Université Pierre et Marie Curie 2011–2012
LM270, Partiel du 23 mars 2012

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **5** exercices et est noté sur **50**

Exercice 1 (10 pts)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_6)$ la base canonique de $\mathbb{C}^6$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^6$ défini par $u(e_i) = -e_{i+2}$ pour $i = 1, \dots, 4$ et $u(e_5) = -e_1$ et $u(e_6) = -e_2$, c.-à.-d., qui envoie $e_{i \bmod 6}$ sur $-e_{i+2 \bmod 6}$.

1) (2 pts) Sans chercher à calculer le polynôme caractéristique $P_u(X)$ (ce qui n'est pas facile ...), montrer que $Q(u) = 0$, pour un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ scindé sans racines multiples, que l'on déterminera.

2) (1 pt) u est-il diagonalisable ? Justifier votre réponse en citant un résultat du cours.

3) (1 pt) Si λ est une valeur propre de u, montrer que $Q(\lambda) = 0$.

4) (2,5 pts) Soit $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\alpha^3 = -1$. Soit $v_\alpha = \alpha^2 e_1 - \alpha e_3 + e_5$, calculer $u(v_\alpha)$; que constate-t-on ? Donner un vecteur w_α appartenant à l'espace propre $V_\alpha = \mathrm{Ker}(u - \alpha\, \mathrm{id})$, linéairement indépendant de v_α.

5) (3,5 pts) Déterminer une base de chaque espace propre de u.

Exercice 2 (14 pts)**.** Dans $M_3(\mathbb{R})$, soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1) (1 pt) Calculer AB et BA. Que constate-t-on ?

2) (2 pts) Montrer que $P_A(X) = -(X - \lambda)(X - \mu)^2$ et $P_B(X) = -(X - \alpha)(X - \beta)^2$, pour des réels $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ que l'on déterminera.

3) (2 pts) Calculer $(A - \lambda I_3)(A - \mu I_3)$ et $(B - \alpha I_3)(B - \beta I_3)$. En citant un résultat du cours, en déduire que A et B sont diagonalisables.

4) (1,5 pts) En utilisant les calculs de la question précédente, donner un vecteur non nul $v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$, et déterminer le vecteur Bv.

5) (2,5 pts) Montrer sans calculs supplémentaires que $(A - \mu I_3)(A - \lambda I_3) = 0$. En déduire deux vecteurs formant une base de l'espace propre $V_\mu(A) = \mathrm{Ker}(A - \mu I_3)$. Déterminer de même une base de l'espace propre $V_\beta(B) = \mathrm{Ker}(B - \beta I_3)$. A-t-on $V_\mu(A) = V_\beta(B)$?

Plus généralement, soient $u, v \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ deux endomorphismes **diagonalisables** qui commutent.

6) (2,5 pts) Soient μ une valeur propre de u et $E = \mathrm{Ker}(u - \mu\, \mathrm{id})$. Montrer que $v(E) \subset E$. Puis, notant $v_E : E \to E$ la restriction de v à E, montrer que v_E est diagonalisable. (Indications : Que peut-on dire du polynôme minimal Q de v ? Considérer alors l'endomorphisme $Q(v_E)$.)

7) (2,5 pts) On suppose de plus que $P_v(X) = (\alpha - X)(\beta - X)^{n-1}$ et $P_u(X) = (\lambda - X)^d (\mu - X)^{n-d}$ pour un certain $d \in \{1, \dots, n-1\}$, avec $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et que $\mathrm{Ker}(v - \alpha\, \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{id})$. Que peut-on alors dire des valeurs propres de la restriction v_E de v à l'espace propre $E = \mathrm{Ker}(u - \mu\, \mathrm{id})$? En déduire que $\mathrm{Ker}(u - \mu\, \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(v - \beta\, \mathrm{id})$. Enfin, si $d = 1$, montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mu\, \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(v - \beta\, \mathrm{id})$.

Exercice 3 (12 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 5 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$.

1) (2 pts) Calculer $P_A(X)$ et montrer que $P_A(X) = -(X - \lambda)^2 (X - \mu)^3$ pour deux réels λ, μ que l'on déterminera.

