction F passant par A, c'est :

$$\mathscr{F} = \{P \in \mathscr{E} \mid \overrightarrow{AP} \in F\} = \{A + \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \in F\}$$

on le note $A + F$. De plus, pour tout point $B \in \mathscr{F}$, on a aussi $\mathscr{F} = B + F$.

Exemples 7.2.9. — (1) Pour tout $P \in \mathscr{E}$, le singleton $\{P\}$ est un sea de $\mathscr{E}$ de dimension 0, et réciproquement.

(2) Soit $\mathscr{D}$ un sea de $\mathscr{E}$ de dimension 1, et soit $D = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ sa direction (une droite vectorielle dans E). Pour tout A fixé dans $\mathscr{D}$, on a :

$$\mathscr{D} = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u} = \{A + t\overrightarrow{u} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1-t)A + tB \mid t \in \mathbb{R}\}$$

où l'on a posé $B = A + \overrightarrow{u}$. Réciproquement, pour tout $A \neq B$ dans $\mathscr{E}$, l'ensemble des barycentres :

$$\{(1-t)A + tB \mid t \in \mathbb{R}\}$$

est un sea de $\mathscr{E}$ de direction $\mathbb{R}\overrightarrow{AB}$, qu'on appelle la « **droite affine** » (AB).

Proposition 7.2.10 **(Sous-espaces affines définis par des équations)**

Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine. On fixe $O \in \mathscr{E}$. Soient $f_1, \dots, f_p \in E^*$ des formes linéaires sur E et $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$. On pose

$$\mathscr{F} = \{P \in \mathscr{E} \mid f_i(\overrightarrow{OP}) = c_i, \quad \forall i = 1, \dots, p\}.$$

Alors, si $\mathscr{F} \neq \varnothing$, c'est un sea de $\mathscr{E}$, de direction l'espace vectoriel

$$F = \{\overrightarrow{u} \in E \mid f_i(\overrightarrow{u}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p\} = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_i).$$

Démonstration. — Supposons $\mathscr{F} \neq \varnothing$ et soit $M_0 \in \mathscr{F}$. Alors un point arbitraire $M \in \mathscr{E}$ appartient à $\mathscr{F}$ si et seulement si on a :

$$\forall i = 1, \dots, p, \qquad f_i(\overrightarrow{OM}) = c_i = f_i(\overrightarrow{OM_0})$$

ce qui équivaut à :

$$\forall i = 1, \dots, p, \qquad f_i(\overrightarrow{M_0M}) = f_i(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}) = 0$$

et encore à : $\overrightarrow{M_0M} \in F = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_i)$. D'après la proposition 7.2.6, ceci montre que $\mathscr{F}$, s'il est non-vide, est un sea de direction F. □

Exemples 7.2.11. — Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine de dimension n. Fixons un repère $(O, e_1, \dots, e_n)$ de $\mathscr{E}$, d'où des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$. Alors toute forme linéaire sur E est de la forme $x \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ et donc se donner des équations $f_i(\overrightarrow{OM}) = c_i$ pour $i = 1, \dots, p$ équivaut à se donner un système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ \cdots &= \cdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n &= c_p \end{cases}$$

et la proposition précédente signifie la chose suivante : **si l'ensemble $\mathscr{F}$ des solutions de ce système est non-vide, alors c'est un sea de $\mathscr{E}$ de direction l'espace vectoriel F formé des solutions du système homogène :**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \cdots &= \cdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n &= 0. \end{cases}$$

Illustrons ceci par les deux exemples suivants :

(1) $\mathscr{F} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1 + 2x_2 = 2\} \neq \varnothing$ (il contient, par exemple, le point $(0, 1, 0)$), c'est un sea de $\mathbb{R}^3$ de direction la droite vectorielle

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 = x_1 + 2x_2\}.$$

(2) Par contre,
$$\mathscr{F} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1, \quad 2x_1 + 2x_2 = 3\}$$
est vide !

De plus, dans un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension n, tout sous-espace affine $\mathscr{F}$ de dimension r peut être défini par exactement $n - r$ équations :

Proposition 7.2.12. — *Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine de dimension n et $\mathscr{F}$ un sea de direction F, $\dim F = r$. Soit $O \in \mathscr{E}$ arbitraire et $(e_1, \dots, e_r)$ une base de F, complétons-la en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et notons $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans le repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$. Alors il existe $c_{r+1}, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tels que*
$$\mathscr{F} = \{M(x_1, \dots, x_n) \in \mathscr{E} \mid x_i = c_i, \quad \forall i = r+1, \dots, n\}.$$

Démonstration. — Soit $M_0 \in \mathscr{F}$, posons $c_i = x_i(M_0)$ pour $i = r+1, \dots, n$. Pour tout $M \in \mathscr{F}$, on a
$$\overrightarrow{M_0M} \in F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$$
donc $\overrightarrow{M_0M}$ a toutes ses coordonnées d'indice $i > r$ nulles, et donc $M = M_0 + \overrightarrow{M_0M}$ vérifie $x_i(M) = x_i(M_0) = c_i$ pour $i > r$.

Réciproquement, si $M \in \mathscr{E}$ vérifie $x_i(M) = x_i(M_0) = c_i$ pour $i > r$, alors le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ a toutes ses coordonnées d'indice $i > r$ nulles, donc appartient à F, et donc $M = M_0 + \overrightarrow{M_0M}$ appartient à $\mathscr{F}$. Ceci prouve la proposition. □

Définition et proposition 7.2.13 **(Sous-espace affine engendré par une partie non-vide)** *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, X une partie non vide de $\mathscr{E}$. Alors l'ensemble $\mathscr{F}$ de tous les barycentres*
$$G = t_0A_0 + \cdots + t_pA_p, \qquad \text{où} \quad A_0, \dots, A_p \in X, \quad t_0, \dots, t_p \in \mathbb{R}, \quad t_0 + \cdots + t_p = 1$$
est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, et c'est le **plus petit sea de $\mathscr{E}$ contenant** *X. On l'appelle le sea* **engendré par** *X et on le note $\mathrm{Aff}\langle X\rangle$. De plus, pour tout choix d'un point $A_0 \in X$, on a :*
$$\begin{aligned}\mathrm{Aff}\langle X\rangle &= \{A_0 + \lambda_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{A_0A_p} \mid A_1, \dots, A_p \in X,\ \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}\\ &= A_0 + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{A_0B} \mid B \in X\}\end{aligned}$$

Démonstration. — On définit $\mathscr{F}$ par :
$$\mathscr{F} = \{G = t_0A_0 + \cdots + t_pA_p \mid A_0, \dots, A_p \in X, \quad t_0, \dots, t_p \in \mathbb{R}, \quad t_0 + \cdots + t_p = 1\},$$
cette définition ne dépend d'aucun choix et tous les points de X y jouent le même rôle. On pourrait montrer directement, avec cette définition, que $\mathscr{F}$ vérifie la propriété (1) de la proposition 7.2.6, mais il est plus commode de procéder comme suit. Fixons un point $A_0 \in X$, alors, comme dans la démonstration de (1) $\Leftrightarrow$ (2) dans 7.2.6, on voit que
$$\begin{aligned}\mathrm{Aff}\langle X\rangle &= \{A_0 + \lambda_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{A_0A_p} \mid A_1, \dots, A_p \in X,\ \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}\\ &= A_0 + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{A_0B} \mid B \in X\}.\end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathscr{F}$ est un sea de direction $F = \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{A_0B} \mid B \in X\}$ (qui ne dépend pas du choix de A_0, cf. 7.2.6). De plus, $\mathscr{F}$ contient X, et si $\mathscr{F}'$ est un sea contenant X, alors sa direction F' contient tous les vecteurs $\overrightarrow{A_0B}$, pour $B \in \mathscr{F}$, donc F' contient F, et $\mathscr{F}' = A_0 + F'$ contient $\mathscr{F}$. Ceci montre que $\mathscr{F}$ est le **plus petit** sea de $\mathscr{E}$ contenant X, ce qui justifie la notation $\mathrm{Aff}\langle X\rangle$. □

Corollaire 7.2.14 **(Sea engendré par des points** $A_0, \dots, A_p$**)**. — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, le sous-espace affine engendré par des points $A_0, \dots, A_p \in \mathscr{E}$ est*
$$\begin{aligned}\mathrm{Aff}\langle A_0, \dots, A_p\rangle &= \{G = t_0A_0 + \cdots + t_pA_p \mid t_0, \dots, t_p \in \mathbb{R}, \quad t_0 + \cdots + t_p = 1\}\\ &= A_0 + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}\}\end{aligned}$$
sa dimension est celle de l'espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}\}$; en particulier, $\dim \mathrm{Aff}\langle A_0, \dots, A_p\rangle = p \Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}$ sont linéairement indépendants.

Remarque 7.2.15. — Dans le corollaire précédent, on a choisi le point A_0 comme « origine », mais bien sûr le même résultat est valable pour tout point A_i, i.e. on a aussi $F = \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{A_iA_j} \mid j \neq i\}$ et $\mathrm{Aff}\langle A_0, \dots, A_p\rangle = A_i + F$.

***Définition 7.2.16* (Points affinement indépendants ou liés).** — Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que $(p+1)$ points $A_0, \dots, A_p \in \mathscr{E}$ sont **affinement indépendants** si le sea de $\mathscr{E}$ qu'ils engendrent (i.e. le plus petit sea de $\mathscr{E}$ qui les contient) est de dimension p, c.-à-d., si les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}$ sont linéairement indépendants (ceci équivaut à dire que, pour i fixé, les p vecteurs $\overrightarrow{A_iA_j}$, pour $j \neq i$, sont linéairement indépendants). Dans le cas contraire, on dit que $A_0, \dots, A_p \in \mathscr{E}$ sont **affinement liés**.

Si $p = 2$, les trois points A_0, A_1, A_2 sont affinement liés $\iff$ ils sont alignés. Donc A_0, A_1, A_2 sont affinement indépendants $\iff$ ils sont **non alignés**.

On dit que des points $A_0, \dots, A_p \in \mathscr{E}$ sont **coplanaires** s'ils sont contenus dans un sea $\mathscr{P}$ de dimension 2 (un plan affine), i.e. si $\dim \mathrm{Aff}\langle A_0, \dots, A_p\rangle \leq 2$. Donc quatre points $A_0, \dots, A_3$ sont affinement indépendants $\iff$ ils sont **non coplanaires**.

