# Université Pierre et Marie Curie 2009–2010
# LM270, Partiel du 9 avril 2010 (2h)

Le polycopié et les notes de cours et de TD sont autorisés. Tout autre document, tout appareil électronique de calcul, et l'usage des téléphones portables, sont interdits. Pour les exercices demandant un calcul, détaillez les étapes du calcul en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. Cet examen comporte 5 exercices et est noté sur 100.

**Exercice 1** (20pts)**.** Déterminer, en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$, une base de l'image et du noyau de la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2-t & 2-t & t-1 & t-2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

**Exercice 2** (20pts)**.** Pour tout $n \geq 2$, on considère les matrices $n \times n$ suivantes, à coefficients dans $\mathbb{R}$ :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 & 2n-1 \end{pmatrix}$$

c.-à.-d., pour $A_n$ : les coefficients diagonaux valent 2, ceux juste au-dessus ou en-dessous de la diagonale valent $-1$, les autres sont nuls ; pour $B_n$ : les coefficients diagonaux sont les entiers impairs $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1$, ceux juste au-dessus ou en-dessous de la diagonale sont les entiers $1, 2, 3, \ldots, n-1$, les autres sont nuls. On pose $\Delta_n = \text{dét}(A_n)$ et $D_n = \text{dét}(B_n)$.

1. Calculer $\Delta_2$, $\Delta_3$, puis montrer que $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$. En utilisant cette formule, calculer $\Delta_4$, $\Delta_5$ puis déterminer $\Delta_n$ pour $n \geq 2$ arbitraire.
2. Calculer $D_2$, $D_3$, puis montrer que $D_n = (2n-1)D_{n-1} - (n-1)^2 D_{n-2}$. En utilisant cette formule, calculer $D_4$, $D_5$ puis déterminer $D_n$ pour $n \geq 2$ arbitraire.

**Exercice 3** (16pts)**.** Décomposer en sommes de carrés les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^4$ suivantes et déterminer leur rang, signature et noyau.

1. $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 - 2x_2x_3 - 4x_3^2 + x_4^2$.
2. $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

**Exercice 4** (24pts)**.** On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel : $(x \mid y) = x_1y_1 + x_2y_2$ si $x = \binom{x_1}{x_2}$ et $y = \binom{y_1}{y_2}$, et on note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique.

1. Soient $D$ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_1 + 2x_2 = 0$ et $s_D$ la symétrie orthogonale par rapport à $D$. Donner une base orthonormée $\mathcal{B} = (u, v)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $u \in D$ puis, en utilisant la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, déterminer la matrice de $s_D$ dans la base canonique.
2. Soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in O(2)$ et calculer $A^2$. En déduire la nature géométrique de $A$.
3. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et soit $B = \dfrac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p^2-q^2 & 2pq \\ 2pq & q^2-p^2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que $B \in O(2)$ et donner une équation et un vecteur directeur de $\text{Ker}(B - I_2)$. Quelle est la nature géométrique de $B$ ?

**Exercice 5** (20pts)**.** Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel $(\ \mid\ )$, on considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}+1 \\ 3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

Construire une base orthonormée $(f_1, f_2, f_3)$ de $\mathbb{R}^3$ en appliquant la méthode de Gram-Schmidt aux vecteurs $v_1, v_2, v_3$.