2) (3,5 pts) Soit $C = A - \mu I_5$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(C)$ en faisant des opérations sur les colonnes du couple $\left(\dfrac{I_5}{C}\right)$ pour arriver à un couple de matrices $\left(\dfrac{Q}{C' = CQ}\right)$, puis déterminer une base d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(C)$ dans $\mathrm{Ker}(C^2)$ en calculant CC' et en faisant, si nécessaire, des opérations sur les colonnes du couple $\left(\dfrac{Q}{CC'}\right)$. Puis déterminer $\mathrm{Ker}(C^3)$ sans calculs supplémentaires.

3) (2,5 pts) Soit $B = A - \lambda I_5$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(B)$ en faisant des opérations sur les colonnes du couple $\left(\dfrac{I_5}{B}\right)$ pour arriver à un couple de matrices $\left(\dfrac{P}{B' = BP}\right)$, puis déterminer une base d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(B)$ dans $\mathrm{Ker}(B^2)$ en calculant BB' et en faisant, si nécessaire, des opérations sur les colonnes du couple $\left(\dfrac{P}{BB'}\right)$.

4) (2 pts) Donner, pour chaque valeur propre de A, la partition associée à la suite des noyaux, et la partition transposée. Puis donner la forme normale de Jordan J_A de A.

5) (2 pts) Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$. Déterminer une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ de $\mathbb{R}^5$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = J_A$.

Exercice 4 (10 pts)**.** Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant l'équation différentielle

$$(*) \qquad y'' = \beta\, y' + \alpha\, y.$$

1) (1,5 pts) Soit $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la fonction de classe C^∞ définie par $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. Montrer que Y vérifie une équation différentielle $Y' = AY$, pour une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ que l'on déterminera. Citer une formule du cours exprimant $Y(t)$ en fonction de A et de $Y(0)$.
2) (1 pt) Soit T une indéterminée, calculer le polynôme caractéristique $P = P_A(T)$ de A. Considérons A comme élément de $M_2(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ est vecteur propre de A.
3) (3 pts) On suppose que P a dans $\mathbb{C}$ deux racines distinctes λ et μ. Déterminer sans calculs supplémentaires une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, puis calculer $\mathrm{dét}(Q)$ et Q^{-1}. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \exp(tA) = \frac{1}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} a\, e^{\lambda t} + b\, e^{\mu t} & c\, e^{\lambda t} + d\, e^{\mu t} \\ a' e^{\lambda t} + b' e^{\mu t} & c' e^{\lambda t} + d' e^{\mu t} \end{pmatrix}$$

pour $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{C}$ que l'on exprimera en fonction de λ et μ.
4) (1,5 pts) On suppose que $\lambda = p + iq$ et $\mu = p - iq$, avec $p, q \in \mathbb{R}$ et $q \neq 0$. Montrer alors que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \exp(tA) = \frac{e^{pt}}{q} \begin{pmatrix} f \cos(qt) + g \sin(qt) & h \sin(qt) \\ h' \sin(qt) & f' \cos(qt) + g' \sin(qt) \end{pmatrix}$$

pour des réels f, g, h, f', g', h' que l'on exprimera en fonction de p et q.
5) (1,5 pts) Déterminer la condition sur α, β dans l'équation différentielle $(*)$ pour que A ait deux valeurs propres réelles $\lambda \neq \mu$. Montrer que cette condition est vérifiée si $\alpha = -3$, $\beta = 4$ et donner une formule explicite pour la solution $y(t)$ de l'équation $y'' - 4y' + 3y = 0$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.
6) (1,5 pts) De même, déterminer la condition sur α, β pour que A ait deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda \neq \bar{\lambda}$. Montrer que cette condition est vérifiée si $\alpha = -2 = \beta$. En déduire une formule explicite pour la solution $y(t)$ de l'équation $y'' + 2y' + 2y = 0$ telle que $y(0) = 1 = y'(0)$.

Exercice 5 (4 pts)**.** Soient V un k-espace vectoriel de dimension n, E un sous-espace vectoriel de V de dimension d. En utilisant la propriété universelle de l'espace quotient V/E, montrer que l'espace dual $(V/E)^*$ s'identifie à un sous-espace de V^* que l'on déterminera.