***Définition 7.2.17* (Retour sur les repères).** — Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine de dimension n. Se donner un repère $\mathscr{R} = (A_0, \mathscr{B})$ de $\mathscr{E}$ (où $\mathscr{B}$ est une base de E) équivaut à se donner un $(n+1)$-uplet de points $A_0, A_1, \dots, A_n$ **affinement indépendants** : dans ce cas les n vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ sont linéairement indépendants donc forment une base $\mathscr{B}$ de E, et la donnée de $(A_0, \mathscr{B})$ équivaut bien sûr à celle du $(n+1)$-uplet $(A_0, A_1, \dots, A_n)$. On dira aussi qu'un tel $(n+1)$-uplet de points affinement indépendants forme un repère de $\mathscr{E}$.

Attention, cette fois l'ordre des points est important : A_0 est l'origine et la base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est ordonnée, i.e. les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans ce repère correspondent au point

$$A_0 + x_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{A_0A_n} = \big(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\big)A_0 + x_1A_1 + \cdots + x_nA_n.$$

***Définitions 7.2.18* (Sea parallèles).** — Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ deux sea, de directions respectives F_1 et F_2.

(1) On dit que $\mathscr{F}_1$ est *faiblement parallèle* à $\mathscr{F}_2$ si l'on a $F_1 \subseteq F_2$. Dans ce cas, si $A_0 \in \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$, alors $\mathscr{F}_1 = A_0 + F_1 \subseteq A_0 + F_2 = \mathscr{F}_2$, donc on a l'alternative suivante : ou bien

$$\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2 \qquad \text{ou bien} \qquad \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 = \varnothing.$$

(2) On dit que $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont **parallèles** si l'on a $F_1 = F_2$. Dans ce cas, on a l'alternative suivante : ou bien $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$ ou bien $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 = \varnothing$.

Remarque 7.2.18.1. — Attention, deux sea $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ qui vérifient $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 = \varnothing$ ne sont **pas nécessairement** parallèles ! Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$ les droites affines $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives $x = y = 0$ et $x - 1 = 0 = z$ vérifient $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \varnothing$ mais ne sont pas parallèles : la direction D_1 de $\mathscr{D}_1$ (resp. D_2 de $\mathscr{D}_2$) est la droite vectorielle d'équation $x = 0 = y$ (resp. $x = 0 = z$) et l'on a $D_1 \neq D_2$.

***Proposition 7.2.19* (Sea engendré par deux sea $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$).** — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, soient $(\mathscr{F}, F)$, $(\mathscr{F}', F')$ deux sous-espaces affines, $P \in \mathscr{F}$ et $P' \in \mathscr{F}'$.*

(1) *Le sous-espace vectoriel $V = F + F' + \mathbb{R}\overrightarrow{PP'}$ est indépendant du choix de $P \in \mathscr{F}$ et $P' \in \mathscr{F}'$.*

(2) *On a $V = F + F' \iff \mathscr{F} \cap \mathscr{F}' \neq \varnothing$.*

(3) *Le sous-espace affine engendré par $\mathscr{F} \cup \mathscr{F}'$ est $P + V = P' + V$, on le notera $\mathscr{F} + \mathscr{F}'$.* [1]

(4) *Par conséquent, si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont de dimension finie (par exemple, si $\mathscr{E}$ l'est), on a :*

$$\dim(\mathscr{F} + \mathscr{F}') = \begin{cases} \dim(F + F') & \textit{si } \mathscr{F} \cap \mathscr{F}' \neq \varnothing, \\ \dim(F + F') + 1 & \textit{si } \mathscr{F} \cap \mathscr{F}' = \varnothing. \end{cases}$$

Démonstration. — (1) Si $Q \in \mathscr{F}$ et $Q' \in \mathscr{F}'$, alors $\overrightarrow{QQ'} = \overbrace{\overrightarrow{QP}}^{\in F} + \overrightarrow{PP'} + \overbrace{\overrightarrow{P'Q'}}^{\in F'}$ et donc $F + F' + \overrightarrow{QQ'} = F + F' + \overrightarrow{PP'}$.

Prouvons (2). L'implication $\Leftarrow$ est évidente, car si $Q \in \mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$, on peut prendre $P = Q = P'$, d'où $V = F + F'$. Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}'$ avec $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{u}' \in F'$. Alors le point $Q = P + \overrightarrow{u}$ appartient à $\mathscr{F}$, et l'on a aussi

$$\overrightarrow{P'Q} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{u} - (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}') = -\overrightarrow{u}' \in F'$$

[1] Attention, cette notation n'est peut-être pas standard, peut-être les puristes s'en tiennent-ils à la notation $\mathrm{Aff}\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{F}' \rangle$...

donc $Q \in \mathscr{F}' \cap \mathscr{F}$. Ceci prouve (2).

Prouvons (3). Par définition, $\mathrm{Aff}\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{F}' \rangle = P + W$, où W est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'N}$, où M (resp. N) parcourt $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{F}'$). Donc W est le sev engendré par F, F' et $\overrightarrow{PP'}$, i.e. $W = V$. Ceci prouve (3). Enfin, (4) découle de (2), car $\dim V \leq \dim(F + F') + 1$, avec égalité si et seulement si $\overrightarrow{PP'} \notin F + F'$. □

Remarque 7.2.20. — Dans la proposition précédente, si $\dim \mathscr{F} = p$, $\dim \mathscr{F}' = r$ et si $(P, A_1, \ldots, A_p)$ et $(P', B_1, \ldots, B_r)$ sont des repères de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$, alors $\mathscr{F} + \mathscr{F}' = \mathrm{Aff}\langle P, A_1, \ldots, A_p, P', B_1, \ldots, B_r \rangle$.

Proposition 7.2.21 **(Intersection de deux sea $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$)**. — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et soient $(\mathscr{F}, F)$, $(\mathscr{F}', F')$ deux sous-espaces affines. Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ est non vide, c'est un sea de direction $F \cap F'$.*

Démonstration. — Supposons que $A \in \mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$. Alors un point arbitraire $P \in \mathscr{E}$ appartient à $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ si et seulement si $\overrightarrow{AP}$ appartient à F et à F', i.e. à $F \cap F'$. D'après la proposition 7.2.6, ceci montre que $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ est un sea de direction $F \cap F'$. □

Proposition 7.2.22 **(Applications affines et sous-espaces)**. — *Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ une application affine, notons ϕ sa partie linéaire.*

(1) *Soit $(\mathscr{F}, F)$ un sea de $\mathscr{E}$, alors $f(\mathscr{F})$ est un sea de $\mathscr{E}'$; plus précisément, si $P \in \mathscr{F}$ alors $f(\mathscr{F}) = f(P) + \phi(F)$.*

(2) *Soit $(\mathscr{F}', F')$ un sea de $\mathscr{E}'$. On a $f^{-1}(\mathscr{F}') = \varnothing$ si $f(\mathscr{E}) \cap \mathscr{F}' = \varnothing$, sinon $f^{-1}(\mathscr{F}')$ est un sea de $\mathscr{E}$ de direction $\phi^{-1}(F')$; plus précisément, si $P \in \mathscr{F}$ est tel que $f(P) \in \mathscr{F}'$ alors*

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathscr{F}') &= \{Q = P + \overrightarrow{u} \in \mathscr{E} \mid f(Q) = f(P) + \phi(\overrightarrow{u}) \in \mathscr{F}'\} \\ &= \{Q = P + \overrightarrow{u} \in \mathscr{E} \mid \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \phi(\overrightarrow{u}) \in F'\} = P + \phi^{-1}(F'). \end{aligned}$$

Démonstration. — Laissée au lecteur comme exercice. □

7.3. Projections, symétries, points fixes

Proposition 7.3.1. — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et soient $(\mathscr{F}, F)$, $(\mathscr{F}', F')$ deux sous-espaces affines tels que $F + F' = E$. Alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ est non vide et est un sous-espace affine de direction $F \cap F'$.*

Démonstration. — Ceci résulte des propositions 7.2.19 et 7.2.21. En effet, soient $P \in \mathscr{F}$ et $P' \in \mathscr{F}'$. Comme $F + F' = E$, on a nécessairement $\overrightarrow{PP'} \in F + F'$ donc, d'après la proposition 7.2.19, on a $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}' \neq \varnothing$. Donc, d'après la proposition 7.2.21, $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ est un sea de direction $F \cap F'$. □

Corollaire 7.3.2 **(Sous-espaces supplémentaires)**. — *Si $E = F \oplus F'$, i.e. si F et F' sont supplémentaires, alors pour tous sea $\mathscr{F}$ de direction F et $\mathscr{F}'$ de direction F', l'intersection $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ est un singleton $\{P\}$.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ est non vide et est un sea de direction $F \cap F' = \{0\}$, donc c'est un singleton $\{P\}$. □

Définition 7.3.3. — Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et $(\mathscr{F}, F)$ et $(\mathscr{F}', F')$ deux sea tels que $E = F \oplus F'$. D'après le corollaire précédent, $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ est un singleton $\{O\}$ et, comme $E = F \oplus F'$, on a :

$$\forall M \in \mathscr{E}, \quad \exists! (P, P') \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}' \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}.$$

On définit alors :

(1) la **projection** $\pi = \pi_{\mathscr{F},\mathscr{F}'}$ **sur** $\mathscr{F}$ **parallèlement à** $\mathscr{F}'$ par $\pi(M) = P$,

(2) la **symétrie** $s = s_{\mathscr{F},\mathscr{F}'}$ **par rapport à** $\mathscr{F}$ **parallèlement à** $\mathscr{F}'$ par $s(M) = M + 2\overrightarrow{MP} = M - 2\overrightarrow{OP'}$, i.e. $\overrightarrow{Ms(M)} = 2\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{OP'}$.

(Faire un dessin dans le plan affine $\mathscr{P}$, pour deux droites sécantes $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$, non nécessairement orthogonales, par exemple $\mathscr{F}$ d'équation $y = 1$ et $\mathscr{F}'$ d'équation $y - x = 1$.)

Si de plus $\dim \mathscr{F} = \dim \mathscr{E} - 1$ (de sorte que $\dim \mathscr{F}' = 1$, i.e. $\mathscr{F}'$ est une droite affine), on dit que $\mathscr{F}$ est un **hyperplan** affine de $\mathscr{E}$ et que $s_{\mathscr{F},\mathscr{F}'}$ est la **réflexion par rapport à l'hyperplan $\mathscr{F}$ parallèlement à la droite $\mathscr{F}'$**.

***Définition 7.3.4* (Points fixes).** — Si X est un ensemble et f une application $X \to X$, on dit que $x \in X$ est un **point fixe** de f si $f(x) = x$. On notera $\mathrm{Fix}(f)$ l'ensemble des points fixes de f ; il peut être vide.

Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une transformation affine. Si f possède un point fixe O, on a vu que, via la bijection $\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} E$, $P \mapsto \overrightarrow{OP}$, f s'identifie à sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$ (cf. point (2) du théorème 7.1.15). Donc, lorsque f possède un point fixe, l'étude de la transformation f se ramène à l'étude de l'endomorphisme $\overrightarrow{f}$ de E, et l'on peut appliquer les résultats connus sur les endomorphismes. Ceci explique l'intérêt d'étudier l'ensemble des points fixes de f. On a la proposition suivante.

***Proposition 7.3.5* (Points fixes de f).** — *Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine de dimension finie, $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine, et $\overrightarrow{f}$ sa partie linéaire.*

(1) *Si* $\mathrm{Fix}(f)$ *est non vide, c'est un sea de direction* $\mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E)$.

(2) *Si* $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E) = \{0\}$, *alors f a un point fixe unique I.*

Démonstration. — (1) Si $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$, soit $I \in \mathrm{Fix}(f)$. Alors, pour un point arbitraire $P \in \mathscr{E}$ on a :

$$P \in \mathrm{Fix}(f) \iff f(P) = P \iff \overrightarrow{IP} = \overrightarrow{If(P)} = \overrightarrow{f(I)f(P)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IP}) \iff \overrightarrow{IP} \in \mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}).$$

Ceci montre qu'alors $\mathrm{Fix}(f)$ est un sea de direction $\mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E)$.

(2) Supposons $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E) = \{0\}$ et fixons une origine $O \in \mathscr{E}$ arbitraire. Pour tout point $P \in \mathscr{E}$, on a

$$\overrightarrow{Of(P)} = \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OP})$$

et donc on a :

$$P = f(P) \iff \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{Of(P)} \iff (\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E)(\overrightarrow{OP}) = -\overrightarrow{Of(O)}.$$

Or, d'après hypothèse, $\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E$ est injective, donc **bijective** puisque E est de dimension finie. Donc il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E)(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{Of(O)}$, et il existe donc un unique point $I \in \mathscr{E}$ tel que $(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E)(\overrightarrow{OI}) = -\overrightarrow{Of(O)}$, i.e. I est l'unique point fixe de f. La proposition est démontrée. □

7.4. Espaces affines euclidiens

Définition 7.4.1. — On dit qu'un espace affine $(\mathscr{E}, E)$ est **euclidien** si E est de dimension finie et est muni d'un produit scalaire $(\mid)$. Dans ce cas, $\mathscr{E}$ est muni de la **distance euclidienne**, définie par $d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{(\overrightarrow{xy} \mid \overrightarrow{xy})}$.

C'est bien une distance, car : (a) $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (b) $d(y, x) = d(x, y)$ puisque $\|\overrightarrow{yx}\| = \| - \overrightarrow{xy}\| = |-1| \cdot \|\overrightarrow{xy}\| = \|\overrightarrow{xy}\|$, et (c) d vérifie l'inégalité triangulaire :

$$d(x, y) + d(y, z) = \|\overrightarrow{xy}\| + \|\overrightarrow{yz}\| \geq \|\overrightarrow{xz}\| = d(x, z).$$

***Définition 7.4.2* (Isométries).** — Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. Une **isométrie** de $\mathscr{E}$ est une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ qui conserve les distances, i.e. telle que :

$$\forall x, y \in \mathscr{E}, \qquad \boxed{d(f(x), f(y)) = d(x, y).}$$

On notera $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$ l'ensemble des isométries de $\mathscr{E}$.

On va voir qu'alors f est nécessairement affine et bijective. Commençons par quelques résultats préliminaires.

Lemme 7.4.3. — *Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une isométrie.*

(1) *f est injective.*

(2) *Si f est bijective, f^{-1} est une isométrie.*

(3) *Si $g : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est une seconde isométrie, $g \circ f$ est aussi une isométrie.*

Démonstration. — (1) Si $f(x) = f(y)$ alors $0 = d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ donc $x = y$. Ceci prouve que f est injective.

(2) Soient $x, y \in \mathscr{E}$, posons $x' = f^{-1}(x)$ et $y' = f^{-1}(y)$. Alors $x = f(x')$ et $y = f(y')$, d'où

$$d(x, y) = d(f(x'), f(y')) = d(x', y') = d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$$

(la seconde égalité car f est une isométrie). Ceci montre que f^{-1} est une isométrie.

(3) Pour tout $x, y \in \mathscr{E}$, on a $d(x,y) = d(f(x), f(y)) = d(g(f(x)), g(f(y)))$, donc $g \circ f$ est une isométrie. □

Proposition 7.4.4* (Isométries affines).** — *Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une transformation* **affine.*

(1) *f est une isométrie si et seulement si sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle (i.e. $\overrightarrow{f}$ préserve la norme).*

(2) *Dans ce cas, $\overrightarrow{f}$ et f sont* **bijectives***.*

(3) *En particulier, toute translation $f = t_{\overrightarrow{u}}$ est une isométrie affine de $\mathscr{E}$.*

Démonstration. — (1) Pour tout $x, y \in \mathscr{E}$, on a $d(f(x), f(y)) = \|\overrightarrow{f(x)f(y)}\| = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy})\|$ et ceci égale $d(x,y) = \|\overrightarrow{xy}\|$ si et seulement si $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy})\| = \|\overrightarrow{xy}\|$. Donc f est une isométrie si $\overrightarrow{f}$ en est une. Réciproquement, si f est une isométrie, alors $\overrightarrow{f}$ préserve la norme, car l'application $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E$, $(x,y) \mapsto \overrightarrow{xy}$ est surjective (puisque pour x fixé, $y \mapsto \overrightarrow{xy}$ est une bijection). Ceci prouve (1).

De plus, dans ce cas $\overrightarrow{f}$ est **bijective** (car injective et E de dimension finie), donc f l'est aussi, d'après le point (3) de 7.1.15. Enfin, toute translation $f = t_{\overrightarrow{u}}$ est une isométrie de $\mathscr{E}$, puisque sa partie linéaire égale id_E. La proposition est démontrée. □

Théorème 7.4.5. — *Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une isométrie. Alors f est* **affine** *et bijective.*

Avant de démontrer le théorème, énonçons tout de suite un corollaire. On note $\mathrm{O}(E)$ le groupe des isométries vectorielles de E. Rappelons que pour tout $\phi \in \mathrm{O}(E)$, on a $\mathrm{dét}(\phi) = \pm 1$, et que l'on pose $\mathrm{SO}(E) = \mathrm{O}^+(E) = \{\phi \in \mathrm{O}(E) \mid \mathrm{dét}(\phi) = 1\}$ et $\mathrm{O}^-(E) = \{\phi \in \mathrm{O}(E) \mid \mathrm{dét}(\phi) = -1\}$; de plus $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$ (appelé le groupe « spécial orthogonal » de E).

***Corollaire 7.4.6* (Les groupes $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$ et $\mathrm{Is}^+(\mathscr{E})$).** — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine euclidien. On a*

$$(*) \qquad \mathrm{Is}(\mathscr{E}) = \{f \in \mathrm{GA}(\mathscr{E}) \mid \overrightarrow{f} \in \mathrm{O}(E)\}$$

et c'est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$. De plus, $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$ est la réunion de $\mathrm{Is}^+(\mathscr{E})$ (isométries **directes***) et de $\mathrm{Is}^-(\mathscr{E})$ (isométries* **indirectes***), où $\mathrm{Is}^+(\mathscr{E})$ (resp. $\mathrm{Is}^-(\mathscr{E})$) désigne l'ensemble des $f \in \mathrm{Is}(\mathscr{E})$ tels que $\overrightarrow{f} \in O^+(E)$ (resp. $\overrightarrow{f} \in O^-(E)$). Enfin, $\mathrm{Is}^+(\mathscr{E})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$.*

Terminologie 7.4.7. — Les isométries directes sont aussi appelées « **déplacements** », et les indirectes « **antidéplacements** ».

Démonstration du corollaire. — D'après le théorème, toute isométrie de $\mathscr{E}$ est affine et bijective, donc appartient à $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$, et d'après la proposition 7.4.4, un élément f de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ appartient à $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$ si et seulement si $\overrightarrow{f} \in O(E)$. Ceci prouve l'égalité $(*)$.

Le fait que $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$ soit un groupe découle du lemme 7.4.3. Enfin, la décomposition $\mathrm{Is}(\mathscr{E}) = \mathrm{Is}^+(\mathscr{E}) \cup \mathrm{Is}^-(\mathscr{E})$ et le fait que $\mathrm{Is}^+(\mathscr{E})$ soit un groupe, découlent des propriétés analogues de $\mathrm{O}(E)$. □

Démonstration du théorème. — Il suffit de montrer que f est **affine**, elle sera alors **bijective** d'après la proposition 7.4.4. Fixons une origine arbitraire $O \in \mathscr{E}$ et posons $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{f(O)O}$. Alors $\phi = t_{\overrightarrow{w}} \circ f$ est une isométrie, vérifiant $\phi(O) = O$. Il suffit de montrer que ϕ est affine, car alors $f = t_{-\overrightarrow{w}} \circ \phi$ le sera aussi. Comme $\phi(O) = O$, pour montrer que ϕ est affine, il suffit de montrer que l'application $\psi : E \to E$ définie par

$$\forall P \in \mathscr{E}, \qquad \psi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O\phi(P)} \qquad \text{i.e.} \qquad \forall \overrightarrow{u} \in E, \qquad O + \psi(\overrightarrow{u}) = \phi(O + \overrightarrow{u})$$

est **linéaire**.

Soit $\overrightarrow{u} \in E$, posons $P = O + \overrightarrow{u}$ et $P' = \phi(P)$, alors $\psi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{OP'}$ et donc :

$$\|\psi(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{OP'}\| = d(O, P') \underbrace{=}_{(*)} d(O, P) = \|\overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{u}\|$$

(l'égalité $(*)$ car ϕ est une isométrie). Ceci prouve déjà que ψ préserve la norme, montrons de plus que ψ préserve le produit scalaire. Considérons un second vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ et posons $Q = O + \overrightarrow{v}$ et $Q' = \phi(Q)$. Alors l'on a :

$$\text{d'une part,} \qquad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$$

$$\text{d'autre part,} \qquad \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'} = \psi(\overrightarrow{v}) - \psi(\overrightarrow{u})$$

et

$$\|\psi(\overrightarrow{v}) - \psi(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{P'Q'}\| = d(\phi(P), \phi(Q)) = d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|.$$

Élevant cette égalité au carré, on obtient :

$$\|\psi(\overrightarrow{v})\|^2 + \|\psi(\overrightarrow{u})\|^2 - 2(\psi(\overrightarrow{v}) \mid \psi(\overrightarrow{u})) = \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2(\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u})$$

et comme $\|\psi(\overrightarrow{v})\| = \|\overrightarrow{v}\|$ et $\|\psi(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{u}\|$, ceci donne :

$$(\psi(\overrightarrow{v}) \mid \psi(\overrightarrow{u})) = (\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u})$$

donc ψ préserve le produit scalaire.

On peut maintenant montrer que ψ est linéaire. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, alors $\psi(\mathscr{B}) = (\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))$ est une famille orthonormée, donc libre, de cardinal n, donc c'est une base orthonormée de E. Soit $\overrightarrow{u} \in E$ arbitraire, on peut écrire de façon unique

$$\overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \qquad \psi(\overrightarrow{u}) = \sum_{j=1}^{n} y_j \psi(e_j)$$

mais alors, pour tout i on a $y_i = (\psi(e_i) \mid \psi(\overrightarrow{u})) = (e_i \mid \overrightarrow{u}) = x_i$ et donc :

$$\forall \overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \qquad \psi(\overrightarrow{u}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \psi(e_j).$$

Ceci montre que ψ est linéaire. Ceci achève la preuve du théorème 7.4.5. □

On sait donc maintenant que toute isométrie de $\mathscr{E}$ euclidien est nécessairement affine. Dans la suite, on écrira souvent : « Soit f une isométrie affine » (au lieu de simplement « isométrie ») pour insister sur le fait que f est affine (et, si l'on n'a pas vu le théorème 7.4.5, on prend comme hypothèse que f est une isométrie affine...). On veut maintenant établir que toute isométrie affine f s'écrit de façon unique $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ \phi$, où ϕ est une isométrie (affine) ayant un point fixe, et ϕ et $t_{\overrightarrow{u}}$ commutent : $\phi \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ \phi$. Commençons par le :

Lemme 7.4.8. — *Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une transformation affine, et $\overrightarrow{u} \in E$. Alors $f \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ f$ si et seulement si $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ (i.e. $\overrightarrow{u}$ est un point fixe de $\overrightarrow{f}$).*

Démonstration. — Pour tout point $O \in \mathscr{E}$, on a :

$$(f \circ t_{\overrightarrow{u}})(O) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}), \qquad (t_{\overrightarrow{u}} \circ f)(O) = f(O) + \overrightarrow{u}$$

et ces deux expressions coïncident si et seulement si $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$. □

Théorème 7.4.9 **(Décomposition canonique d'une isométrie affine)**

Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine euclidien, f une isométrie affine de $\mathscr{E}$, $\overrightarrow{f}$ sa partie linéaire, $F = \mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E)$. *Alors :*

(1) *Il existe un unique sea $\mathscr{F}$ de direction F stable par f. La restriction $f_{|\mathscr{F}}$ de f à $\mathscr{F}$ est une translation $t_{\overrightarrow{u}}$, pour un certain $\overrightarrow{u} \in F$.*

(2) *$g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$ vérifie* $\mathrm{Fix}(g) = \mathscr{F}$, *et l'on a $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{u}}$.*

(3) *L'écriture précédente est unique : si $f = t_{\overrightarrow{u'}} \circ g'$, avec $\overrightarrow{u'} \in F$ et g' ayant un point fixe, alors $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{u}$ et $g' = g$.*

Par conséquent : **toute isométrie affine f s'écrit de façon unique comme produit d'une isométrie ayant un point fixe et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Fix}(\overrightarrow{f})$.**

Démonstration. — Posons $G = F^{\perp}$, il est stable par $\overrightarrow{f}$. En effet, soit $x \in G$, pour tout $y \in F$, on a $y = \overrightarrow{f}(y)$ et donc :

$$(\overrightarrow{f}(x) \mid y) = (\overrightarrow{f}(x) \mid \overrightarrow{f}(y)) = (x \mid y) = 0$$

ce qui prouve que $\overrightarrow{f}(x) \in G$. Choisissons un sea $\mathscr{G}$ de direction G, et un point $O \in \mathscr{G}$. Comme $E = F \oplus G$, on peut écrire de façon unique

$$\overrightarrow{Of(O)} = u + v, \qquad \text{avec} \quad u \in F,\ v \in G.$$

Posons $g = t_{-u} \circ f$. Alors $g(O) = O + v \in \mathscr{G}$, et comme $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$ envoie G dans G, alors pour tout $P \in \mathscr{G}$ on a :

$$\overrightarrow{g}(\overrightarrow{OP}) \in G \qquad \text{donc} \qquad g(P) = g(O) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{OP}) \in \mathscr{G},$$

d'où $g(\mathscr{G}) \subseteq \mathscr{G}$. Notons alors h la restriction $g_{|\mathscr{G}}$, sa partie linéaire $\overrightarrow{h}$ est la restriction à G de $\overrightarrow{f}$, d'où

$$\{w \in G \mid \overrightarrow{h}(w) = w\} = G \cap \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E) = G \cap F = \{0\}$$

(la dernière égalité puisque $G = F^\perp$). Donc $\mathrm{Fix}(\overrightarrow{h}) = \{0\}$ et donc, d'après la proposition 7.3.5, h admet un unique point fixe I_0, i.e. I_0 est l'unique point fixe de g dans $\mathscr{G}$.

Posons maintenant $\mathscr{F} = I_0 + F$. Alors, $f(I_0) = (t_{\overrightarrow{u}} \circ g)(I_0) = I_0 + \overrightarrow{u}$ et pour tout $P \in \mathscr{F}$, on a $\overrightarrow{I_0P} \in F = \mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = \mathrm{Fix}(\overrightarrow{g})$ et donc :

$$\forall P \in \mathscr{F}, \qquad g(P) = P \quad \text{et} \quad f(P) = P + \overrightarrow{u}.$$

Donc $\mathscr{F} \subseteq \mathrm{Fix}(g)$. Réciproquement, si $Q \in \mathrm{Fix}(g)$, alors $\overrightarrow{I_0Q} = \overrightarrow{g(I_0)g(Q)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{I_0Q})$, donc $\overrightarrow{I_0Q} \in \mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = F$ et $Q \in \mathscr{F}$. Ceci montre que $\mathrm{Fix}(g) = \mathscr{F}$, et comme $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{u}}$, on a obtenu l'existence de $\mathscr{F}, \overrightarrow{u}, g$ vérifiant les conditions (1) et (2) du théorème.

Démontrons maintenant l'unicité. Soit $\mathscr{F}'$ un sea de $\mathscr{E}$ de direction F, stable par f. Il est alors stable par $g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$. D'autre part, on a vu plus haut que $g(\mathscr{G}) \subseteq \mathscr{G}$; de plus $\mathscr{F}' \cap \mathscr{G}$ est un singleton $\{J\}$, puisque $F \oplus G = E$ (cf. 7.3.2). Donc $g(J) = J$, or I_0 est l'unique point fixe de g dans $\mathscr{G}$, d'où $J = I_0$ et donc $\mathscr{F}' = I_0 + F$ égale $\mathscr{F}$. Ceci prouve l'unicité de $\mathscr{F}$.

Enfin, supposons que $f = t_{\overrightarrow{u}'} \circ g'$, avec $\overrightarrow{u}' \in F$ et g' ayant un point fixe A. Alors $f(A) = (t_{\overrightarrow{u}'} \circ g')(A) = A + \overrightarrow{u}'$ et donc pour tout $\overrightarrow{w} \in F$, on a :

$$f(A + \overrightarrow{w}) = f(A) + \overrightarrow{w} = A + \overrightarrow{u}' + \overrightarrow{w} = A + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}' \in A + F = \mathscr{F}'.$$

Ceci montre que $\mathscr{F}'$ est stable par f et que la restriction de f à $\mathscr{F}'$ est la translation $t_{\overrightarrow{u}'}$. Or, d'après ce qui précède, on a $\mathscr{F}' = \mathscr{F}$ et donc $\overrightarrow{u}' = \overrightarrow{u}$, puis $g' = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f = g$. Le théorème est démontré. □

***Définition 7.4.10* (Repères orthonormés).** — Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine euclidien. Un repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ de $\mathscr{E}$ est dit **orthonormé** si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E.

7.4.11. Classification des isométries affines du plan. — Soit $(\mathscr{P}, E)$ un plan affine euclidien, on oriente E en choisissant une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$. En utilisant le théorème précédent, on va déterminer toutes les isométries affines f de $\mathscr{P}$. On rappelle que si f admet un point fixe O, alors via la bijection $\mathscr{P} \xrightarrow{\sim} E$, $P \mapsto \overrightarrow{OP}$, f s'identifie à sa partie vectorielle $\overrightarrow{f}$, cf. le point (2) du théorème 7.1.15 et la discussion précédant 7.3.5.

Soit d'abord $f \in \mathrm{Is}^+(\mathscr{P})$, alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\overrightarrow{f}$ soit la rotation vectorielle d'angle θ, i.e.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$, i.e. si $\theta = 0$, alors f est une **translation** $t_{\overrightarrow{u}}$, avec $\overrightarrow{u} \in E$. Sinon, si $\theta \in]0, 2\pi[$, alors $\mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = \{0\}$ donc f admet un point fixe I unique, alors f est la **rotation de centre I et d'angle θ**.

Soit maintenant $f \in \mathrm{Is}^-(\mathscr{P})$, alors $\overrightarrow{f}$ est la symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle D. Si f possède un point fixe I, soit $\mathscr{D}$ la droite affine $I + D$, alors f est la symétrie orthogonale $\sigma_{\mathscr{D}}$ par rapport à $\mathscr{D}$. Si f ne possède pas de point fixe alors, d'après le théorème précédent, il existe une unique droite affine $\mathscr{D}$ de direction D stable par f, et pour tout $I \in \mathscr{D}$ on a $f(I) = I + \overrightarrow{u}$ pour un certain $\overrightarrow{u} \in D$, $\overrightarrow{u} \neq 0$. Alors $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ \sigma_{\mathscr{D}} = \sigma_{\mathscr{D}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$, et l'on dit que f est la **symétrie** (orthogonale) **glissée** par rapport à $\mathscr{D}$, de vecteur $\overrightarrow{u}$: pour tout point $M \in \mathscr{P}$, son image $M' = f(M)$ s'obtient en effectuant la symétrie $M \mapsto \sigma_{\mathscr{D}}(M)$, puis en faisant un « glissement » de vecteur $\overrightarrow{u}$ (dans la direction de la droite $\mathscr{D}$), ou bien en faisant d'abord le « glissement » $M \mapsto M + \overrightarrow{u}$, puis en prenant le symétrique $\sigma_{\mathscr{D}}(M + \overrightarrow{u})$.

On peut résumer la classification par le tableau suivant :

Isométries f de $\mathscr{P}$	directes	indirectes
$\mathrm{Fix}(f) = \mathscr{P}$	$\mathrm{id}_{\mathscr{P}}$	
$\mathrm{Fix}(f) =$ droite $\mathscr{D}$		symétrie orthogonale $\sigma_{\mathscr{D}}$
$\mathrm{Fix}(f) =$ point I	rotations de centre I et d'angle $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$	
$\mathrm{Fix}(f) = \varnothing$	translations	symétries orthogonales glissées

7.4.12. Classification des isométries affines de l'espace. — Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine euclidien de dimension 3, on oriente E en choisissant une base orthonormée $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. En utilisant le théorème 7.4.9 et la classification des isométries vectorielles de E (cf. 6.4.18), on va déterminer toutes les isométries affines f de $\mathscr{E}$.

1er cas. Soit d'abord $f \in \mathrm{Is}^+(\mathscr{E})$. Si $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$, alors f est une **translation** $t_{\overrightarrow{u}}$, avec $\overrightarrow{u} \in E$. Sinon, $\overrightarrow{f}$ est une rotation : $\mathrm{Fix}(f)$ est une droite vectorielle D, choisissons un vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ de D, alors il existe un unique $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $\overrightarrow{f}$ soit la **rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{w}$ et d'angle** θ, c.-à-d., pour toute base orthonormée $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ du plan $D^\perp$ telle que la base $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{w})$ soit directe (i.e. telle que $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{w}) > 0$), on a :

$$\mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{w})}(\overrightarrow{f}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si f a un point fixe I, soit $\mathscr{D}$ la droite affine $I + D$, alors f est la **rotation d'axe $\mathscr{D}$ orienté par $\overrightarrow{w}$ et d'angle** θ (et l'on a $\mathrm{Fix}(f) = \mathscr{D}$).

Si f n'a pas de point fixe alors, d'après le théorème 7.4.9, il existe une unique droite affine $\mathscr{D}$ de direction D stable par f, et pour tout $I \in \mathscr{D}$ on a $f(I) = I + \overrightarrow{u}$ pour un certain $\overrightarrow{u} \in D$, $\overrightarrow{u} \neq 0$. On peut alors prendre $\overrightarrow{u}$ comme vecteur directeur de D, alors $\overrightarrow{f}$ est la rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{u}$ et d'angle θ', où $\theta' = \theta$ si $\overrightarrow{u}$ et le vecteur $\overrightarrow{w}$ précédent sont « de même sens », i.e. si $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{w}$ avec $\lambda > 0$, et $\theta' = -\theta$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont « de sens opposé », i.e. si $\overrightarrow{u} = -\lambda \overrightarrow{w}$ avec $\lambda > 0$. On dit alors que f est le **vissage de vecteur $\overrightarrow{u}$, d'axe $\mathscr{D}$ orienté par $\overrightarrow{u}$, et d'angle** θ'.

2ème cas. Soit maintenant $f \in \mathrm{Is}^-(\mathscr{E})$, alors $\overrightarrow{f}$ est de l'un des types suivants :

(1) $\overrightarrow{f} = -\mathrm{id}_E$,

(2) $\overrightarrow{f}$ est une **rotation gauche**, c.-à-d., $D = \{\overrightarrow{v} \in E \mid \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}\}$ est une droite vectorielle, et la restriction de $\overrightarrow{f}$ au plan $D^\perp$ est une rotation distincte de l'identité.

(3) $\overrightarrow{f}$ est la **symétrie orthogonale** σ_P par rapport à un plan P.

Dans les cas (1) et (2), $\mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = \{0\}$ donc f a un point fixe I unique ; dans le cas (1), f est la **symétrie centrale** σ_I de centre I, dans le cas (2), f est une **rotation gauche d'axe** $\mathscr{D} = I + D$.

Supposons que $\overrightarrow{f} = \sigma_P$. Si f a un point fixe I, alors $\mathrm{Fix}(f)$ est le plan $\mathscr{P} = I + P$ et f est la **symétrie orthogonale $\sigma_{\mathscr{P}}$ par rapport à $\mathscr{P}$**. Enfin, si f n'a pas de point fixe alors, d'après le théorème 7.4.9, il existe un unique plan affine $\mathscr{P}$ de direction P stable par f, et pour tout $I \in \mathscr{P}$ on a $f(I) = I + \overrightarrow{u}$ pour un certain $\overrightarrow{u} \in P$, $\overrightarrow{u} \neq 0$. Alors $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ \sigma_{\mathscr{P}} = \sigma_{\mathscr{P}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$, et l'on dit que f est la **symétrie** (orthogonale) **glissée** par rapport à $\mathscr{P}$, de vecteur $\overrightarrow{u}$.

On peut résumer la classification par le tableau suivant :

Isométries f de $\mathscr{E}$ ($\dim \mathscr{E} = 3$)	directes	indirectes
$\mathrm{Fix}(f) = \mathscr{E}$	$\mathrm{id}_{\mathscr{E}}$	
$\mathrm{Fix}(f) =$ plan $\mathscr{P}$		symétrie orthogonale $\sigma_{\mathscr{P}}$
$\mathrm{Fix}(f) =$ droite $\mathscr{D}$	rotations d'axe $\mathscr{D}$ et d'angle $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$	
$\mathrm{Fix}(f) =$ point		symétries centrales et rotations gauches d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$
$\mathrm{Fix}(f) = \varnothing$	translations ($\mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = E$) vissages ($\dim \mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = 1$)	symétries orthogonales glissées

7.5. Coniques

On se place dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$. Si $M, N \in \mathscr{P}$, on notera MN la longueur du segment $[M, N]$, i.e. la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{MN}$.

***Lemme 7.5.1* (Distance d'un point à une droite).** — *Soient $\mathscr{D}$ une droite affine, $M \in \mathscr{P}$ et H la projection orthogonale de M sur $\mathscr{D}$. Pour tout $P \in \mathscr{D}$, on a $MH \leq MP$, avec égalité si et seulement si $P = H$. Donc MH est la distance minimale de M à un point de $\mathscr{D}$, et l'on pose $MH = d(M, \mathscr{D})$.*

Démonstration. — Soit $P \in \mathscr{P}$, on a $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP}$ et les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{HP}$ sont orthogonaux, donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$$MP^2 = \|\overrightarrow{MP}\|^2 = \|\overrightarrow{MH}\|^2 + \|\overrightarrow{HP}\|^2 = MH^2 + HP^2 \geq MH^2,$$

avec égalité si et seulement si $P = H$. □

***Définition 7.5.2* (Définition des coniques par foyer et directrice)**
Soient $\mathscr{D}$ une droite affine, F un point de $\mathscr{P}$ n'appartenant pas à $\mathscr{D}$, et e un réel strictement positif. La **conique** $\mathscr{C}$ de **directrice** $\mathscr{D}$, de **foyer** F et d'**excentricité** e est :

$$\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{P} \mid FM = e \cdot d(M, \mathscr{D})\}.$$

Notons K la projection orthogonale de F sur $\mathscr{D}$ et $h = KF$. Soit Δ la droite (KF), i.e. la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par F. Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, telle que $\overrightarrow{FK} = -h\,\overrightarrow{i}$, i.e. dans le repère $\mathscr{R} = (F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, K a pour coordonnées $(-h, 0)$. Enfin, on note σ_Δ la symétrie orthogonale par rapport à Δ.

Soit $M(x, y)$ un point arbitraire de $\mathscr{P}$, de coordonnées (x, y) dans $\mathscr{R}$; sa projection orthogonale sur $\mathscr{D}$ est le point $H(-h, y)$, donc $d(M, \mathscr{D}) = |x + h|$ et M appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si

$$x^2 + y^2 = e^2(x+h)^2 \qquad \text{i.e.} \qquad y^2 + (1-e^2)x^2 - 2e^2hx - e^2h^2 = 0.$$

Notons que l'équation ci-dessus est inchangée si l'on change y en $-y$, par conséquent

$$M(x, y) \in \mathscr{C} \Longleftrightarrow M(x, -y) \in \mathscr{C}$$

donc $\sigma_\Delta(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$, i.e. Δ est un **axe de symétrie** de $\mathscr{C}$.

On pose $p = eh > 0$ et on l'appelle le **paramètre** de la conique $\mathscr{C}$. Tous les points M de la droite d'équation $x = 0$ (la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par F) vérifient $d(M, \mathscr{D}) = h$, donc les points d'intersection de cette droite avec $\mathscr{C}$ sont les deux points de coordonnées $(0, p)$ et $(0, -p)$. D'autre part, les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite Δ (d'équation $y = 0$) sont les points $(\lambda, 0)$, où λ est solution de l'équation :

$$(1-e^2)\lambda^2 - 2ep\lambda - p^2 = 0. \tag{†}$$

7.5.3. Paraboles. — Supposons d'abord $e = 1$. Dans ce cas, on trouve $\lambda = -p/2$ et l'équation de $\mathscr{C}$ est

$$y^2 = 2px + p^2 = 2p\Big(x + \frac{p}{2}\Big)$$

Soit alors O le point de coordonnées $(-p/2, 0)$ dans le repère $(F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, c'est le milieu du segment $[KF]$. Les nouvelles coordonnées dans le repère $\mathscr{R}_0 = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont $X = x + (p/2)$ et $Y = y$, donc l'équation de $\mathscr{C}$ devient :

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y) \in \mathscr{P} \mid Y^2 = 2pX\}$$

et l'on dit que $\mathscr{C}$ est une **parabole** de paramètre p. Dans $\mathscr{R}_0$, la directrice $\mathscr{D}$ a pour équation $X = -p/2$ et le foyer F a pour coordonnées $(p/2, 0)$.

Supposons maintenant $e \neq 1$. Alors le discriminant réduit du trinôme (†) est $e^2p^2 + (1-e^2)p^2 = p^2$ donc les solutions sont :

$$\lambda_1 = \frac{ep - p}{1 - e^2} = \frac{-p}{1+e}, \qquad \lambda_2 = \frac{ep + p}{1 - e^2} = \frac{p}{1-e} \qquad \text{et l'on a} \qquad \left|\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right| = \frac{p}{|1-e^2|}.$$

Notons A_1, A_2 les points correspondants de $\Delta \cap \mathscr{C}$, et O leur milieu. L'abscisse x_O de O dans le repère $(F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est $x_O = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \dfrac{ep}{1-e^2}$ et le trinôme s'écrit :

$$(1-e^2)(x - x_O)^2 - \frac{e^2p^2}{1-e^2} - p^2 = (1-e^2)(x - x_O)^2 - \frac{p^2}{1-e^2}.$$

Notons $X = x - x_O$ et $Y = y$ les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}_0 = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, alors l'équation de $\mathscr{C}$ devient

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y) \mid (1-e^2)X^2 + Y^2 = \frac{p^2}{1-e^2}\}.$$

L'équation est inchangée si l'on change X en $-X$ et l'on voit donc que la droite D_0 d'équation $X = 0$ est un second **axe de symétrie** de $\mathscr{C}$ (et donc le point O est un **centre de symétrie** de $\mathscr{C}$). Par conséquent,

$\mathscr{C}$ possède un second couple (foyer, directrice) $(F', \mathscr{D}')$, symétrique de $(F, \mathscr{D})$ par rapport à la droite D_0. On dit alors que la droite Δ, qui contient les foyers, est l'**axe focal**.

D'autre part, les points $A_1, A_2 \in \Delta$ s'appellent les **sommets** de la conique ; dans $\mathscr{R}_0$ ils ont pour abscisse :

$$\pm a, \qquad \text{où} \qquad a = \left|\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right| = \frac{p}{|1-e^2|}.$$

Posons également $b = \dfrac{p}{\sqrt{|1-e^2|}}$, d'où $b^2 = \dfrac{p^2}{|1-e^2|} = \varepsilon\dfrac{p^2}{1-e^2}$, où $\varepsilon =$ signe de $1-e^2$. Alors l'équation de $\mathscr{C}$ se récrit :

$$\mathscr{C} = \{M(X,Y) \mid \frac{X^2}{a^2} + \varepsilon\frac{Y^2}{b^2} = 1\}.$$

Distinguons maintenant les cas $0 < e < 1$ et $1 < e$.

7.5.4. Ellipses. — Supposons maintenant $0 < e < 1$. Dans ce cas, $\varepsilon = 1$, l'équation de $\mathscr{C}$ est :

$$(*) \qquad \mathscr{C} = \{M(X,Y) \mid \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1\}$$

et $\mathscr{C}$ est une **ellipse**. Dans le repère $\mathscr{R} = (F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $K = \Delta \cap \mathscr{D}$ est d'abscisse $-h$, le sommet $A = A_1$ est d'abscisse $-p/(1+e) = -h/(e^{-1}+1)$ donc est compris entre K et F, de plus $AF = e \cdot AK < AK$, donc A est plus près de F que de K. Le centre de symétrie O est d'abscisse $ep/(1-e^2) > 0$, et enfin $F', A' = A_2$ et K' sont symétriques de F, A, K par rapport à O. Ces points sont donc positionnés comme suit :

points	K	A	F	O	F'	A'	K'
abscisses dans $\mathscr{R}$	$-h$	$\dfrac{-h}{1+e^{-1}}$	0	$\dfrac{ep}{1-e^2}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
abscisses dans $\mathscr{R}_0$	$-h-c$	$-a$	$-c$	0	c	a	$h+c$

où $a = \dfrac{p}{1-e^2}$ et $c = \dfrac{ep}{1-e^2} = ea$ d'où $e = c/a$. Comme $b^2 = \dfrac{p^2}{1-e^2}$, on a $c^2 = \dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2} = a^2 - b^2$, d'une part, et $p = b^2/a$, d'autre part. Enfin, $p = eh$ donne $h = p/e = b^2/c$, d'où :

$$c = \sqrt{a^2-b^2}, \qquad e = \frac{c}{a}, \qquad h = \frac{b^2}{c}, \qquad p = \frac{b^2}{a}, \qquad KO = h + c = \frac{b^2+c^2}{c} = \frac{a^2}{c}.$$

(Le lecteur est invité à faire la construction pour $a = 5$, $b = 4$ (et/ou $a = 5$, $b = 3$) et à dessiner approximativement les ellipses correspondantes.)

Dans l'équation $(*)$ de l'ellipse, on peut faire $b = a$, on obtient alors le **cercle** de centre $F = O$ et de rayon a. Remarquons que $b^2 = (1-e^2)a^2$ et $c = \sqrt{a^2-b^2} = ea$, d'où

$$h = \frac{b^2}{c} = \frac{1-e^2}{e}\,a.$$

Donc, en gardant F et a fixés, on obtient le cercle précédent en faisant tendre e vers 0, et dans ce cas la directrice $\mathscr{D}$, qui est la droite d'équation $x = -\dfrac{1-e^2}{e}\,a$ dans le repère $\mathscr{R}$, « tend vers l'infini ». On verra plus bas que si on prend la définition « bifocale » de l'ellipse, alors le cas du cercle apparaît de façon naturelle, comme le cas où les deux foyers sont égaux.

7.5.5. Hyperboles. — Supposons enfin $e > 1$. Dans ce cas, $\varepsilon = -1$, l'équation de $\mathscr{C}$ est :

$$\mathscr{C} = \{M(X,Y) \mid \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1\}$$

et $\mathscr{C}$ est une **hyperbole**. Elle admet pour asymptotes les droites $Y = \dfrac{b}{a}X$ et $Y = -\dfrac{b}{a}X$.

Dans le repère $\mathscr{R} = (F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $K = \Delta \cap \mathscr{D}$ est d'abscisse $-h$, le sommet $A = A_1$ est d'abscisse $-p/(1+e) = -h/(e^{-1}+1)$ donc est compris entre K et F, de plus $AF = e \cdot AK > AK$, donc ici A est plus près de K que de F.

Le centre de symétrie O est d'abscisse $\dfrac{ep}{1-e^2} = \dfrac{e^2h}{1-e^2} = -h - \dfrac{h}{e^2-1} < -h$, et enfin $F', A' = A_2$ et K' sont symétriques de F, A, K par rapport à O. Ces points sont donc positionnés comme suit :

points	F'	A'	K'	O	K	A	F
abscisses dans $\mathscr{R}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\dfrac{ep}{1-e^2}$	$-h$	$\dfrac{-h}{1+e^{-1}}$	0
abscisses dans $\mathscr{R}_0$	$-c$	$-a$	$-(c-h)$	0	$c-h$	a	c

où $a = \dfrac{p}{e^2-1}$ et $c = \dfrac{ep}{e^2-1} = ea$ d'où $e = c/a$. Comme $b^2 = \dfrac{p^2}{e^2-1}$, on a $c^2 = \dfrac{e^2p^2}{(e^2-1)^2} = a^2+b^2$, d'une part, et $p = b^2/a$, d'autre part. Enfin, $p = eh$ donne $h = p/e = b^2/c$, d'où :

$$c = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad e = \frac{c}{a}, \qquad h = \frac{b^2}{c}, \qquad p = \frac{b^2}{a}, \qquad OK = c-h = \frac{c^2-b^2}{c} = \frac{a^2}{c}.$$

(Le lecteur est invité à construire ces points, ainsi que les asymptotes, pour $a = 5$, $b = 4$ (et/ou $a = 5$, $b = 3$) et à dessiner approximativement les hyperboles correspondantes.)

***Proposition 7.5.6* (Définition bifocale de l'ellipse).** — *Soient F, F' deux points de $\mathscr{P}$ et O leur milieu. Soit $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé de $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{OF'} = c\,\overrightarrow{i}$ avec $c = \dfrac{1}{2}FF' \geq 0$ (et donc $\overrightarrow{OF} = -c\,\overrightarrow{i}$). Notons (x, y) les coordonnées dans ce repère. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a > c$ et $b^2 = a^2 - c^2$. Alors l'ensemble*

$$\mathscr{C} = \{M(x,y) \in \mathscr{P} \mid FM + F'M = 2a\}$$

est l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ si $F \neq F'$, et c'est le cercle de centre F et de rayon a si $F' = F$.

Démonstration. — Comme $2a > 0$, l'égalité $FM + F'M = 2a$ équivaut (en l'élevant au carré) à :

$$(0) \qquad 2(x^2+y^2+c^2) + 2\sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)} = 4a^2$$

qui équivaut à :

$$x^2+y^2+c^2-2a^2 = -\sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)}.$$

Ceci équivaut à :

$$(1) \qquad x^2+y^2 \leq 2a^2-c^2 = a^2+b^2 \qquad \text{et}$$

$$(2) \qquad (\underbrace{x^2+y^2+c^2-2a^2}_{\beta})^2 = ((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2) = (\underbrace{x^2+c^2+y^2}_{\alpha})^2 - 4c^2x^2,$$

puis (2) équivaut à :

$$4c^2x^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 2a^2 \cdot 2(x^2+y^2+c^2-a^2)$$

qui équivaut à

$$(3) \qquad (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \qquad \text{soit} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Donc (0) équivaut à :

$$(\dagger) \qquad x^2+y^2 \leq a^2+b^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mais $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \geq \dfrac{x^2}{a^2+b^2} + \dfrac{y^2}{a^2+b^2}$, donc si (3) est satisfaite, on a automatiquement $x^2+y^2 \leq a^2+b^2$. Par conséquent, (0) et (†) sont équivalents à la seule condition :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ceci prouve la proposition. □

***Proposition 7.5.7* (Définition bifocale de l'hyperbole).** — *Soient (x, y) les coordonnées dans un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de $\mathscr{P}$, soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\mathscr{C}$ l'hyperbole d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Ses foyers F et F' ont pour coordonnées $(-c, 0)$ et $(c, 0)$, où $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Alors

$$\mathscr{C} = \{M(x,y) \in \mathscr{P} \mid |FM - F'M| = 2a\}$$

et, plus précisément, la branche de l'hyperbole la plus proche de F (resp. F') est formée des points M tels que $F'M - FM = 2a$ (resp. $= -2a$).

La démonstration est laissée comme exercice pour le lecteur.

Soit maintenant $\mathscr{R}_0 = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère **orthonormé** de $\mathscr{P}$. Notons (x, y) les coordonnées dans ce repère, et étudions la nature géométrique de l'ensemble

$$\mathscr{C} = \{M(x,y) \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}$$

où a, b, c, d, e, f sont des réels fixés, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. En d'autres termes, soit ϕ la forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est :

$$S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad \text{i.e.} \qquad \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = axx' + b(xy' + yx') + cyy'$$

et soit Q la forme quadratique associée, i.e. $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Soit L la forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$L(\overrightarrow{u}) = 2d, \quad L(\overrightarrow{v}) = 2e, \qquad \text{d'où} \qquad L(x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}) = 2dx + 2ey.$$

Enfin, soit $h : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(M) = Q(x, y) + L(x, y) + f$ si $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$. On s'intéresse donc à l'ensemble

$$\mathscr{C} = \{M(x, y) \mid h(x, y) = 0\}.$$

Par hypothèse, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ i.e. la forme quadratique Q est non nulle, i.e. la matrice S est non nulle. Donc S est de rang 1 ou 2, selon que son déterminant $\delta = ac - b^2$ est nul ou non. On a le :

Théorème 7.5.8. — *Soit $\mathscr{R}_0 = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère orthonormé de $\mathscr{P}$, soient (x, y) les coordonnées correspondantes, soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et soit*

$$\mathscr{C} = \{M(x, y) \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}.$$

On suppose $\mathscr{C} \neq \varnothing$. Alors :

(1) *Si $\delta = 0$, $\mathscr{C}$ est une parabole ou bien la réunion de deux droites parallèles ou « confondues » (i.e. égales).*

(2) *Si $\delta = ac - b^2 > 0$, $\mathscr{C}$ est une ellipse ou un point.*

(3) *Si $\delta < 0$, $\mathscr{C}$ est une hyperbole ou bien la réunion de deux droites sécantes.*

Afin de démontrer ceci, rappelons d'abord les points suivants. Soit E muni de $(\ \mid\ )$ un espace euclidien, Q une forme quadratique arbitraire sur E, ϕ sa forme polaire, $\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\phi)$, et u l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u) = A$, i.e. $u(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$ pour tout j. Alors, pour tout i, j on a :

$$(e_i \mid u(e_j)) = a_{ij} = \phi(e_i, e_j) = a_{ji} = (u(e_i) \mid e_j)$$

donc, par bilinéarité, on a

$$\forall x, y \in E, \qquad \phi(x, y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)).$$

Par conséquent, si l'on montre qu'il existe une base $\mathscr{B} = (f_1, \ldots, f_n)$ **orthonormée** pour $(\ \mid\ )$ et formée de vecteurs propres de u, i.e. $u(f_i) = \lambda_i f_i$, on aura pour tout i, j :

$$\phi(f_i, f_j) = \lambda_i (f_i \mid f_j) = \lambda_j (f_i \mid f_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \lambda_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

donc $\mathscr{B}$ sera aussi une base **orthogonale** pour ϕ. Donc, si l'on note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées dans $\mathscr{B}$ d'un vecteur x arbitraire, la base $\mathscr{B}$ **réduit simultanément** la forme $x \mapsto (x \mid x)$ à la forme standard $x_1^2 + \cdots + x_n^2$, et la forme Q en la somme de carrés $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$; pour cette raison, le théorème ci-dessous (cf. 6.2.9) est appelé « théorème de **réduction simultanée** » ou « de **diagonalisation simultanée** ».

***Théorème 7.5.9* (Réduction simultanée).** — *Soient E muni de $(\ \mid\ )$ un espace euclidien, Q une forme quadratique arbitraire sur E, ϕ sa forme polaire, $\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, et u l'endomorphisme de E tel que* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\phi) = A$.

Alors il existe une base $\mathscr{B} = (f_1, \dots, f_n)$ **orthonormée** *pour $(\ |\ )$ et formée de vecteurs propres de u, i.e. $u(f_i) = \lambda_i f_i$, et l'on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u ; plus précisément, la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$ est orthogonale, i.e. ${}^tP = P^{-1}$, donc la matrice ci-dessus égale à la fois ${}^tPAP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ et $P^{-1}AP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Démontrons maintenant le théorème 7.5.8. D'après le théorème 7.5.9, il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ de $\mathbb{R}^2$ telle que, notant (X, Y) les coordonnées dans le repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$, on ait

$$Q(X, Y) = \lambda X^2 + \mu Y^2, \qquad \text{avec } \lambda\mu = \text{dét}\, S = ac - b^2 = \delta.$$

D'autre part, si l'on pose $2\rho = L(\overrightarrow{f_1})$ et $2\sigma = L(\overrightarrow{f_2})$, alors la forme linéaire L s'exprime, dans les coordonnées (X, Y), par $L(X, Y) = 2\rho X + 2\sigma Y$ (on n'a pas besoin de calculer explicitement les coefficients ρ et σ). Donc, avec les coordonnées (X, Y), on obtient que :

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y) \mid \lambda X^2 + \mu Y^2 + 2\rho X + 2\sigma Y + f = 0\}.$$

Distinguons maintenant les cas suivants.

(1) Si $0 = \delta = \lambda\mu$, on peut supposer, quitte à échanger X et Y (i.e. à remplacer $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ par $(\overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_1})$) que $\lambda = 0 \neq \mu$ (λ, μ ne sont pas tous deux nuls, puisque la matrice S n'est pas nulle). Dans ce cas, on obtient l'équation

$$\mu\Big(Y + \frac{\sigma}{\mu}\Big)^2 = -2\rho X - f + \frac{\sigma^2}{\mu}, \qquad \text{soit} \qquad \Big(Y + \frac{\sigma}{\mu}\Big)^2 = -2\frac{\rho}{\mu}X - \frac{f\mu - \sigma^2}{\mu}.$$

Si $\rho = 0$, on obtient $\varnothing$ si $K = -\dfrac{f\mu - \sigma^2}{\mu}$ est < 0, et si $K \geq 0$ on obtient les droites parallèles d'équation

$$Y = -\frac{\sigma}{\mu} \pm \sqrt{K},$$

celles-ci étant confondues (i.e. égales) si $K = 0$. Si $\rho \neq 0$, on obtient l'équation

$$\Big(Y + \frac{\sigma}{\mu}\Big)^2 = -2\frac{\rho}{\mu}\Big(X + \frac{f\mu - \sigma^2}{2\rho}\Big).$$

Soit alors Ω le point de coordonnées $\Big(-\dfrac{f\mu - \sigma^2}{2\rho}, -\dfrac{\sigma}{\mu}\Big)$. Notons $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ les coordonnées dans le repère orthonormé $(\Omega, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ et $p = -\dfrac{\rho}{\mu}$, alors

$$\mathscr{C} = \{M(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \mid \widetilde{Y}^2 = 2p\widetilde{X}\}$$

est une parabole d'axe $\Delta = \Omega + \mathbb{R}\overrightarrow{f_1}$, de sommet Ω et de paramètre p.

Supposons $\delta = \lambda\mu \neq 0$. Alors l'équation de $\mathscr{C}$ est :

$$\lambda\Big(X + \frac{\rho}{\lambda}\Big)^2 + \mu\Big(Y + \frac{\sigma}{\mu}\Big)^2 = -f + \frac{\rho^2}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{\mu}.$$

Soit Ω le point de coordonnées $\Big(-\dfrac{\rho}{\lambda}, -\dfrac{\sigma}{\mu}\Big)$. Notant $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ les coordonnées dans le repère orthonormé $(\Omega, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$, on obtient l'équation

$$\lambda\widetilde{X}^2 + \mu\widetilde{Y}^2 = K = -f + \frac{\rho^2}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{\mu}.$$

(2) Si $\delta = \lambda\mu > 0$, alors λ et μ sont du même signe. Si K est du signe opposé, alors $\mathscr{C} = \varnothing$, tandis que $\mathscr{C} = \{\Omega\}$ si $K = 0$. Enfin, si K est du même signe que λ et μ, alors K/λ et K/μ sont tous deux > 0 ; quitte à échanger $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$, on peut supposer que $a^2 = K/\lambda > K/\mu = b^2$, alors

$$\mathscr{C} = \{M(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \mid \frac{\widetilde{X}^2}{a^2} + \frac{\widetilde{Y}^2}{b^2} = 1\}$$

est une ellipse, d'axe focal la droite $\Omega\widetilde{X}$.

(3) Si $\delta = \lambda\mu < 0$, alors λ et μ sont de signe opposé. Posons $-\lambda/\mu = t^2$. Si $K = 0$, $\mathscr{C}$ est la réunion des droites $\widetilde{Y} = t\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y} = -t\widetilde{X}$. Enfin, si $K \neq 0$, alors

$$\mathscr{C} = \{M(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \mid \frac{\widetilde{X}^2}{K/\lambda} + \frac{\widetilde{Y}^2}{K/\mu} = 1\}$$

est une hyperbole, d'asymptotes les droites précédentes, et d'axe focal $\Omega\widetilde{X}$ si $K/\lambda > 0 > K/\mu$ (et d'axe focal $\Omega\widetilde{Y}$ si $K/\lambda < 0 < K/\mu$). Ceci achève la démonstration du théorème 7.5.8. □

On peut énoncer le théorème 7.5.8 sous une forme un peu plus générale, de la façon suivante. Soit $\mathscr{R}' = (O, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ un repère arbitraire de $\mathscr{P}$, i.e. les vecteurs $\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}$ ne sont pas nécessairement unitaires ni orthogonaux. Notons (x', y') les coordonnées dans ce repère, soient $a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{R}$, avec $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$, et soit

$$\mathscr{C} = \{M(x', y') \mid a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0\}.$$

Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ est :

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \qquad \text{i.e.} \qquad \phi\left(\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}\right) = a'x'_1x'_2 + b'(x'_1y'_2 + y'_1x'_2) + c'y'_1y'_2$$

et soit Q la forme quadratique associée, i.e. $Q(x', y') = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$. Soient $\mathscr{B}_0 = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, P la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}_0)$, et (x, y) les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}_0 = (O, \mathscr{B}_0)$. La matrice de ϕ dans $\mathscr{B}_0$ est :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = {}^tPA'P,$$

donc $ac - b^2 = \mathrm{dét}\, A = (\mathrm{dét}\, P)^2 \cdot \mathrm{dét}\, A' = (\mathrm{dét}\, P)^2 \cdot (a'c' - b'^2)$ a même signe que $a'c' - b'^2$. Par conséquent, on déduit du théorème 7.5.8 le :

Corollaire 7.5.10. — *Soit $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère arbitraire de $\mathscr{P}$, soient (x, y) les coordonnées correspondantes, soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et soit*

$$\mathscr{C} = \{M(x, y) \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}.$$

On suppose $\mathscr{C} \neq \varnothing$. Alors :

(1) *Si $\delta = 0$, $\mathscr{C}$ est une parabole ou bien la réunion de deux droites parallèles ou « confondues » (i.e. égales).*

(2) *Si $\delta = ac - b^2 > 0$, $\mathscr{C}$ est une ellipse ou un point.*

(3) *Si $\delta < 0$, $\mathscr{C}$ est une hyperbole ou bien la réunion de deux droites sécantes.*

7.6. Quadriques en dimension 3

On a des résultats analogues dans l'espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension 3. Fixons un repère orthonormé $\mathscr{R}_0 = (O, \mathscr{B}_0)$ et soient (x, y, z) les coordonnées dans ce repère. Soit $Q(x, y, z)$ une forme quadratique non nulle, $L(x, y, z)$ une forme linéaire, et c une constante. On considère

$$\mathscr{C} = \{M(x, y, z) \in \mathscr{E} \mid Q(x, y, z) + L(x, y, z) + c = 0\}.$$

D'abord, d'après le théorème 7.5.9, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $E = \mathbb{R}^3$ telle que, notant (X, Y, Z) les coordonnées dans le repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$, on ait

$$Q(X, Y, Z) = \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2\,.$$

Alors $L(X, Y, Z)$ est encore une forme linéaire en X, Y, Z, donc de la forme $2\rho X + 2\sigma Y + 2\tau Z$, et l'on obtient que :

$$(\star) \qquad \mathscr{C} = \{M(X, Y, Z) \in \mathscr{E} \mid \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 + 2\rho X + 2\sigma Y + 2\tau Z + c = 0\}.$$

Distinguons les cas en fonction du rang de Q, qui peut être $3, 2$ ou 1 (car on a supposé $Q \neq 0$).

Supposons d'abord $\boxed{\mathrm{rang}(Q) = 3,}$ i.e. $\lambda\mu\nu \neq 0$. Dans ce cas, on peut faire disparaître tous les termes linéaires, en remplaçant X par $X + (\rho/\lambda)$, etc. Notons alors

$$\Omega = \left(-\frac{\rho}{\lambda}, -\frac{\sigma}{\mu}, -\frac{\tau}{\nu}\right)$$

et, pour alléger l'écriture, notons encore (X, Y, Z) les coordonnées dans le repère $(\Omega, \mathscr{B})$ (au lieu de les noter $\widetilde{X}$, etc.). On obtient alors une équation

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 = K.$$

De plus, quitte à changer K en $-K$, on peut supposer que Q est de signature $(3, 0)$ ou bien $(2, 1)$.

7.6.1. Ellipsoïdes. — Supposons Q de signature $(3, 0)$. Alors $\mathscr{C}$ est vide si $K < 0$, et $\mathscr{C} = \{\Omega\}$ si $K = 0$. Si $K > 0$, posons $K/\lambda = a^2$, $K/\mu = b^2$, $K/\nu = c^2$, avec $a, b, c > 0$, alors

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y, Z) \in \mathscr{E} \mid \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1\}$$

et l'on dit que $\mathscr{C}$ est un **ellipsoïde**. Si $a = b = c$, c'est une **sphère** de rayon a. Si $a = b \neq c$, l'ellipsoïde est invariant par rotation autour de l'axe ΩZ, on dit alors que c'est un **ellipsoïde de révolution**.

7.6.2. Cônes et hyperboloïdes. — Supposons Q de signature $(2, 1)$. Quitte à permuter X, Y, Z, on peut supposer que $\nu < 0 < \lambda, \mu$. Posons $\nu' = -\nu > 0$.

(a) Considérons d'abord le cas où $K = 0$. Dans ce cas, $\mathscr{C}$ est le **cône quadratique**

$$\mathscr{C}_0 = \{M(X, Y, Z) \in \mathscr{E} \mid \lambda X^2 + \mu Y^2 = \nu' Z^2\}.$$

On voit que le complémentaire dans $\mathscr{E}$ de ce cône a 3 composantes connexes ; dans chacune de ces composantes connexes, $Q(X, Y, Z) = \lambda X^2 + \mu Y^2 - \nu' Z^2$ ne s'annule pas, donc garde un signe constant, et ce signe est :

(1) à « l'extérieur » du cône, qui est la composante connexe contenant, par exemple, le point $(1, 1, 0)$, le signe est > 0,

(2) à « l'intérieur du demi-cône supérieur », qui est la composante connexe contenant, par exemple, le point $(0, 0, 1)$, le signe est < 0,

(3) de même, à « l'intérieur du demi-cône inférieur », qui est la composante connexe contenant, par exemple, le point $(0, 0, -1)$, le signe est < 0.

(b) On en déduit que lorsque $K > 0$,

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y, Z) \in \mathscr{E} \mid \lambda X^2 + \mu Y^2 - \nu' Z^2 = K > 0\}$$

est situé « à l'extérieur » du cône $\mathscr{C}_0$, et l'on peut montrer que dans ce cas $\mathscr{C}$ est **connexe**. Posant $K/\lambda = a^2$, $K/\mu = b^2$, $K/\nu' = c^2$, on obtient que

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y, Z) \in \mathscr{E} \mid \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1\}$$

est connexe ; on dit que c'est un **hyperboloïde à une nappe**.

(c) Si $K < 0$, alors

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y, Z) \in \mathscr{E} \mid \lambda X^2 + \mu Y^2 - \nu' Z^2 = K < 0\}$$

est situé « à l'intérieur » du cône $\mathscr{C}_0$, et est symétrique par rapport au plan $Z = 0$. Donc, dans ce cas, $\mathscr{C}$ est la réunion disjointe des deux ouverts $\mathscr{C}_+ = \mathscr{C} \cap \{Z > 0\}$ et $\mathscr{C}_- = \mathscr{C} \cap \{Z < 0\}$, donc $\mathscr{C}$ n'est **pas connexe**. On peut montrer que $\mathscr{C}_+$ et $\mathscr{C}_-$ sont connexes, donc

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y, Z) \in \mathscr{E} \mid \frac{\lambda}{K} X^2 + \frac{\mu}{K} Y^2 - \frac{\nu'}{K} Z^2 = 1\}$$

(où ici $K < 0$) a deux composantes connexes. Posant alors $-K/\lambda = a^2$, $-K/\mu = b^2$, $-K/\nu' = c^2$, on obtient que

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y, Z) \in \mathscr{E} \mid \frac{Z^2}{c^2} - \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1\}$$

a deux composantes connexes ; on dit que c'est un **hyperboloïde à deux nappes**.

Définition 7.6.3. — Si $a = b$ dans ce qui précède, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{le cône} \quad & \mathscr{C}_0 = \{M(X, Y, Z) \mid X^2 + Y^2 - \frac{a^2}{c^2} Z^2 = 0\} \\ \text{l'hyperboloïde à une nappe} \quad & \mathscr{C}_1 = \{M(X, Y, Z) \mid X^2 + Y^2 - \frac{a^2}{c^2} Z^2 = 1\} \\ \text{l'hyperboloïde à deux nappes} \quad & \mathscr{C}_2 = \{M(X, Y, Z) \mid \frac{a^2}{c^2} Z^2 - X^2 - Y^2 = 1\}; \end{aligned}$$

ces surfaces sont invariantes par rotation autour de l'axe ΩZ ; on dit que $\mathscr{C}_0$ est un **cône de révolution**, et $\mathscr{C}_1$ (resp. $\mathscr{C}_2$) un **hyperboloïde de révolution** à une nappe (resp. deux nappes).

7.6.4. Paraboloïdes et cylindres. — Supposons maintenant $\boxed{\mathrm{rang}(Q) = 2.}$ Quitte à permuter X, Y, Z, on peut supposer que $\nu = 0 \neq \lambda\mu$. Alors, écrivant X et Y au lieu de $X + \dfrac{\rho}{\lambda}$ et $Y + \dfrac{\sigma}{\mu}$, on obtient une équation de la forme :

$$(\dagger) \qquad \lambda X^2 + \mu Y^2 = pZ + t.$$

(a) Supposons, pour commencer $p \neq 0$. Alors, notant Z au lieu de $Z + \dfrac{t}{p}$, on se ramène à l'équation

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 = pZ.$$

De plus, quitte à changer p en $-p$, on peut supposer que $Q = \lambda X^2 + \mu Y^2$ est de signature $(2, 0)$ ou bien $(1, 1)$. Dans le premier cas, posons $1/\lambda = a^2$ et $1/\mu = b^2$, alors

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y, Z) \in \mathscr{E} \mid \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = pZ\}$$

et l'on dit que c'est un **paraboloïde elliptique**. Dans le second cas, quitte à échanger X et Y, on peut supposer que $1/\lambda = a^2$ et $-1/\mu = b^2$, alors

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y, Z) \in \mathscr{E} \mid \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = pZ\}$$

et l'on dit que c'est un **paraboloïde hyperbolique**.

(b) Considérons maintenant le cas où $p = 0$ (dans ce cas, la coordonnée Z n'intervient pas dans l'équation $(\dagger)$ plus haut). Quitte à changer t en $-t$, on peut supposer que $\lambda, \mu > 0$ ou bien que $\lambda > 0 > \mu$. Dans le premier cas, si $t < 0$ on a $\mathscr{C} = \varnothing$, et si $t = 0$ alors $\mathscr{C}$ est la droite $X = Y = 0$; enfin si $t > 0$, alors $\mathscr{C}$ est un **cylindre elliptique**, de section l'ellipse du plan $Z = 0$ définie par l'équation $(\dagger)$.

Dans le second cas, si $t = 0$ alors $\mathscr{C}$ est la réunion de deux plans sécants, et si $t \neq 0$ alors $\mathscr{C}$ est un **cylindre hyperbolique**, de section l'hyperbole du plan $Z = 0$ définie par l'équation $(\dagger)$.

Supposons enfin $\boxed{\mathrm{rang}(Q) = 1.}$ Quitte à permuter X, Y, Z, on peut supposer que $\nu = \mu = 0 \neq \lambda$. Alors, écrivant X au lieu de $X + \dfrac{\rho}{\lambda}$, on obtient une équation de la forme :

$$X^2 = pZ + qY + t.$$

Supposons, pour simplifier $(p, q) \neq (0, 0)$ (on laisse au lecteur le soin de traiter le cas $p = q = 0$). Posons $r = \sqrt{p^2 + q^2}$, alors la matrice

$$\frac{1}{r}\begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}$$

est orthogonale, donc les coordonnées $\widetilde{Z} = \dfrac{1}{r}(pZ + qY)$, $\widetilde{Y} = \dfrac{1}{r}(qZ - pY)$ correspondent à une nouvelle base orthonormée. Posant $Z' = \widetilde{Z} + (t/r)$ et $Y' = \widetilde{Y}$, on obtient que

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y', Z') \in \mathscr{E} \mid X^2 = rZ'\}$$

et l'on dit alors que $\mathscr{C}$ est un **cylindre parabolique**.

(Pour voir des figures d'ellipsoïde, d'hyperboloïde à une ou deux nappes, de paraboloïde elliptique ou hyperbolique, et de cylindre parabolique, voir par exemple : J. Lelong-Ferrand & J.-M. Arnaudiès, Cours de mathématiques, Tome 3, Géométrie et cinématique, (2ème édition), Chap. III, §§7–9, ou : C. Tisseron, Géométries affine, projective et euclidienne, p. 112.)